

Ein Alternativsatz zur Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

Rudolf Pleier

D-92694 Etzenricht, Mai 2015

Inhaltsverzeichnis¹

1	Projektion auf eine konvexe Menge	5
2	Trennung konvexer Mengen.....	10
3	Alternativsätze.....	13
3.1	Alternativsätze über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel	13
3.2	Verschiedene Hüllen einer Menge	21
3.3	Polyederdarstellungssatz.....	23
3.4	Zusammenhang der Alternativsätze für konvexe lineare Kegel mit Alternativsätzen über lineare Ungleichungssysteme	24
3.5	Vergleich der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma	27
	Literatur	29
	Sachverzeichnis	30

¹ Der vorliegende Artikel ergänzt den Abschnitt 8.2 auf S. 376–400 des Buchs ‚Finanzmathematik‘ (2021) des Autors und liefert insbesondere den Beweis des Alternativsatzes zur Disjunktheit punktierter konvexer Kegel. Die hier im Text angegebenen Hinweise auf verschiedene Abschnitte und Kapitel beziehen sich auf die angeführten Bücher des Autors.

Konvexe Geometrie

In diesem Artikel werden einige grundlegende Sätze aus der konvexen Analysis im \mathbb{R}^n bereitgestellt. Die konvexe Analysis ist ein Grenzgebiet von Geometrie, Analysis und Funktionalanalysis und untersucht die Eigenschaften konvexer Mengen und konvexer Funktionen (Lexikon der Mathematik, Bd. 3 (2001), S. 190–194). Grundlagen der konvexen Geometrie, der Geometrie der linearen Ungleichungssysteme, findet man meist in den Büchern der Optimierung wie beispielsweise bei Borgwardt (2001), Jarre und Stoer (2004) und Jungnickel (2008).

Im nachfolgenden ersten Satz wird die Existenz einer eindeutigen Projektion eines Punktes $y \in \mathbb{R}^n$ auf eine abgeschlossene konvexe Menge C beschrieben. Aus diesem ergibt sich als zweiter Satz der Trennungssatz von Eidelheit (benannt nach dem polnischen Mathematiker Meier (Maks) Eidelheit, 1910–1943), der Voraussetzungen angibt, unter denen die strikte Trennung zweier konvexer Mengen mittels einer affinen Hyperebene möglich ist. Als Folgerungen aus diesem Trennungssatz werden in einem dritten Satz ein Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel angegeben und in zwei Zusätzen noch Alternativsätze über die Lösbarkeit endlicher linearer Ungleichungssysteme. Mit dem Beweisweg des dritten Satzes wird auch noch ein allgemeinerer Alternativsatz (Satz 5) hergeleitet.

Mit dem dritten Satz wird in den Abschnitten² 4.1.3 des Buchs ‚Finanzmathematik‘ und 3.6 des Buchs ‚Diskrete stochastische Finanzmathematik‘ des Autors für den vollkommenen Kapitalmarkt unmittelbar der Fundamentalsatz der Preistheorie für das deterministische bzw. stochastische Mehrperiodenmodell hergeleitet. Er besagt, dass die Arbitragefreiheit äquivalent ist zur Existenz eines strikt positiven Preisvektors \mathbf{P} bzw. Diskontierungsprozesses (Zustandspreisprozesses) Φ . Dieser positive Preisvektor bzw. Diskontierungsprozess ist ein positiver Normalenvektor des Unterraums der Kapitalmarktgeschäfte.

Der Preisvektor \mathbf{P} ermöglicht im Abschnitt 4.2 (S. 97–100) von ‚Finanzmathematik‘ auf dem vollkommenen Kapitalmarkt in einfacher Weise die eindeutige Duplizierung bzw. Replizierung und die Bewertung beliebiger Zahlungsströme, ohne das Supplement bestimmen zu müssen. Außerdem liefert er die Diskontierungsfaktoren für die B-Präferenzordnung \succeq , welche die Zahlungsströme mittels ihrer Barwerte vergleicht und welche die einzige Präferenzordnung darstellt, die mit den Konzepten der Duplizierung und Replizierung auf dem vollkommenen Kapitalmarkt konstruiert werden kann.

Der Diskontierungsprozess Φ ermöglicht in Abschnitt 3.6 (S. 130) von ‚Diskreter stochastischer Finanzmathematik‘ die Preisberechnung der duplizierbaren stochastischen Zahlungsprofile, ohne eine Duplikationsstrategie bestimmen zu müssen.

Dagegen gestalten sich auf dem im Kapitel 5 von ‚Finanzmathematik‘ betrachteten unvollkommenen Kapitalmarkt die Duplizierung und die Replizierung wesentlich aufwendiger. Die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung für jeden beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und damit die Existenz einer Präferenzordnung kann nur mittels speziell ausgewählter Supplementsysteme L gesichert werden. Entsprechende spezielle Supplementsysteme findet man beispielsweise in Abschnitt 8.4 und in den zugehörigen Download-Themen der Autorenwebsite www.pleier-r.de. Außerdem kann aus der Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts die Existenz eines positiven Normalenvektors \mathbf{P} nur für den Linienraum $V = K \cap (-K)$ der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte und nicht für den gesamten Kegel K der Kapitalmarktgeschäfte ge-

² Die hier im Text gegebenen Hinweise auf verschiedene Abschnitte und Kapitel beziehen sich auf die Bücher ‚Finanzmathematik‘ und ‚Diskrete stochastische Finanzmathematik‘ des Autors.

geschlossen werden. Doch auch dieser Normalenvektor \mathbf{P} findet seine Anwendung im Beweis für die Übereinstimmung der Präferenzordnungen gewisser Beurteilungskurven, nämlich der L -äquivalenten Beurteilungskurven.

1 Projektion auf eine konvexe Menge

Im nachfolgenden Satz wird die Existenz und Einzigkeit der Projektion eines Punktes auf eine Menge C für die Fälle formuliert, dass C eine abgeschlossene konvexe Menge, ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel oder ein linearer Unterraum ist. In Abbildung 1 werden diese Fälle geometrisch dargestellt.

Satz 1 Projektion eines Punktes auf eine abgeschlossene konvexe Menge

- a) Es sei C eine nichtleere abgeschlossene und konvexe Teilmenge des affinen Raumes \mathbb{R}^n , $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt dieses Raumes mit $\mathbf{y} \notin C$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $\mathbf{z} \in C$, der vom Punkt \mathbf{y} minimalen Abstand hat:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = \min \{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in C\}.$$

Dieser als die Lösung des angegebenen Minimierungsproblems definierte Punkt $\mathbf{z} =: P_C(\mathbf{y}) = P(\mathbf{y})$ ist auch dadurch charakterisiert, dass es für den Vektor \mathbf{y} eine eindeutige additive Zerlegung

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$$

gibt mit $\mathbf{z} \in C$ und $\mathbf{a}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in C$.

- b) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (nichtleerer) abgeschlossener und konvexer linearer Kegel und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\mathbf{y} \notin K$. Dann ist der gemäß Teil a) eindeutig bestimmte Punkt $\mathbf{z} = P(\mathbf{y})$ dadurch charakterisiert, dass der Vektor \mathbf{y} eine eindeutige orthogonale additive Zerlegung

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$$

besitzt mit

$$\mathbf{z} \in K,$$

$$\mathbf{a} \in K^p = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \leq 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in K\} \text{ und}$$

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{z} = 0.$$

- c) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum (Untervektorraum) und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\mathbf{y} \notin U$. Dann wird der gemäß Teil a) eindeutig bestimmte Punkt $\mathbf{z} = P(\mathbf{y})$ charakterisiert durch die Existenz einer eindeutigen orthogonalen additiven Zerlegung

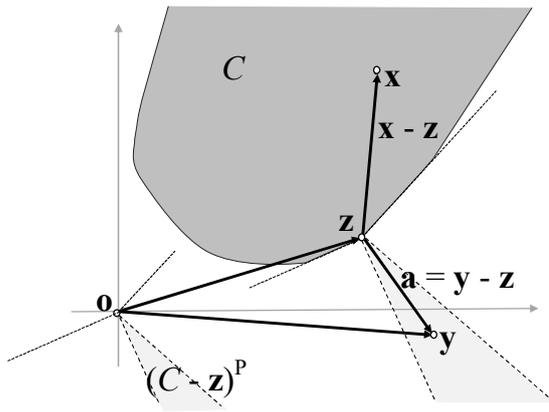
$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$$

mit

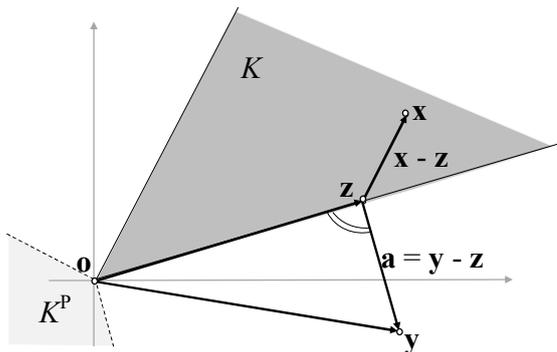
$$\mathbf{z} \in U \text{ und}$$

$$\mathbf{a} \in U^\perp = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}^\top \mathbf{x} = 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in U\}.$$

a)



b)



c)

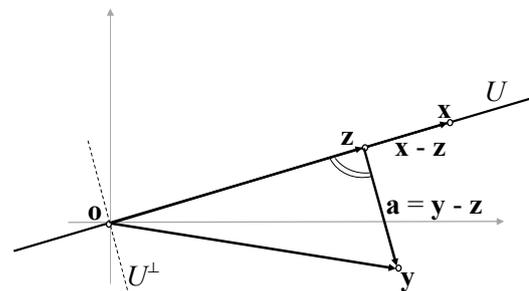


Abb. 1 Die Projektion eines Punktes y auf eine abgeschlossene konvexe Menge C und die orthogonale Projektion von y auf einen abgeschlossenen konvexen linearen Kegel K bzw. auf einen Unterraum U

Literatur zur Projektion

Jungnickel (2008), S. 34, 52, für die Projektion eines Punktes auf eine abgeschlossene konvexe Menge und für die orthogonale Projektion auf einen abgeschlossenen konvexen Kegel;

Jarre und Stoer (2004), S. 241, für die Projektion auf eine abgeschlossene konvexe Menge;

Stoer und Witzgall (1970), S. 51ff, für die orthogonale Projektion auf einen abgeschlossenen konvexen Kegel;

Wagner (1981), S. 190, 217, Kowalsky (1967), S. 133f, und Kremer (2006), S. 410f, je für die orthogonale Projektion auf einen linearen Unterraum;

Bröcker (2004), S. 8, Kremer (2006), S. 405, speziell für die orthogonale Projektion auf einen eindimensionalen Unterraum $U = \text{lin} \{x\}$.

Anmerkungen zur Projektion

- Der in Teil a) des obigen Satzes 1 als die Lösung des Minimierungsproblems angegebene Punkt z heißt die **Projektion** $P(y) = P_C(y)$ des Punktes y auf die Menge C bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ ($\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ mit dem Standardskalarprodukt bzw. kanonischen Skalarprodukt $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ des \mathbb{R}^n). Dass im Allgemeinen hier noch keine *orthogonale* Projektion vorliegt, zeigt das einfache Beispiel mit $C = \{z\}$, $z = (1,1)^T$ und $y = (2,1)^T$, bei dem die Projektion $z = P(y)$ von y nicht orthogonal zum Verbindungsvektor $\mathbf{a} = y - z = (1,0)^T$ von z zu y ist ($\mathbf{a}^T z = (1,0) \cdot (1,1)^T = 1 \neq 0$). Erst wenn wie in Teil b) die Menge $C = K$ noch zusätzlich als linearer Kegel vorausgesetzt wird, erhält man eine orthogonale Projektion.

Setzt man noch $P(y) := y$ für die Punkte $y \in C$, so erhält man eine Abbildung $P: \mathbb{R}^n \rightarrow C$, die Projektion auf C .

Der angegebene Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ liegt in dem zur Menge $M = C - \mathbf{z} = \{\mathbf{x} - \mathbf{z} : \mathbf{x} \in C\}$ gehörigen Polarkegel (polaren Kegel) $(C - \mathbf{z})^P$ bzw. in dem Normalkegel (Kegel der normalen Richtungen)

$$N(C; \mathbf{z}) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in C\} = (C - \mathbf{z})^P$$

von C in \mathbf{z} . Der Vektor \mathbf{a} und die Vektoren $\mathbf{m} \in M$ besitzen zueinander „polare“ (gegensätzliche) Richtungen in dem Sinne, dass der von \mathbf{a} und \mathbf{m} eingeschlossene Winkel stumpf ist ($\cos \varphi = \mathbf{a}^\top \mathbf{m} / (\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{m}\|) \leq 0$ für $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{m})$).

Die Menge C liegt in dem abgeschlossenen Halbraum

$$H^{\leq} = H_{\mathbf{a}, \zeta}^{\leq} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \zeta\}$$

mit $\zeta := \mathbf{a}^\top \mathbf{z}$ und der Punkt \mathbf{y} im offenen Halbraum

$$H^> = H_{\mathbf{a}, \zeta}^> := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} > \zeta\}.$$

- 2) Der in Teil b) des Satzes angegebene Punkt $\mathbf{z} \in K$ heißt die **orthogonale Projektion** $P(\mathbf{y}) = P_K(\mathbf{y})$ des Punktes \mathbf{y} auf den Kegel K . Der Punkt \mathbf{a} liegt in der Menge K^P , dem **Polarkegel** (polaren Kegel) von K . Da jeder Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige orthogonale additive Zerlegung $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{z} \in K$, $\mathbf{a} \in K^P$ und $\mathbf{a}^\top \mathbf{z} = 0$ besitzt, wird \mathbb{R}^n als die **orthogonale Summe** der Mengen K und K^P bezeichnet:

$$\mathbb{R}^n = K \boxplus K^P.$$

Es gilt $\mathbb{R}^n = K + K^P$ und $K \cap K^P = O = \{\mathbf{o}\}$, $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$.

- 3) Der in Teil c) des Satzes angegebene Punkt \mathbf{z} heißt die orthogonale Projektion (der Lotfußpunkt) $P(\mathbf{y}) = P_U(\mathbf{y})$ des Punktes \mathbf{y} auf den linearen Unterraum U . Die Menge U^\perp ist ein spezielles **lineares Komplement**³ des Unterraums U in \mathbb{R}^n , nämlich das **orthogonale Komplement** von U und es ist \mathbb{R}^n die spezielle direkte Summe von U und seinem orthogonalen Komplement U^\perp :

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp,$$

d. h. $\mathbb{R}^n = U + U^\perp$, $U \cap U^\perp = O = \{\mathbf{o}\}$ und $U \perp U^\perp$. Mit einer Orthonormalbasis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ von U ($\mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, m$) erhält man nach Kowalsky (1967), S. 134, Wagner (1981), S. 191, Kremer (2006), S. 410, die orthogonale Projektion mittels der Koordinatendarstellung

$$P_U(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m (\mathbf{y}^\top \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i.$$

Speziell für einen eindimensionalen Unterraum $U = \text{lin}\{\mathbf{x}\}$ ist $\mathbf{e}_1 = \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|$ eine Orthonormalbasis von U und die orthogonale Projektion auf U gegeben durch

$$P_U(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}^\top \mathbf{x}) \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|^2$$

(siehe z. B. Bröcker 2004, S. 8).

Beweis von Teil a) des Satzes: Existenz einer Lösung \mathbf{z} des Minimierungsproblems $\min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\}$ ($f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$): Wegen $C \neq \emptyset$ gibt es ein $\mathbf{w} \in C$. Für $\varepsilon := \|\mathbf{w} - \mathbf{y}\|$ (> 0) und mit der abgeschlossenen ε -Umgebung

$$\bar{U} = \overline{U_\varepsilon(\mathbf{y})} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon\}$$

von \mathbf{y} ist der Durchschnitt $M := C \cap \bar{U}$ von C und \bar{U} als Teilmenge von \bar{U} beschränkt und als Durchschnitt abgeschlossener Mengen auch abgeschlossen, somit insgesamt kompakt. Für die stetige Funktion

$$f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ist $f(\mathbf{x}) > \varepsilon^2$ für $\mathbf{x} \in C \setminus M$, $f(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^2$ für $\mathbf{x} \in M$ und nach dem Satz von Weierstraß (1815–1897; zum Extremwertsatz siehe die Analysis-Bücher von Hildebrandt (2006), Bd. 1, S. 155; Grauert und Fischer (1968), Bd. 2, S. 38; Erwe (1967), Bd. 1, S. 267)

³ Gelten für zwei Unterräume U, W eines Vektorraums V die Beziehungen $U + W = V$ und $U \cap W = O$, so schreibt man $V = U \oplus W$ und nennt V direkte Summe von U und W . Jeder der Unterräume heißt ein lineares Komplement des anderen bzw. komplementär zum anderen. Literatur: Bröcker (2004), S. 35, 44; Wagner (1981), S. 27.

$$\inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\} = \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\} = \min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\} = f(\mathbf{z}) =: \omega$$

mit einem $\mathbf{z} \in M \subseteq C$. Damit ist die Existenz eines Punktes $\mathbf{z} \in C$ gezeigt, der Lösung des angegebenen **Minimierungsproblems** ist.

Um die Einzigkeit (Unität) der Stelle \mathbf{z} eines Minimums von $f(\mathbf{x})$ auf C zu zeigen, nimmt man an, dass es eine weitere Stelle $\mathbf{v} \in C$ mit $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{z}) = \omega$ gibt und beweist, dass $\mathbf{v} = \mathbf{z}$ ist. Man wählt dazu den Punkt

$$\mathbf{u} := \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{v}),$$

der als Konvexkombination von \mathbf{z} und \mathbf{v} wegen $\mathbf{z}, \mathbf{v} \in C$ und der Konvexität von C ebenfalls in C liegt und der demnach einen Funktionswert $f(\mathbf{u}) \geq \omega$ besitzt. Weiter verwendet man, dass die Vektoren $\mathbf{u} - \mathbf{y}$ und $\mathbf{z} - \mathbf{u}$ orthogonal sind: Es ist nämlich

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{u} - \mathbf{y}) &= \mathbf{z} + \mathbf{v} - 2\mathbf{y} &&= (\mathbf{z} - \mathbf{y}) + (\mathbf{v} - \mathbf{y}), \\ 2(\mathbf{z} - \mathbf{u}) &= 2\mathbf{z} - \mathbf{z} - \mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{v} &&= (\mathbf{z} - \mathbf{y}) - (\mathbf{v} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

und somit

$$4(\mathbf{u} - \mathbf{y})^T(\mathbf{z} - \mathbf{u}) = (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2 - (\mathbf{v} - \mathbf{y})^2 = f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{v}) = 0.$$

Nach dem Satz von Pythagoras (von Samos ~ 570 v. Chr. – 510 v. Chr.) gilt dann die folgende Gleichung:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\omega \leq f(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{z} - \mathbf{u}\|^2 \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2 = f(\mathbf{z}) = \omega.$$

Daher folgt $\mathbf{z} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$, somit $2\mathbf{z} = 2\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{v}$ und schließlich $\mathbf{v} = \mathbf{z}$. Demnach gibt es nur eine einzige Stelle $\mathbf{z} \in C$ eines Minimums von $f(\mathbf{x})$ auf C . Die Geometrie zu dieser Schlussweise mit dem Satz von Pythagoras ist in der Abbildung 2 dargestellt.

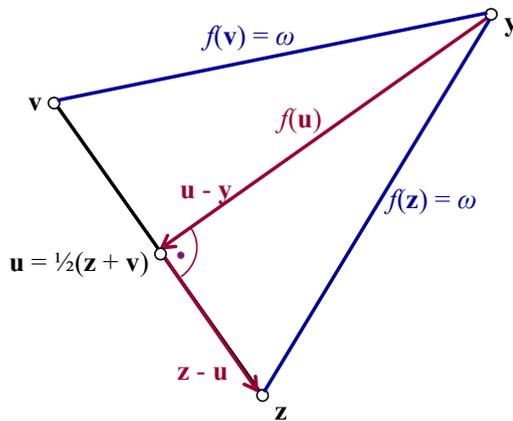


Abb. 2 Das gleichschenklige Dreieck mit den Ecken $\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{y}$ und den (gleich langen) Schenkeln $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ und $\mathbf{v} - \mathbf{y}$. Im Fall $\mathbf{v} \neq \mathbf{z}$ bzw. $\mathbf{z} - \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ gilt mit der Funktion $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ die Ungleichung $f(\mathbf{u}) < f(\mathbf{z})$.

Als Nächstes wird die angegebene Charakterisierung der Stelle \mathbf{z} bewiesen. Falls $f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{x})$ für alle Punkte $\mathbf{x} \in C$ ist, so gilt dies bei fest gewähltem $\mathbf{x} \in C$ insbesondere auch für die Punkte

$$\mathbf{x}_\lambda := \mathbf{z} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \lambda \in [0, 1],$$

auf der Verbindungsstrecke $[\mathbf{z}, \mathbf{x}] \subseteq C$ von \mathbf{z} und \mathbf{x} , da $\mathbf{z}, \mathbf{v} \in C$ gilt und C konvex ist. Es ist also für alle $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{x}_\lambda) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z})\|^2 = f(\mathbf{z}) + 2\lambda(\mathbf{z} - \mathbf{y})^T(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \lambda^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2$$

und

$$\varphi(\lambda) := f(\mathbf{x}_\lambda) \geq f(\mathbf{z}) = \varphi(0).$$

Daraus folgt

$$2(\mathbf{z} - \mathbf{y})^T(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \varphi'(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} \geq 0$$

und mit dem Verbindungsvektor $\mathbf{a} := \mathbf{y} - \mathbf{z} (\neq \mathbf{0})$ vom Punkt \mathbf{z} zum Punkt \mathbf{y} die angegebene Ungleichung

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in C.$$

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend zu

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{a}^T \mathbf{z} =: \zeta \quad \text{mit } \zeta = \max_{\mathbf{x} \in C} \mathbf{a}^T \mathbf{x}.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die Menge C im abgeschlossenen Halbraum $H_{\mathbf{a}, \zeta}^{\leq}$ liegt:

$$C \subseteq H_{\mathbf{a}, \zeta}^{\leq} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \zeta\}.$$

Die Hyperebene $H_{\mathbf{a}, \zeta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \zeta = \mathbf{a}^T \mathbf{z}\}$ heißt eine Stützhyperebene für C in \mathbf{z} .

Für den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ gilt

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{y} = \mathbf{a}^\top \mathbf{z} + \mathbf{a}^\top \mathbf{a} = \zeta + \|\mathbf{a}\|^2 > \zeta,$$

was geometrisch bedeutet, dass der Punkt \mathbf{y} im offenen Halbraum $H_{\mathbf{a}, \zeta}^>$ liegt:

$$\mathbf{y} \in H_{\mathbf{a}, \zeta}^> := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} > \zeta\}.$$

Für den minimalen Funktionswert der Funktion $f(\mathbf{x})$ auf der Menge C gilt $\omega = f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2$.

Für die umgekehrte Beweisrichtung der Charakterisierung der Projektion sei ein $\mathbf{z} \in C$ vorgegeben, für welches mit $\mathbf{a} := \mathbf{y} - \mathbf{z}$ für alle $\mathbf{x} \in C$ die Ungleichung $\mathbf{a}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0$ erfüllt ist. Außerdem sei $\mathbf{x} \in C$ beliebig vorgegeben. Für alle $\lambda \in [0, 1]$ ist dann

$$f(\mathbf{x}_\lambda) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z})\|^2 = f(\mathbf{z}) - 2\lambda\mathbf{a}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \lambda^2\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \geq f(\mathbf{z})$$

und insbesondere für $\lambda = 1$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{z}).$$

Da $\mathbf{x} \in C$ beliebig war, ist $\mathbf{z} \in C$ eine Stelle (ein Argument), an der die Funktion $f(\mathbf{x})$ ihr Minimum annimmt:

$$\mathbf{z} \in \{\mathbf{x} \in C : f(\mathbf{x}) \text{ minimal}\} =: \arg \min_{\mathbf{x} \in C} f(\mathbf{x}).$$

Auf Grund der Einzigkeit der Lösung des Minimierungsproblems ist dann $\mathbf{z} = P_C(\mathbf{y})$.

Beweis von Teil b): Als zusätzliche Voraussetzung kommt jetzt für die Menge $C = K$ dazu, dass K auch ein linearer Kegel ist, dass also mit $\mathbf{x} \in K$ auch $\lambda\mathbf{x} \in K$ gilt für alle reellen $\lambda \geq 0$. Nach Teil a) des Satzes gilt mit der eindeutig bestimmten Projektion $\mathbf{z} = P_K(\mathbf{y}) \in K$ von \mathbf{y} auf K und mit dem Verbindungsvektor $\mathbf{a} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ von \mathbf{z} zu \mathbf{y} für alle $\mathbf{x} \in K$ die Ungleichung $\mathbf{a}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0$. Für alle $\lambda \geq 0$ ist nun $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{z} \in K$ und somit

$$(\lambda - 1)\mathbf{a}^\top \mathbf{z} = \mathbf{a}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0.$$

Da hierbei der Faktor $\lambda - 1 \in [-1, \infty[$ sowohl negative als auch positive Werte annehmen kann, kann der zweite Faktor $\mathbf{a}^\top \mathbf{z}$ weder negativ noch positiv sein und muss daher gleich Null sein. Für \mathbf{y} gibt es daher die orthogonale additive Zerlegung $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$, $\mathbf{z} \perp \mathbf{a}$. Aus der Orthogonalität von \mathbf{a} und \mathbf{z} und der obigen Ungleichung folgt dann für alle $\mathbf{x} \in K$

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{a}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0,$$

also $\mathbf{a} \in K^P$: Die Richtung \mathbf{a} liegt in dem zu K polaren Kegel K^P . Insgesamt hat man also für \mathbf{y} die additive Zerlegung $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{z} \in K$, $\mathbf{a} \in K^P$ und $\mathbf{a}^\top \mathbf{z} = 0$. Der Summand \mathbf{z} ist die orthogonale Projektion von \mathbf{y} auf K .

Für die umgekehrte Beweisrichtung der Charakterisierung der orthogonalen Projektion geht man von einer orthogonalen additiven Zerlegung $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{z} \in K$, $\mathbf{a} \in K^P$ und $\mathbf{a}^\top \mathbf{z} = 0$ aus und zeigt, dass $\mathbf{z} = P(\mathbf{y})$ ist. Für beliebiges $\mathbf{x} \in K$ gilt dann $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq 0$ und demnach

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{a}\|^2 = [(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{a}]^\top [(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{a}] \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 - 2\mathbf{a}^\top(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 - 2\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + 2\mathbf{a}^\top \mathbf{z} + f(\mathbf{z}) \\ &\geq f(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

so dass \mathbf{z} die eindeutig bestimmte Lösung des Minimierungsproblems ist: $\mathbf{z} = P_K(\mathbf{y})$.

Beweis von Teil c): Für die Menge $C = U$ ist jetzt zusätzlich vorausgesetzt, dass U ein linearer Unterraum von \mathbb{R}^n ist ($\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$, $U + U \subseteq U$, $\lambda U \subseteq U$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$). Die Teilmenge U ist als linearer Unterraum auch ein (nicht-leerer) konvexer linearer Kegel ($U + U \subseteq U$, $\lambda U \subseteq U$ für alle $\lambda \geq 0$) und abgeschlossen: Die Abgeschlossenheit von U erhält man, da es zu einer Basis des Unterraums U den Koordinaten-Isomorphismus $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m = \dim U$) gibt (siehe beispielsweise Wagner (1981), S. 62, und Bröcker (2004), S. 39) und diese Abbildung φ und ihre Umkehrabbildung φ^{-1} als bijektive lineare Abbildungen auch stetig sind (φ ist ein Homöomorphismus, eine topologische Abbildung). Da die Abbildung $\varphi = (\varphi^{-1})^{-1}$ stetig ist, ist φ^{-1} eine abgeschlossene Abbildung, die abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Bilder überführt (Franz (1968), Bd. I, S. 34–36). Da der Raum \mathbb{R}^m abgeschlossen ist, ist also $U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m)$ ebenfalls abgeschlossen.

Der zu U polare Kegel U^P ist dann gleich dem orthogonalen Komplement U^\perp von U : Ist nämlich $\mathbf{d} \in U^P$ und $\mathbf{x} \in U$ beliebig, so ist auch $-\mathbf{x} \in U$, damit $\mathbf{d}^\top \mathbf{x} \leq 0$ und $-\mathbf{d}^\top \mathbf{x} \leq 0$, also $\mathbf{d}^\top \mathbf{x} = 0$ und $\mathbf{d} \in U^\perp$. Umgekehrt folgt aus $\mathbf{d} \in U^\perp$ auch $\mathbf{d} \in U^P$. Der Polarkegel M^P einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ verallgemeinert also den Begriff des orthogonalen Komplements U^\perp eines linearen Unterraums $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Es ergibt sich dann die Aussage von Teil c) unmittelbar aus Teil b). Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. \square

2 Trennung konvexer Mengen

Mit Hilfe des vorherigen Satzes über die Existenz einer eindeutigen Projektion eines Punktes auf eine abgeschlossene konvexe Menge wird nun der folgende Trennungssatz von Eidelheit bewiesen. In der Abbildung 3 erfolgt die geometrische Darstellung der Trennung eines Punktes \mathbf{y} von einer abgeschlossenen konvexen Menge C und der Trennung einer kompakten konvexen Menge S von einer Menge T für die Fälle, dass T eine abgeschlossene konvexe Menge, ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel oder ein linearer Unterraum ist.

Satz 2 Trennungssatz von Eidelheit: Strikte Trennung von abgeschlossenen konvexen Mengen

- a) Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\mathbf{y} \notin C$. Dann kann der Punkt \mathbf{y} von der Menge C durch eine Hyperebene strikt getrennt werden. Dies heißt, dass es eine affine Hyperebene

$$H = H_{\mathbf{a},\alpha} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\},$$

mit einem Normalenvektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ der Hyperebene und einem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt und dass \mathbf{y} in dem einen und C in dem anderen der zugehörigen offenen Halbräume liegt:

$$\mathbf{y} \in H^> := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} > \alpha\},$$

$$C \subseteq H^< := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha\}.$$

- b) Es seien $T, S \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere abgeschlossene konvexe Mengen und zusätzlich S beschränkt. Falls die Mengen S und T disjunkt (elementfremd, durchschnittsfremd) sind, können sie strikt getrennt werden. Es gibt also eine affine Hyperebene $H = H_{\mathbf{a},\alpha}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \alpha \in \mathbb{R}$) mit $S \subseteq H^<$ und $T \subseteq H^>$, d. h.

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

- c) Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel und $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte konvexe Menge. Falls die Mengen T und S disjunkt sind, können sie durch eine affine Hyperebene $H = H_{\mathbf{a},\alpha}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \alpha > 0$) strikt getrennt werden:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Darüber hinaus gilt noch

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T,$$

so dass der Kegel T in dem abgeschlossenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^{\leq}$ und \mathbf{a} in dem zu T polaren Kegel T^p liegt:

$$T \subseteq H_{\mathbf{a},0}^{\leq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq 0\},$$

$$\mathbf{a} \in T^p = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}^\top \mathbf{x} \leq 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in T\}.$$

- d) Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum und $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte konvexe Menge. Falls die Mengen T und S disjunkt sind, können sie durch eine affine Hyperebene $H = H_{\mathbf{a},\alpha}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \alpha > 0$) strikt getrennt werden:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Darüber hinaus gilt noch

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T,$$

so dass der Unterraum T in der linearen (homogenen) Hyperebene $H_{\mathbf{a},0} = [\mathbf{a}]^\perp$, einem $(n-1)$ -dimensionalen linearen Unterraum, und \mathbf{a} in dem orthogonalen Komplement T^\perp von T liegt.

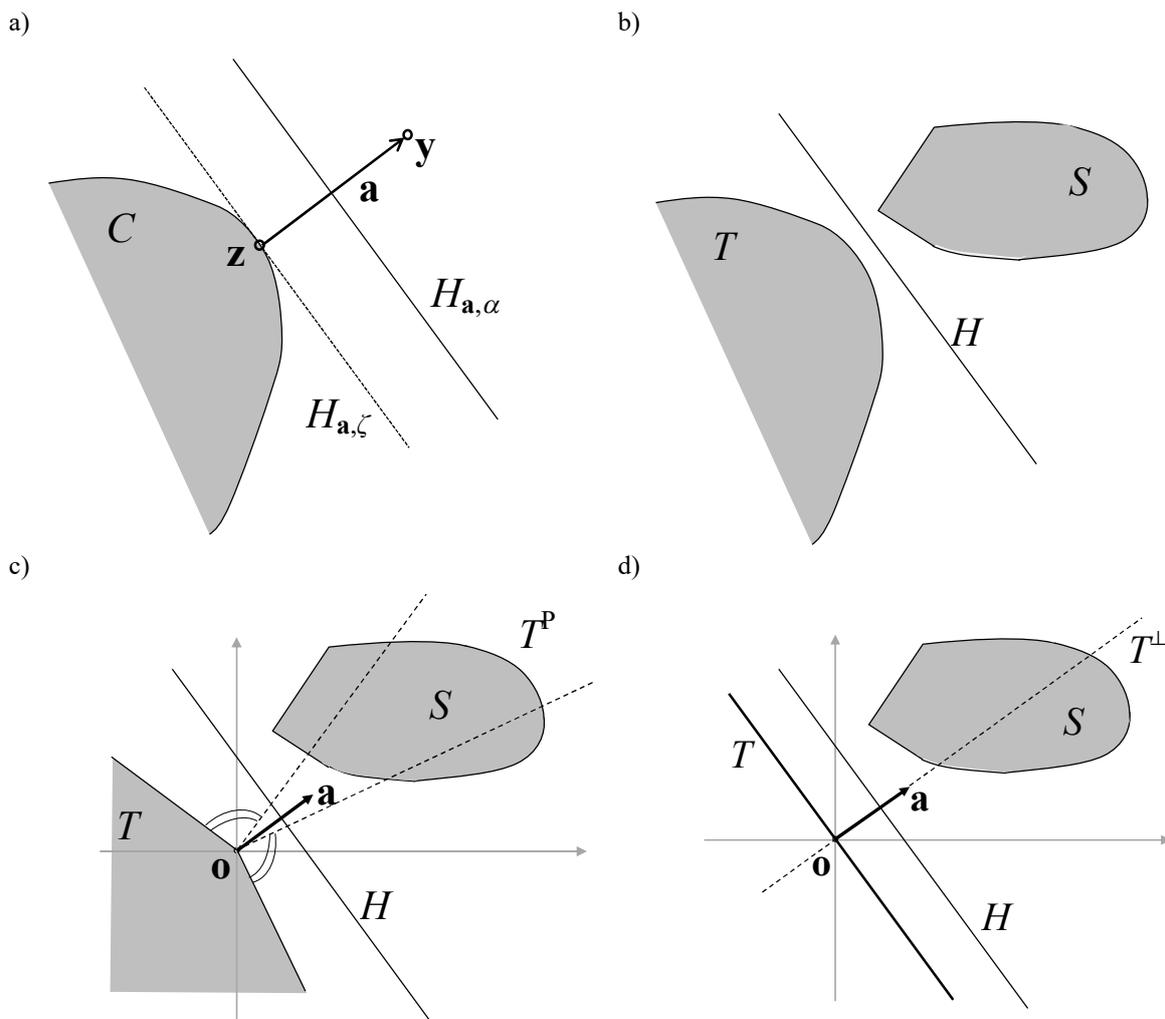


Abb. 3 Die strikte Trennung eines Punktes y von einer abgeschlossenen konvexen Menge C und die strikte Trennung einer kompakten konvexen Menge S von einer abgeschlossenen konvexen Menge T , von einem abgeschlossenen konvexen linearen Kegel T bzw. von einem Unterraum T

Literatur zu den Trennungssätzen:

Jungnickel (2008), S. 35, 37, Jarre und Stoer (2004), S. 209, 211, 220, für die Trennung eines Punktes bzw. des Nullpunktes oder einer kompakten konvexen Menge von einer abgeschlossenen konvexen Menge;

Kremer (2006), S. 32–34, für die Trennung des Nullpunktes von einer abgeschlossenen konvexen Menge und für die Trennung einer kompakten konvexen Menge von einem Unterraum.

Beweis von Teil a) des Satzes: Nach Satz 1, a) gilt mit der Projektion $z := P_C(y) \in C$ von y auf C und dem Verbindungsvektor $a := y - z (\neq 0)$ von z zu y die Ungleichung

$$a^T x \leq a^T z =: \zeta \quad \text{für alle } x \in C.$$

Für $y = z + a$ gilt

$$a^T y = a^T z + a^T a = \zeta + \|a\|^2 > \zeta$$

und daher für alle $x \in C$

$$a^T x \leq \zeta < a^T y = \zeta + \|a\|^2.$$

Für $\alpha := \zeta + \frac{1}{2}\|a\|^2 = a^T y - \frac{1}{2}\|a\|^2$ erhält man die Ungleichung $\zeta = \alpha - \frac{1}{2}\|a\|^2 < \alpha < a^T y$ und damit die strikte Trennung von y und C :

$$a^T x < \alpha < a^T y \quad \text{für alle } x \in C.$$

Beweis von Teil b): Um Teil a) des Satzes anzuwenden, betrachtet man die Menge

$$C := T - S = \{z = x - y : x \in T, y \in S\}.$$

Es ist C eine nichtleere Menge, da T und S nichtleer sind. Weiter ist $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{o} \notin C$, da sonst $\mathbf{o} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \in C$ mit Elementen $\mathbf{x} \in T$ und $\mathbf{y} \in S$ gilt, also $\mathbf{x} = \mathbf{y} \in T \cap S$, im Widerspruch zur Disjunktheit von S und T .

Die Menge C ist konvex, da mit den Elementen $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in C$ und $\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2 \in C$ ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in T$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in S$) wegen der Konvexität von T und S auch alle Konvexkombinationen in C liegen:

$$\begin{aligned}\lambda \mathbf{z}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{z}_2 &= \lambda \mathbf{x}_1 - \lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 - (1 - \lambda) \mathbf{y}_2 \\ &= [\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2] - [\lambda \mathbf{y}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2] \\ &\in T - S = C \text{ für } \lambda \in [0, 1].\end{aligned}$$

Schließlich wird noch gezeigt, dass die Menge C auch abgeschlossen ist, d. h. dass sie alle ihre Berührungspunkte enthält bzw. dass sie mit jeder konvergenten Folge $(\mathbf{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{z}_k \in C$, auch deren Grenzwert \mathbf{z}_0 enthält:

$$\mathbf{z}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{z}_k \in C.$$

Es sei also $(\mathbf{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten \mathbf{z}_k in C mit Grenzwert \mathbf{z}_0 . Es ist $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k$ mit $\mathbf{x}_k \in T$, $\mathbf{y}_k \in S$, $k \in \mathbb{N}$. Da die Menge S eine abgeschlossene und beschränkte Menge im Raum \mathbb{R}^n ist, ist sie nach einem Satz der Analysis kompakt und zwar sowohl überdeckungskompakt (nach Heine-Borel; siehe z. B. Hildebrandt (2003), Bd. 2, S. 94) als auch folgenkompakt (siehe z. B. Hildebrandt (2006), Bd. 1, S. 95). Zu der in der kompakten Menge S liegenden Folge \mathbf{y}_k gibt es also eine Teilfolge \mathbf{y}_{k_j} , die gegen ein Element $\mathbf{y}_0 \in S$ konvergiert:

$$\mathbf{y}_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{k_j} \in S.$$

Als Differenz zweier konvergenter Folgen konvergiert auch die in der Menge T liegende Folge $\mathbf{x}_{k_j} = \mathbf{z}_{k_j} - \mathbf{y}_{k_j}$:

$$\mathbf{x}_0 := \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{k_j}.$$

Da die Menge T abgeschlossen ist, gilt $\mathbf{x}_0 \in T$ und damit auch

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{z}_k = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{z}_{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{k_j} - \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{k_j} \\ &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in T - S = C.\end{aligned}$$

Damit ist die Abgeschlossenheit der Menge C nachgewiesen.

Nach Teil a) des Satzes kann der Punkt $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{o}$ strikt von der Menge C getrennt werden. Es gibt also ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ (nämlich $\mathbf{a} := \hat{\mathbf{y}} - P_C(\hat{\mathbf{y}})$) und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{z} < \alpha < \mathbf{a}^\top \mathbf{o} = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \in C$$

bzw.

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha + \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T, \mathbf{y} \in S.$$

Da T und S nichtleere Mengen sind, folgt aus dieser Ungleichung

$$\beta := \sup_{\mathbf{x} \in T} \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \gamma := \inf_{\mathbf{y} \in S} \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \in \mathbb{R}$$

und wegen $\alpha < 0$ für β und γ die strenge Ungleichung

$$\beta \leq \alpha + \gamma < \gamma.$$

Wählt man nun ein δ mit $\beta < \delta < \gamma$, so erhält man die Ungleichung

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \beta < \delta < \gamma \leq \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T, \mathbf{y} \in S,$$

so dass die Hyperebene $H_{\mathbf{a}, \delta}$ die Mengen S und T strikt trennt.

Beweis von Teil c): Nach Teil b) von Satz 2 erhält man die strikte Trennung von S und T :

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Aus $\mathbf{o} \in T$ folgt $\alpha > \mathbf{a}^\top \mathbf{o} = 0$, also $\alpha > 0$.

Da T ein linearer Kegel ist, ist für beliebige $\mathbf{x} \in T$ und $\lambda \geq 0$ auch $\lambda \mathbf{x} \in T$ und

$$\lambda \cdot \mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha.$$

Da hierbei auf der linken Seite der Ungleichung der erste Faktor λ beliebig große positive Werte annehmen kann, ist der zweite Faktor $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}$ nichtpositiv. Für alle $\mathbf{x} \in T$ gilt also $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq 0$, so dass T in dem abgeschlossenen linearen (homogenen) Halbraum $H_{\mathbf{a}, 0}^{\leq}$ liegt und \mathbf{a} in dem zu T polaren Kegel T^p .

Beweis von Teil d): Im Beweis von Satz 1, Teil c) wurde bereits begründet, dass ein linearer Unterraum T auch ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel ist und der zu T polare Kegel T^p gleich dem orthogonalen Komplement T^\perp von T ist. Nach Satz 2, Teil c) erhält man dann die strikte Trennung von S und T durch eine affine Hyperebene $H = H_{\mathbf{a}, \alpha}$ mit einem $\mathbf{a} \in T^p = T^\perp$. Aus $\mathbf{o} \in T$ folgt $\alpha > \mathbf{a}^\top \mathbf{o} = 0$, also $\alpha > 0$. Wegen $\mathbf{a} \in T^\perp$ gilt hier für alle $\mathbf{x} \in T$ die Gleichung $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = 0$, so dass T jetzt in der linearen Hyperebene $L = H_{\mathbf{a}, 0} = [\mathbf{a}]^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = 0\}$ liegt. Der Unterraum T ist also parallel zur trennenden Hyperebene $H = H_{\mathbf{a}, \alpha}$. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. \square

3 Alternativsätze

3.1 Alternativsätze über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

Als Folgerung aus dem Satz 2 c) und d) wird der nachfolgende Alternativsatz über die Disjunktheit von punktierten konvexen Kegeln hergeleitet. Er gibt auch eine Charakterisierung der (topologisch) abgeschlossenen konvexen Kegel bzw. der linearen Unterräume, die jeweils zum punktierten nichtnegativen Orthanten disjunkt sind. Anschließend wird der Zusammenhang mit entsprechenden Alternativsätzen für lineare Ungleichungssysteme aufgezeigt.

Der Teil b) des nachfolgenden Alternativsatzes, der dem Alternativsatz von Stiemke (1915) über lineare Ungleichungssysteme entspricht, wird im Abschnitt 4.1.3 des Buchs ‚Finanzmathematik‘ für den Beweis der Existenz eines positiven orthogonalen Preisvektors des arbitragefreien vollständigen Kapitalmarkts verwendet und in Abschnitt 8.3.5 für den Nachweis des positiven orthogonalen Preisvektors \mathbf{P} zur Menge V der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte beim Beweis zur Charakterisierung der Übereinstimmung von D- bzw. von R-Präferenzordnungen. In Abschnitt 3.6 des Buchs ‚Diskrete stochastische Finanzmathematik‘ liefert er den positiven orthogonalen Diskontierungsprozess zum arbitragefreien vollkommenen stochastischen Kapitalmarkt.

Bei der Formulierung des Satzes werden folgende Bezeichnungen für spezielle Orthanten des \mathbb{R}^n verwendet. Die Definition eines abgeschlossenen **Orthanten** im \mathbb{R}^n findet man beispielsweise im Lexikon der Mathematik (2002), Bd. 4, S. 118. Sie verallgemeinert den Begriff „Quadrant des \mathbb{R}^2 “ und „Oktant des \mathbb{R}^3 “ auf den \mathbb{R}^n . Der nichtnegative Orthant des \mathbb{R}^n ist die abgeschlossene Menge

$$\mathbb{R}_{\geq 0}^n = \mathbb{R}_{\geq \mathbf{o}}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}$$

aller (komponentenweise) nichtnegativen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der schwach positive Orthant bzw. der im Nullpunkt \mathbf{o} punktierte nichtnegative Orthant ist die Menge

$$\dot{\mathbb{R}}_{\geq 0}^n = \mathbb{R}_{> 0}^n \setminus \{\mathbf{o}\} = \mathbb{R}_{> \mathbf{o}}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o}, \text{ d.h. } \mathbf{x} \geq \mathbf{o} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$$

aller schwach positiven Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und der positive Orthant ist die offene Menge

$$\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_{> \mathbf{o}}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o}\}.$$

aller (komponentenweise) positiven Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Der nichtnegative Orthant

$$P := \mathbb{R}_{\geq 0}^n = \bigcap_{j=1}^n H_{\mathbf{e}_j, 0}^{\geq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : -E\mathbf{x} \leq \mathbf{o}\} =: P(-E, \mathbf{o})$$

$(E = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ Einheitsmatrix})$ ist als Durchschnitt der n abgeschlossenen homogenen Halbräume

$$H_{\mathbf{e}_j, 0}^{\geq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j^\top \mathbf{x} \geq 0\} \quad (j = 1, \dots, n)$$

ein nichtleeres Polyeder, das den Nullpunkt \mathbf{o} enthält. Außerdem ist P als Durchschnitt abgeschlossener konvexer linearer Kegel auch selbst ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel, also insgesamt ein polyedrischer Kegel. Nimmt man zum positiven Orthanten \mathbb{R}_+^n noch den Nullpunkt \mathbf{o} hinzu, so erhält man ebenfalls einen konvexen linearen Kegel, der aber weder offen (\mathbf{o} ist kein innerer Punkt von R) noch abgeschlossen ist (\mathbf{e}_1 ist Häufungspunkt von R , aber kein Punkt von R):

$$R := \mathbb{R}_+^n \cup \{\mathbf{o}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o} \text{ oder } \mathbf{x} = \mathbf{o}\}.$$

Umgekehrt ist dann der positive Orthant \mathbb{R}_+^n der im Nullpunkt punktierte konvexe lineare Kegel

$$\dot{R} = R \setminus \{\mathbf{o}\}.$$

Die Disjunktheit eines linearen Kegels T zum punktierten nichtnegativen Orthanten $\dot{P} = \mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ ist gleichbedeutend dazu, dass die linearen Kegel T und $P = \mathbb{R}_{+\mathbf{o}}^n$ nur den trivialen Durchschnitt $O = \{\mathbf{o}\}$ aufweisen. Weiter ist die Disjunktheit eines linearen Kegels T zum positiven Orthanten $\mathbb{R}_+^n = \dot{R}$ gleichbedeutend dazu, dass die linearen Kegel T und $R = \mathbb{R}_+^n \cup \{\mathbf{o}\}$ nur den trivialen Durchschnitt $O = \{\mathbf{o}\}$ aufweisen.

Der Teil a) des Satzes besagt nun, dass ein nichtleerer abgeschlossener konvexer linearer Kegel T genau dann mit dem nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}_{+\mathbf{o}}^n$ nur den trivialen Durchschnitt O besitzt, wenn T und $\mathbb{R}_{+\mathbf{o}}^n$ durch eine homogene Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ mit positivem Normalenvektor \mathbf{a} getrennt werden können. Der Teil b) behandelt den entsprechenden Spezialfall, dass T ein linearer Unterraum ist. Die Abbildung 4 gibt eine grafische Darstellung der in Satz 3 beschriebenen geometrischen Situation. Der Teil b) dieses Satzes gestattet eine schöne Anwendung in der Finanzmathematik, wo er unmittelbar den Fundamentalsatz der Preistheorie für das deterministische und das stochastische Mehrperiodenmodell liefert: Die Arbitragefreiheit des Modells, also die Disjunktheit des Unterraums T der Kapitalmarktgeschäfte zum schwach positiven Orthanten, ist äquivalent zur Existenz eines positiven Preisvektors bzw. Diskontierungsprozesses in T^\top .

Satz 3 Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

- a) Der (nichtleere) abgeschlossene konvexe lineare Kegel $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte nichtnegative Orthant $\mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen positiven Vektor \mathbf{a} im polaren Kegel T^P von T gibt und somit T in einem abgeschlossenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^\leq$ und $\mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$ mit positivem Normalenvektor \mathbf{a} liegt:

$$T \cap \mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n = \emptyset \Leftrightarrow T^P \cap \mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n \neq \emptyset.$$

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Es hat also entweder T mit dem punktierten nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ einen leeren Durchschnitt oder T^P mit dem positiven Orthanten $\mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ einen leeren Durchschnitt.

Eine äquivalente Formulierung lautet: Es hat entweder T mit dem punktierten nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ einen nichtleeren Durchschnitt oder es besitzt der Polarkegel T^P von T mit dem positiven Orthanten $\mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ einen nichtleeren Durchschnitt. Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

- (1) $T \cap \mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n \neq \emptyset$;
- (2) $T^P \cap \mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n \neq \emptyset$.

- b) Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte nichtnegative Orthant $\mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ sind genau dann disjunkt, wenn einen positiven Vektor \mathbf{a} im orthogonalen Komplement T^\perp gibt und somit T in einer homogenen Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und $\mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n$ im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$ mit positivem Normalenvektor \mathbf{a} liegt:

$$T \cap \mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n = \emptyset \Leftrightarrow T^\perp \cap \mathbb{R}_{>\mathbf{o}}^n \neq \emptyset.$$

Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):
 (1) $T \cap \mathbb{R}_{>0}^n \neq \emptyset$;
 (2) $T^\perp \cap \mathbb{R}_{>0}^n \neq \emptyset$.

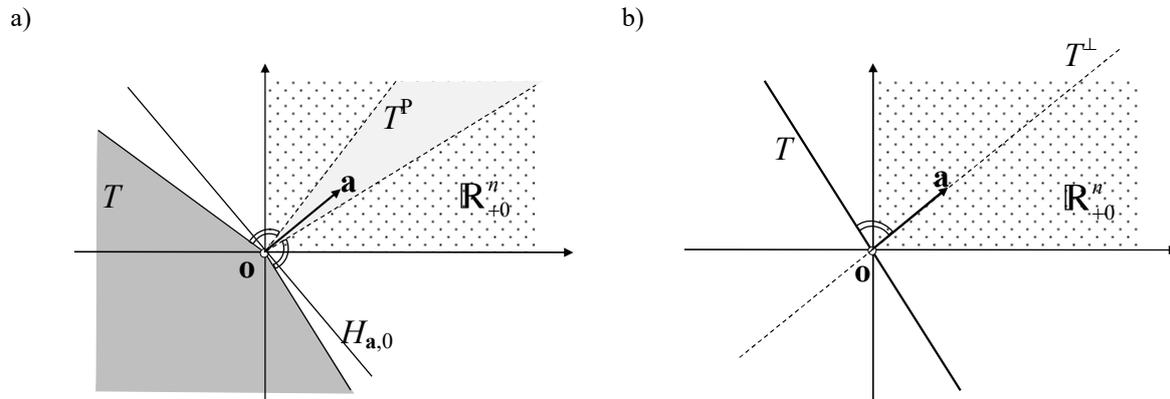


Abb. 4 Ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel T und ein linearer Unterraum T^\perp , die jeweils zum punktierten nichtnegativen Orthanten disjunkt sind, und ein positiver Vektor $\mathbf{a} \in T^\perp$ bzw. T . Der Kegel liegt im Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^\leq$ und der Unterraum in der Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ mit einem positiven Normalenvektor \mathbf{a}

Beweis von Satz 3, Teil a): „ \Leftarrow “: Es gebe ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{a} \in T^\perp$, d. h. $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in T$, und mit $\mathbf{a} > \mathbf{o}$, d. h. $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ mit $a_j > 0$ für $j = 1, \dots, n$.

In der Literatur wird der komponentenweise positive Vektor \mathbf{a} statt positiv auch als strikt positiv (echt positiv) bezeichnet und die Schreibweise $\mathbf{a} \gg \mathbf{o}$ verwendet. Weiter liege \mathbf{y} im punktierten nichtnegativen Orthanten bzw. im schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}_{>0}^n$; es ist also $\mathbf{y} \succ \mathbf{o}$, d. h. $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top \geq \mathbf{o}$ und $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$. Ein Vektor $\mathbf{y} \succ \mathbf{o}$ wird zur Unterscheidung von einem strikt positiven Vektor hier als schwach positiv bezeichnet. Für die Komponenten von \mathbf{y} gilt $y_j \geq 0$ für $j = 1, \dots, n$ und $y_k > 0$ für mindestens einen Index k . Für das Skalarprodukt von \mathbf{a} und \mathbf{y} gilt dann $\mathbf{a}^\top \mathbf{y} = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n \geq a_k y_k > 0$.

Demzufolge gilt $\mathbf{y} \notin T$, so dass der Kegel T und der punktierte nichtnegative Orthant disjunkt sind.

„ \Rightarrow “: Für die umgekehrte Beweisrichtung der Charakterisierung sind die Mengen T und $\mathbb{R}_{>0}^n$ als disjunkt vorausgesetzt und ist die Existenz eines Vektors $\mathbf{a} \in T^\perp \cap \mathbb{R}_+^n$ nachzuweisen. Das Einheitsimplex (Standardsimplex) S des \mathbb{R}^n ,

$$S = \text{conv} \{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \} \\ = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j, y_j \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1 \},$$

ist die konvexe Hülle der n Einheitspunkte $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, die durch die Standardbasisvektoren \mathbf{e}_j gegeben sind:

$$\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top = (\delta_{jk})_{k=1, \dots, n} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

mit dem Kronecker-Symbol δ_{jk} (Kroneckerscher δ -Operator, Kronecker- δ nach dem deutschen Mathematiker Leopold Kronecker, 1823–1891, $\delta_{jk} = 1$ für $k = j$, $\delta_{jk} = 0$ für $k \neq j$). Die Menge S liegt im punktierten nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}_{>0}^n$ und ist daher auch zu T disjunkt. S ist als konvexe Hülle einer nichtleeren Menge ebenfalls nichtleer und auch konvex. Außerdem ist S abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt. Nach Satz 2 c) erhält man die strikte Trennung von S und T durch eine affine Hyperebene $H_{\mathbf{a},\alpha}$ mit einem Normalenvektor $\mathbf{a} \in T^\perp$:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Aus der Trennungungleichung folgt speziell für $\mathbf{x} = \mathbf{o} \in T$ und $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j \in S$ für jedes $j = 1, \dots, n$

$$0 = \mathbf{a}^\top \mathbf{o} < \mathbf{a}^\top \mathbf{e}_j = a_j,$$

also $\mathbf{a} > \mathbf{o}$. Die Positivität des Normalenvektors \mathbf{a} resultiert hier also aus der strikten Trennung des Nullpunkts $\mathbf{o} \in T$ von den n Einheitspunkten $\mathbf{e}_j \in S$.

Wegen $\mathbf{a} \in T^\perp$ liegt der Kegel T in dem abgeschlossenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^\leq$, der den positiven Normalenvektor \mathbf{a} besitzt:

$$T \subseteq H_{\mathbf{a},0}^\leq = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq 0 \} \text{ mit einem } \mathbf{a} > \mathbf{o}.$$

Da für alle schwach positiven \mathbf{y} das Skalarprodukt $\mathbf{a}^\top \mathbf{y}$ positiv ist, liegt der punktierte nichtnegative Orthant ganz

im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$:

$$\mathbb{R}_{>0}^n \subseteq H_{\mathbf{a},0}^> = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} > 0\}.$$

Beweis von Teil b): Im Beweis von Satz 1 c) wurde bereits begründet, dass ein linearer Unterraum T auch ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel ist und dass für einen linearen Unterraum T der Polarkegel T^P gleich dem orthogonalen Komplement T^\perp von U ist. Damit ergibt sich nach Teil a) des vorliegenden Satzes die entsprechende Charakterisierung der Disjunktheit von linearem Unterraum T und punktiertem nichtnegativen Orthanten. Im Falle der Existenz eines $\mathbf{a} \in T^\perp \cap \mathbb{R}_+^n$ liegt jetzt T in der linearen Hyperebene

$$H_{\mathbf{a},0} = [\mathbf{a}]^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = 0\}$$

und $\mathbb{R}_{>0}^n$ im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. \square

Aus Satz 3, Teil b) ergibt sich speziell für eine Hyperebene $T = H_{\mathbf{a},0}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) und das zugehörige orthogonale Komplement $T^\perp = [\mathbf{a}] = \text{lin } \mathbf{a}$ die nachstehende Folgerung.

Zusatz 4 Disjunktheit einer Hyperebene und des schwach positiven Orthanten

Die lineare Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und der schwach positive Orthant $\mathbb{R}_{>0}^n$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen positiven (oder negativen) Normalenvektor \mathbf{a} der Hyperebene gibt. Bei positiv gewähltem Normalenvektor \mathbf{a} der Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ liegt der schwach positive Orthant im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$:

$$\mathbb{R}_{>0}^n \subseteq H_{\mathbf{a},0}^>.$$

In Teil a) von Satz 3 wird ein allgemeiner (nichtleerer) abgeschlossener konvexer Kegel T betrachtet. Dieser lässt sich nach einem Satz der konvexen Geometrie (siehe beispielsweise Jungnickel (2008), S. 35, Korollar 2.3.7; Rockafellar (1970), S. 99, Th.11.5; Stoer und Witzgall (1970), S. 95, Th.3.3.2) wie jede abgeschlossene konvexe Menge T als Durchschnitt aller T umfassenden abgeschlossenen Halbräume H darstellen:

$$T = \bigcap_{\substack{H \supseteq T \\ H \text{ abgeschl. Halbraum}}} H.$$

Wie das folgende Beispiel zeigt, können dabei aber für die Durchschnittsbildung im Allgemeinen unendlich viele Halbräume benötigt werden. Die konvexen Kegel, die als die Durchschnitte *endlich* vieler abgeschlossener affiner Halbräume im \mathbb{R}^n gebildet werden, werden als (konvexe) Polyeder (polyedrische Mengen, Vielflache, Vielflächner, Ebenflächner) bezeichnet und im Abschnitt 3.3 noch weiterbehandelt.

Beispiel 1 Ein konvexer linearer Kegel als Durchschnitt von unendlich vielen Halbräumen

Dass für die Darstellung einer abgeschlossenen konvexen Menge T als Durchschnitt von Halbräumen im Allgemeinen unendlich viele Halbräume benötigt werden, zeigt das Beispiel des abgeschlossenen konvexen linearen Kegels T im Raum \mathbb{R}^3 , den man erhält, wenn man durch jeden Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 1)$ der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe

$$C = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

der Ebene $H_{\mathbf{e}_3,1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$ den vom Nullpunkt ausgehenden Strahl

$$\text{ray } \mathbf{x} = \{\lambda \mathbf{x} : \lambda \geq 0\}$$

legt und T als die Vereinigung dieser Strahlen bildet:

$$T = \bigcup_{\mathbf{x} \in C} \text{ray } \mathbf{x} = \text{ray } C.$$

Für die Durchschnittsbildung werden alle unendlich vielen T umfassenden Halbräume benötigt, die zu den in den Mantellinien des Kegels anliegenden Tangentialebenen gehören. \triangle

Mit dem gleichen Beweisweg wie für den obigen Satz 3 lässt sich der Satz auch noch **verallgemeinern**, indem die Positivität der Komponenten des Vektors $\mathbf{a} \in T^P$ nicht für alle Indizes $j \in I_n := \{1, \dots, n\}$, sondern nur für die Indizes j einer Teilmenge $J \subseteq I_n$ charakterisiert wird. Zur

Formulierung verwendet man als Verallgemeinerung des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ dessen Teilmenge $\mathbb{R}_{\geq 0}^n(J)$, für deren Vektoren \mathbf{x} die Komponenten x_i für die Indizes $i \in I_n \setminus J$ den Wert Null haben, die Komponenten x_j für die restlichen Indizes $j \in J$ nichtnegativ sind und mindestens ein Index $k \in J$ existiert mit $x_k > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{\geq 0}^n(J) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \forall i \in I_n \setminus J, x_j \geq 0 \forall j \in J, \exists k \in J \text{ mit } x_k > 0\} \\ &= \mathbb{R}_{\geq 0}^n \cap \bigcap_{i \in I_n \setminus J} H_{\mathbf{e}_i, 0} \\ &= \{\mathbf{y} = \sum_{j \in J} y_j \mathbf{e}_j : y_j \geq 0\} \setminus \{\mathbf{0}\}. \\ &= \text{cone } \{\mathbf{e}_j : j \in J\} \setminus \{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{R}_{\geq 0}^n(J)$ ist der schwach positive Orthant in dem Teilraum von \mathbb{R}^n , der durch die linearen Gleichungen $x_i = 0$ für die $i \in I_n \setminus J$ beschrieben wird und daher der Durchschnitt der homogenen Hyperebenen $\{x_i = 0\} (i \in I_n \setminus J)$ ist, und auch eine Teilmenge des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ des \mathbb{R}^n . Weiter ist dieser zur Indexmenge J gehörige verallgemeinerte schwach positive Orthant (Abk.: der **J-schwach positive Orthant**) $\mathbb{R}_{\geq 0}^n(J)$ der (im Nullpunkt) punktierte von den speziellen Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_j, j \in J$, aufgespannte konvexe lineare Kegel. Als Spezialfall ergibt sich für $\mathbb{R}_{\geq 0}^n(J)$ mit $J = I_n$ der gesamte schwach positive Orthant $\mathbb{R}_{\geq 0}^n(I_n) = \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ des \mathbb{R}^n .

Weiter definiert man als Verallgemeinerung des positiven Orthanten $\mathbb{R}_{> 0}^n$ in \mathbb{R}^n die umfangreichere Teilmenge

$$\mathbb{R}_{> 0}^n(J) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_j > 0 \forall j \in J\} = \bigcap_{j \in J} H_{\mathbf{e}_j, 0}^>$$

des \mathbb{R}^n als den **J-positiven Orthanten**, bei der jetzt über die Vorzeichen der Komponenten x_i ($i \in I_n \setminus J$) keine Aussage gemacht wird. Als Spezialfall erhält man für $\mathbb{R}_{> 0}^n(J)$ mit $J = I_n$ den (strikt) positiven Orthanten $\mathbb{R}_{> 0}^n(I_n) = \mathbb{R}_{> 0}^n$. Die Menge $\mathbb{R}_{> 0}^n(J)$ ist der punktierte konvexe lineare Kegel zum konvexen linearen Kegel

$$\mathbb{R}_{> 0}^n(J) \cup \{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_j > 0 \forall j \in J \text{ oder } \mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Satz 5 Allgemeinerer Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

Es sei J eine Teilmenge der Indexmenge $I_n = \{1, \dots, n\}$.

- a) Der (nichtleere) abgeschlossene konvexe lineare Kegel $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte konvexe lineare Kegel $\mathbb{R}_{\geq 0}^n(J)$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ im polaren Kegel T^P mit den positiven Komponenten a_j für die Indizes $j \in J$ gibt:

$$T \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^n(J) = \emptyset \iff T^P \cap \mathbb{R}_{> 0}^n(J) \neq \emptyset.$$

In diesem Fall liegt T in abgeschlossenem homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a}, 0}^{\leq}$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}^n(J)$ im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a}, 0}^{>}$ mit Normalenvektor \mathbf{a} .

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Es hat entweder T mit dem punktierten konvexen linearen Kegel $\mathbb{R}_{\geq 0}^n(J)$ einen nichtleeren Durchschnitt oder es besitzt T^P mit dem punktierten konvexen linearen Kegel $\mathbb{R}_{> 0}^n(J)$ einen nichtleeren Durchschnitt. Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

- (1) $T \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) \neq \emptyset;$
 (2) $T^\perp \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) \neq \emptyset.$

b) Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte konvexe lineare Kegel $\mathbb{R}_{>0}^n(J)$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor \mathbf{a} im orthogonalen Komplement T^\perp mit den positiven Komponenten a_j für die Indizes $j \in J$ gibt und somit T in einer homogenen Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und $\mathbb{R}_{>0}^n(J)$ im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$ mit Normalenvektor \mathbf{a} liegt:

$$T \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) = \emptyset \Leftrightarrow T^\perp \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) \neq \emptyset.$$

Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

- (1) $T \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) \neq \emptyset;$
 (2) $T^\perp \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) \neq \emptyset.$

Beweis des allgemeineren Alternativsatzes 5, Teil a): „ \Leftarrow “: Es gebe ein $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{a} \in T^\perp$, d. h. $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in T$, und mit $a_j > 0$ für die Indizes $j \in J \subseteq I_n$. Über die Vorzeichen der Komponenten a_i für $i \in I_n \setminus J$ wird keine Aussage gemacht. Weiter sei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n(J)$, also $y_i = 0$ für $i \in I_n \setminus J$, $y_j \geq 0$ für $j \in J$ und $y_k > 0$ für mindestens ein $k \in J$. Für das Skalarprodukt von \mathbf{a} und \mathbf{y} gilt dann

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{y} = \sum_{i \in I_n} a_i y_i = \sum_{j \in J} a_j y_j \geq a_k y_k > 0.$$

Demzufolge gilt wegen $\mathbf{a} \in T^\perp$ für beliebiges $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n(J)$ also $\mathbf{y} \notin T$, so dass der Kegel T und der punktierte konvexe lineare Kegel $\mathbb{R}_{>0}^n(J)$ disjunkt sind: $T \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) = \emptyset$.

Zweite Begründung für die elementare Beweisrichtung „ \Leftarrow “: Wegen $\mathbf{a} \in T^\perp$ liegt der Kegel T in dem abgeschlossenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^\leq$, der den Normalenvektor \mathbf{a} mit den positiven Komponenten a_j ($j \in J$) besitzt:

$$T \subseteq H_{\mathbf{a},0}^\leq = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq 0\}.$$

Da für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{>0}^n(J)$ wegen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_{>0}^J$ das Skalarprodukt $\mathbf{a}^\top \mathbf{y}$ positiv ist, liegt der punktierte konvexe lineare Kegel $\mathbb{R}_{>0}^n(J)$ ganz im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$:

$$\mathbb{R}_{>0}^n(J) \subseteq H_{\mathbf{a},0}^> = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} > 0\}.$$

Damit folgt die Disjunktheit von T und $\mathbb{R}_{>0}^n(J)$:

$$T \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) \subseteq H_{\mathbf{a},0}^\leq \cap H_{\mathbf{a},0}^> = \emptyset.$$

„ \Rightarrow “: Für die umgekehrte nichtelementare Beweisrichtung der Charakterisierung sind die Mengen T und $\mathbb{R}_{>0}^J$ als disjunkt vorausgesetzt und ist die Existenz eines Vektors $\mathbf{a} \in T^\perp \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J)$ nachzuweisen. Das Simplex

$$S = \text{conv} \{\mathbf{e}_j : j \in J\} = \{\mathbf{y} = \sum_{j \in J} y_j \mathbf{e}_j : y_j \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1\},$$

ist die konvexe Hülle der $|J|$ Einheitspunkte $\mathbf{e}_j, j \in J$. Die Menge S liegt im konvexen linearen Kegel

$$\text{cone} \{\mathbf{e}_j : j \in J\} = \{\mathbf{y} = \sum_{j \in J} y_j \mathbf{e}_j : y_j \geq 0\}$$

und enthält wegen der linearen Unabhängigkeit seines Erzeugendensystems $\{\mathbf{e}_j : j \in J\}$ (als Teilmenge der Basis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ von \mathbb{R}^n) nicht den Nullpunkt \mathbf{o} . Daher liegt S im punktierten konvexen linearen Kegel $\mathbb{R}_{>0}^J$ und ist dann auch zu T disjunkt. S ist als konvexe Hülle einer nichtleeren Menge ebenfalls nichtleer und auch konvex. Außerdem ist S abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt. Nach Satz 2 c) erhält man die strikte Trennung von S und T durch eine affine Hyperebene $H_{\mathbf{a},\alpha}$ mit einem Normalenvektor $\mathbf{a} \in T^\perp$ und einem $\alpha > 0$:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^\top \mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Aus der Trennungsgleichung folgt speziell für $\mathbf{x} = \mathbf{o} \in T$ und $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j \in S$ für jedes $j \in J$

$$0 = \mathbf{a}^\top \mathbf{o} < \mathbf{a}^\top \mathbf{e}_j = a_j.$$

Die Inzidenz $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_{>0}^n(J)$, d. h. die Positivität der speziellen Komponenten a_j ($j \in J$) des Normalenvektors \mathbf{a} , resultiert hier also aus der strikten Trennung des Nullpunkts $\mathbf{o} \in T$ von den $|J|$ Einheitspunkten $\mathbf{e}_j \in S$ mit $j \in J$.

Weiterer Beweis von Satz 5, a: Der Satz 5 kann auch durch Rückführung auf Satz 3 bewiesen werden. Dazu verwendet man als Hilfsraum einen d -dimensionalen linearen Unterraum \mathbb{R}^d ($d = |J|$) von \mathbb{R}^n , der isomorph zu \mathbb{R}^d ist:

$$\mathbb{R}^d := \bigcap_{i \in I_n \setminus J} H_{e_i, 0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \forall i \in I_n \setminus J\}.$$

Für die darin liegenden abgeschlossenen konvexen linearen Kegel $T^d := T \cap \mathbb{R}^d$ und $T^{Pd} := T^P \cap \mathbb{R}^d$ gilt $T^{Pd} = (T^d)^P$:

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} T^{Pd} &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}^T \mathbf{x} \leq 0 \forall \mathbf{x} \in T\} \cap \mathbb{R}^d \\ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \sum_{j \in J} z_j x_j \leq 0 \forall \mathbf{x} \in T\} \\ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \sum_{j \in J} z_j u_j \leq 0 \forall \mathbf{u} \in T^d\} \\ &= (T^d)^P. \end{aligned}$$

Weiter gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} T \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) = \emptyset &\Leftrightarrow T^d \cap \mathbb{R}_{>0}^d = \emptyset, \\ T^P \cap \mathbb{R}_{>0}^n(J) \neq \emptyset &\Leftrightarrow T^{Pd} \cap \mathbb{R}_{>0}^d \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Durch die Anwendung des Alternativsatzes 3 auf die abgeschlossenen konvexen linearen Kegel T^d und $T^{Pd} = (T^d)^P$ in \mathbb{R}^d erhält man dann die Aussage von Satz 5a.

Beweis von Satz 5, Teil b): Im Beweis von Satz 1 c) wurde bereits begründet, dass ein linearer Unterraum T auch ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel ist und dass für einen linearen Unterraum T der Polarkegel T^P gleich dem orthogonalen Komplement T^\perp von T ist. Damit ergibt sich nach Teil a) des vorliegenden Satzes die entsprechende Charakterisierung der Disjunktheit eines linearen Unterraums T und des punktierten konvexen linearen Kegels $\mathbb{R}_{>0}^n(J)$. Im Falle der Existenz eines $\mathbf{a} \in T^\perp$ mit $a_j > 0$ für $j \in J$ liegt jetzt T in der linearen Hyperebene

$$H_{\mathbf{a}, 0} = [\mathbf{a}]^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = 0\}$$

und $\mathbb{R}_{>0}^n(J)$ im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a}, 0}^>$. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. \square

Aus Satz 5 ergeben sich als **Spezialfälle** mit $J = I_n$ der obige **Satz 3** und mit $J = \{1\}$ der nachfolgende **Satz 6**. Im Falle $J = \{1\}$ von Satz 6 ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{>0}^n(J) &= \text{cone } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{0}\} = \text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{0}\} \text{ und} \\ \mathbb{R}_{>0}^n(J) &= H_{\mathbf{e}_1, 0}^> = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\} =: \{x_1 > 0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung 5 gibt eine grafische Darstellung der in Satz 6 beschriebenen geometrischen Situation. Bei der zweidimensionalen Darstellung trifft die Gerade T den punktierten Strahl $E_{>0} = \text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$ genau dann nicht, wenn sie einen Normalenvektor in der rechten Halbebene $\{x_1 > 0\}$ besitzt.

Für Satz 6 wird nachfolgend noch ein **einfacher elementarer Beweis** mittels der Eigenschaften des polaren Kegels bzw. des orthogonalen Komplements angegeben.

Der Satz 3 b) liefert eine schöne Anwendung in der zeitdiskreten Finanzmathematik, wo er für das Mehrperiodenmodell unmittelbar die Äquivalenz der Arbitragefreiheit, also der Disjunktheit des Unterraums T der Kapitalmarktgeschäfte zum schwach positiven Orthanten, zur Existenz eines positiven Preisvektors bzw. Diskontierungsprozesses in T^\perp besagt.

Der Satz 6 b) liefert für das Mehrperiodenmodell einen Beweis für die Äquivalenz des Law of One Price (LOP) zur Existenz eines Bewertungsvektors bzw. Bewertungsprozesses in $T^\perp \cap \{x_1 = 1\}$. Beim letzten Beweis wird verwendet, dass das LOP äquivalent ist zu $T \cap \text{lin } \mathbf{e}_1 = O = \{\mathbf{0}\}$ bzw. zu $T \cap \text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{0}\} = \emptyset$ und dass $T^\perp \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset$ gleichbedeutend zu $T^\perp \cap \{x_1 = 1\} \neq \emptyset$ ist.

Satz 6 Speziellerer Alternativsatz zur Disjunktheit eines abgeschlossenen konvexen Kegels und des punktierten Strahls des ersten Standardbasisvektors

- a) Der (nichtleere) abgeschlossene konvexe lineare Kegel $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte Strahl $\text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{0}\}$ des ersten Standardbasisvektors $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ sind genau dann

disjunkt, wenn es einen Vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ im polaren Kegel T^P von T mit einer positiven ersten Komponente a_1 gibt:

$$T \cap \text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} = \emptyset \iff T^P \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset.$$

In diesem Fall liegt T im abgeschlossenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^\leq$ und $\text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$ mit Normalenvektor \mathbf{a} .

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Es hat entweder T mit dem punktierten Strahl $\text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ einen nichtleeren Durchschnitt oder es besitzt T^P mit dem offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{e}_1,0}^>$ einen nichtleeren Durchschnitt. Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

$$(1) \quad T \cap \text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} \neq \emptyset;$$

$$(2) \quad T^P \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset.$$

b) Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte Strahl $\text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ im orthogonalen Komplement T^\perp mit der positiven ersten Komponente a_1 gibt:

$$T \cap \text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} = \emptyset \iff T^\perp \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset.$$

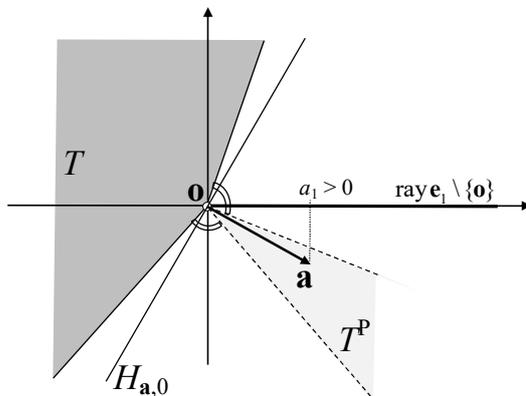
In diesem Fall liegt T in der homogenen Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und $\text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ im offenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{a},0}^>$ mit Normalenvektor \mathbf{a} .

Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

$$(1) \quad T \cap \text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} \neq \emptyset;$$

$$(2) \quad T^\perp \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset.$$

a)



b)

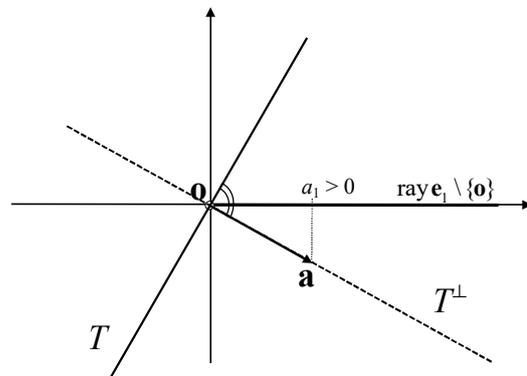


Abb. 5 Ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel T und ein linearer Unterraum T , die jeweils zum punktierten Strahl $\text{ray } \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ des ersten Standardbasisvektors \mathbf{e}_1 disjunkt ist, und ein in der ersten Komponente positiver Vektor \mathbf{a} im polaren Kegel T^P bzw. im orthogonalen Komplement T^\perp von T

Einfacher elementarer Beweis von Satz 6, Teil a) mittels der Eigenschaften des polaren Kegels: Es wird die äquivalente Aussage $[T \cap E_{\geq 0} \neq \emptyset \iff T^P \cap \{x_1 > 0\} = \emptyset]$ begründet. Neben T ist hier auch $E_{\geq 0} := \text{ray } \mathbf{e}_1 = \text{cone } \mathbf{e}_1 = \{\lambda \mathbf{e}_1 : \lambda \geq 0\}$ ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel. Es ist

$$T \cap E_{\geq 0} \neq \emptyset,$$

d. h. $\lambda \mathbf{e}_1 \in T$ für zumindest ein $\lambda > 0$, gleichbedeutend dazu, dass $\mu \mathbf{e}_1 \in T \forall \mu \geq 0$ ist, also die Inklusion

$$E_{\geq 0} \subseteq T$$

gilt. Mit den Eigenschaften des polaren Kegels⁴ ist dies wiederum äquivalent zur Inklusion

$$T^P \subseteq E_{\geq 0}^P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda x_1 = \mathbf{x}^\top \lambda \mathbf{e}_1 \leq 0 \forall \lambda \geq 0\} = \{x_1 \leq 0\}$$

⁴ Von den Eigenschaften des polaren Kegels wird hier verwendet, dass für eine beliebige Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ der polare Kegel A^P von A ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel ist. Für (nichtleere) abgeschlossene konvexe lineare Kegel $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt die involutorische (selbstinverse) Eigenschaft $A^{PP} = A$ und die Aussage $[A \subseteq B \implies A^P \supseteq B^P]$. Für einen linearen Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $A^P = A^\perp$. Literatur zum polaren Kegel: Jarre u. Stoer (2004), S. 216, Satz 7.3.2.

und zu

$$T^P \cap \{x_1 > 0\} = \emptyset.$$

Der Beweis von b) ergibt sich aus a), da für einen linearen Unterraum T der polare Kegel T^P mit dem orthogonalen Komplement T^\perp übereinstimmt. Es wird jetzt aber auch noch ein ausführlicher Beweis mittels der Eigenschaften des orthogonalen Komplements angegeben. Neben T ist auch $E := \text{lin } \mathbf{e}_1 = \{\lambda \mathbf{e}_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein linearer Unterraum. Es wird die äquivalente Aussage $[T \cap E_{\geq 0} \neq O \Leftrightarrow T^\perp \cap \{x_1 > 0\} = \emptyset]$ begründet. Es ist

$$T \cap E_{\geq 0} \neq O$$

äquivalent zu $\lambda \mathbf{e}_1 \in T$ für ein $\lambda > 0$, zu $\lambda \mathbf{e}_1 \in T$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zu $T \cap E \neq O$ und zu $E \subseteq T$.

Mit den Eigenschaften des orthogonalen Komplements⁵ ist dies wiederum äquivalent zu

$$T^\perp \subseteq E^\perp = \{\mathbf{e}_1\}^\perp = \{x_1 = 0\},$$

also zu $T^\perp \cap \{x_1 \neq 0\} = \emptyset$ und zu

$$T^\perp \cap \{x_1 > 0\} = \emptyset. \quad \square$$

Bevor nun der Zusammenhang des obigen Alternativsatzes 3 für konvexe lineare Kegel mit Alternativsätzen über lineare Ungleichungssysteme aufgezeigt wird, erfolgt zuerst die Bereitstellung der verschiedenen Hüllen-Definitionen und des Polyederdarstellungssatzes.

3.2 Verschiedene Hüllen einer Menge

Es werden jetzt nachfolgend Definitionen und Charakterisierungen für verschiedene Hüllen einer Menge des \mathbb{R}^n angegeben, nämlich für die konische, lineare, konvexe, affine Hülle und die Kegelhülle.

- Die **konische Hülle** (konvexe Kegelhülle) $\text{cone } S$ einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden konvexen linearen Kegel des \mathbb{R}^n und damit als der kleinste S umfassende konvexe lineare Kegel:

$$\text{cone } S = \bigcap_{\substack{C \supseteq S, \\ C \text{ konvexer Kegel}}} C.$$

Dabei heißt eine nichtleere Teilmenge C von \mathbb{R}^n ($\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$) ein **konvexer linearer Kegel**, wenn sie eine konvexe Menge und ein linearer Kegel ist, also abgeschlossen bezüglich der Konvexkombination und der nichtnegativen Skalarmultiplikation und somit abgeschlossen bezüglich der Konuskombination ist. Da der Nullraum $O = \{\mathbf{o}\}$ des Vektorraums \mathbb{R}^n ein konvexer linearer Kegel ist und $\emptyset \subseteq O \subseteq C$ für jeden konvexen linearen Kegel C gilt, ergibt sich für die konische Hülle der leeren Menge:

$$\text{cone } \emptyset = O.$$

Wegen $\emptyset \subseteq S$ ist $O = \text{cone } \emptyset \subseteq \text{cone } S$, also stets $\mathbf{o} \in \text{cone } S$ und $\text{cone } S \neq \emptyset$. Falls $S \neq \emptyset$ ist, kann $\text{cone } S$ charakterisiert werden als die Menge aller nichtnegativen Linearkombinationen (Nichtnegativkombinationen, konischen Kombinationen, Konuskombinationen) von endlich vielen Elementen von S :

$$\text{cone } S = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{s}_i : \exists k \in \mathbb{N}, \mathbf{s}_i \in S, \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, k \right\}.$$

Der aus $S \neq \emptyset$ durch alle konischen Kombinationen erzeugte konvexe lineare Kegel $\text{cone } S$ ist zu unterscheiden von dem nur durch alle nichtnegativen Vielfachen erzeugten linearen Kegel, der Kegelhülle von S :

$$\text{ray } S = \{ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{s} : \mathbf{s} \in S, \lambda \geq 0 \} = \bigcup_{\mathbf{s} \in S} \text{ray } \mathbf{s}.$$

- Die **Kegelhülle** $\text{ray } S$ einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$: Für eine beliebige (evtl. auch leere) Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Kegelhülle $\text{ray } S$ definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden linearen Kegel K des \mathbb{R}^n und damit als der kleinste S umfassende lineare Kegel:

$$\text{ray } S = \bigcap_{\substack{K \supseteq S, \\ K \text{ linearer Kegel}}} K.$$

Dabei heißt eine nichtleere Teilmenge K von \mathbb{R}^n ($\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$) ein **linearer Kegel**, wenn sie abgeschlossen

⁵ Von den Eigenschaften des orthogonalen Komplements wird hier verwendet, dass für eine beliebige Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ das orthogonale Komplement A^\perp ein linearer Unterraum ist und mit $(\text{lin } A)^\perp$ übereinstimmt. Für Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $[A \subseteq B \Rightarrow A^\perp \supseteq B^\perp]$. Bei einem (endlichdimensionalen) Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt für das orthogonale Komplement A^\perp die involutorische Eigenschaft $A^{\perp\perp} = A$, wobei die endliche Dimension von A für die Inklusion $A^{\perp\perp} \subseteq A$ benötigt wird. Literatur zum orthogonalen Komplement: Kowalsky (1967), S. 133–135.

bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation. Da ein $\mathbf{x} \in K$ existiert, gilt stets $\mathbf{o} = 0 \cdot \mathbf{x} \in K$. Da der Nullraum $O = \{\mathbf{o}\}$ des Vektorraums \mathbb{R}^n ein linearer Kegel ist und $\emptyset \subseteq O \subseteq K$ für jeden linearen Kegel K gilt, ergibt sich für die Kegelhülle der leeren Menge:

$$\text{ray } \emptyset = O.$$

Wegen $\emptyset \subseteq S$ ist $O = \text{ray } \emptyset \subseteq \text{ray } S$, also stets $\mathbf{o} \in \text{ray } S$ und $\text{ray } S \neq \emptyset$. Weiter gilt $\text{cone } S = \text{conv}(\text{ray } S) = \text{ray}(\text{conv } S)$.

- Die **lineare Hülle** (das Erzeugnis) $\text{lin } S$ einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wird definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden linearen Unterräume des \mathbb{R}^n und somit als der kleinste S umfassende lineare Unterraum:

$$\text{lin } S = \bigcap_{\substack{U \supseteq S, \\ U \text{ linearer Unterraum}}} U.$$

Dabei heißt eine nichtleere Teilmenge U von \mathbb{R}^n ($\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$) ein **linearer Unterraum** (Untervektorraum, Vektorunterraum) von \mathbb{R}^n , wenn sie bezüglich der Addition und der Skalarmultiplikation, also insgesamt bezüglich der Linearkombination abgeschlossen ist. Da $O = \{\mathbf{o}\}$ ein linearer Unterraum des \mathbb{R}^n ist und $\emptyset \subseteq O \subseteq U$ für jeden linearen Unterraum U des \mathbb{R}^n gilt, ergibt sich für die lineare Hülle der leeren Menge:

$$\text{lin } \emptyset = O.$$

Wegen $\emptyset \subseteq S$ ist $O = \text{lin } \emptyset \subseteq \text{lin } S$, also stets $\mathbf{o} \in \text{lin } S$ und $\text{lin } S \neq \emptyset$. Falls $S \neq \emptyset$ ist, kann $\text{lin } S$ charakterisiert werden als die Menge aller reellen Linearkombinationen (linearen Kombinationen) von endlich vielen Elementen von S :

$$\text{lin } S = \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{s}_i : \exists k \in \mathbb{N}, \mathbf{s}_i \in S \text{ für } i = 1, \dots, k \right\}.$$

- Die **konvexe Hülle** $\text{conv } S$ einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wird definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n , damit als die kleinste S umfassende konvexe Menge, bzw. gleichbedeutend dazu als die Menge aller nichtnegativen Linearkombinationen mit Koeffizientensumme Eins (konvexen Kombinationen, Konvexkombinationen) von endlich vielen Elementen von S :

$$\begin{aligned} \text{conv } S &= \bigcap_{\substack{C \supseteq S, \\ C \text{ konvex}}} C \\ &= \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{s}_i : \exists k \in \mathbb{N}, \mathbf{s}_i \in S, \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dabei heißt eine Teilmenge C von \mathbb{R}^n **konvex**, wenn sie abgeschlossen bezüglich der Konvexkombination ist. Da auch die leere Menge \emptyset eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n ist und $\emptyset \subseteq C$ für jede konvexe Teilmenge C des \mathbb{R}^n gilt, ergibt sich für die konvexe Hülle der leeren Menge:

$$\text{conv } \emptyset = \emptyset.$$

- Die **affine Hülle** $\text{aff } S$ einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wird definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden affinen Unterräume des \mathbb{R}^n , damit als der kleinste S umfassende affine Unterraum, bzw. gleichbedeutend dazu als die Menge aller reellen Linearkombinationen mit Koeffizientensumme Eins (affinen Kombinationen, Affinkombinationen) von endlich vielen Elementen von S :

$$\begin{aligned} \text{aff } S &= \bigcap_{\substack{M \supseteq S, \\ M \text{ affiner Unterraum}}} M \\ &= \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{s}_i : \exists k \in \mathbb{N}, \mathbf{s}_i \in S \text{ für } i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n ein **affiner Unterraum** von \mathbb{R}^n , wenn sie bezüglich der Affinkombination abgeschlossen ist. Da auch die leere Menge \emptyset ein affiner Unterraum des \mathbb{R}^n ist und $\emptyset \subseteq M$ für jeden affinen Unterraum M des \mathbb{R}^n gilt, ergibt sich für die affine Hülle der leeren Menge:

$$\text{aff } \emptyset = \emptyset.$$

Literatur zu den Definitionen der Hüllen:

Jungnickel (2008), S. 25, 261, 263;

Jarre und Stoer (2004), S. 205, 207, 216;

Borgwardt (2001), S. 14f.;

Stoer und Witzgall (1970), S. 31f.;

Rockafellar (1970), S. 6, 12, 14.

3.3 Polyederdarstellungssatz

Allgemein besagt der Polyederdarstellungssatz von Weyl-Minkowski (siehe beispielsweise Jungnickel (2008), S. 72, Satz 2.9.7 speziell für $X = \emptyset, Y \neq \emptyset, P = \text{cone } Y$; Borgwardt (2001), S. 51–55, Sätze 4.1, 4.2, 4.4, 4.5; Faigle (2006), S. 23, Satz 2.1 und (2009), S. 50, Satz 3.1), dass die (konvexen) Polyeder (polyedrischen Mengen, Vielfläche, Vielflächner, Ebenflächner)

$$P = P(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

im \mathbb{R}^n als die Durchschnitte endlich vieler abgeschlossener affiner Halbräume

$$P(\mathbf{a}_i^\top, b_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i\}, \quad \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m,$$

genau die Mengen mit einem endlichen Erzeugendensystem (X, Y) sind. Der Polyederdarstellungssatz ist benannt nach dem deutschen Mathematiker, Physiker und Philosophen Hermann K. H. Weyl (1885–1955) und dem deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (1864–1909).

Polyederdarstellungssatz von Weyl-Minkowski:

Zum konvexen Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es zwei endliche Teilmengen X und Y des \mathbb{R}^n mit

- | | |
|--|---|
| 1) $P = \text{conv } X + \text{cone } Y,$ | falls $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset,$ |
| 2) $P = \text{conv } X$ (Polytop), | falls $X \neq \emptyset, Y = \emptyset,$ |
| 3) $P = \text{cone } Y$ (polyedrischer Kegel), | falls $X = \emptyset, Y \neq \emptyset,$ |
| 4) $P = \emptyset,$ | falls $X = Y = \emptyset.$ |

Die dabei in 1) verwendete Minkowski-Summe zweier Mengen $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$S + T := \{\mathbf{s} + \mathbf{t} : \exists \mathbf{s} \in S, \mathbf{t} \in T\}.$$

Der Fall 4) des leeren Polyeders ($\text{conv } \emptyset + \text{cone } \emptyset = \emptyset + O = \emptyset$) und der Fall 2) des konvexen Polytops (beschränktes Polyeder; $\text{conv } X + \text{cone } \emptyset = \text{conv } X + O = \text{conv } X$) ordnen sich in die Darstellungsformel von Fall 1) ein. Im Fall 3) wird jedoch die extra angegebene Darstellungsformel für den polyedrischen linearen Kegel benötigt, da $\text{conv } \emptyset + \text{cone } Y = \emptyset + \text{cone } Y = \emptyset \neq \text{cone } Y (\supseteq O)$. Die Formel 3) ist ein Spezialfall der Formel 1) nur für den Fall $X = O = \{\mathbf{o}\}$: $\text{conv } O + \text{cone } Y = O + \text{cone } Y = \text{cone } Y$.

Die Polytope, die hier als beschränkte (konvexe) Polyeder auftreten, sind stets konvex. Davon zu unterscheiden sind die allgemeinen Polytope, die als (im Allgemeinen nichtkonvexe) Vereinigungen von konvexen Polytopen definiert sind (Aigner und Ziegler (2004), S. 58).

Neben der additiven Zerlegung (Dekomposition)

$$P = Q + C$$

eines nichtleeren Polyeders P in ein Polytop

$$Q = \text{conv } X$$

und einen konvexen linearen Kegel

$$C = \text{cone } Y$$

(im Fall 3) setzt man hier $Q = O = \{\mathbf{o}\}$) wird für den Kegel C eine weitere additive Zerlegung in den linearen Unterraum

$$L := C \cap (-C),$$

den sogenannten Linienraum von C , und den spitzen konvexen linearen Kegel

$$K := C \cap L^\perp$$

($K \cap (-K) = C \cap L^\perp \cap (-C) \cap L^\perp = L \cap L^\perp = O \Rightarrow K$ spitz) angegeben:

$$C = K \oplus L.$$

Für ein nichtleeres Polyeder P erhält man daher die Zerlegung

$$P = Q + C = Q + (K \oplus L)$$

mit einem Polytop Q , dem Rezessionskegel $C = P_\infty$ von P , dem Linienraum L von C und dem spitzen konvexen linearen Kegel K . Der Rezessionskegel P_∞ des Polyeders $P = P(A, \mathbf{b})$ ist der Kegel der freien Richtungen von P und gegeben durch $P(A, \mathbf{o})$. $P(A, \mathbf{o})$ wird auch als Rezessionskegel der Matrix A bezeichnet.

Literatur zur Zerlegung eines Polyeders in ein Polytop, einen linearen Unterraum und einen spitzen konvexen Kegel:

Borgwardt (2001), S. 58;

Jungnickel (2008), S. 74.

Neben der sogenannten äußeren Beschreibung (external representation nach Rockafellar (1970), S. 11, 170) eines Polyeders P , bei der die Menge P im \mathbb{R}^n von außen betrachtet wird und algebraisch als Lösungsmenge eines endlichen linearen Ungleichungssystems bzw. geometrisch als Durchschnitt endlich vieler Halbräume eingegrenzt wird, hat man also noch eine sogenannte innere Beschreibung (internal representation nach Rockafellar (1970),

S. 170, 153ff., 60ff.), bei der die Menge von innen betrachtet wird und mittels einer Parameterdarstellung mit Punkten der Menge aufgespannt wird.

Im Spezialfall eines affinen Unterraums bzw. linearen Unterraums $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dieser einerseits die Lösungsmenge eines endlichen inhomogenen bzw. homogenen linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bzw. der Durchschnitt endlich vieler Hyperebenen und andererseits die affine Hülle von $m + 1$ affin unabhängigen Punkten $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ ($m = \dim M$):

$$\begin{aligned} M &= \text{aff} \{ \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \} \\ &= \mathbf{x}_0 + L \\ &= \mathbf{x}_0 + \text{lin} \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \} \\ &= \text{conv} \{ \mathbf{x}_0 \} + \text{cone} \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, -\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_m \} \end{aligned}$$

mit dem linearen Unterraum

$$L = M - M = \text{aff} \{ \mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \} = \text{lin} \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \}$$

und der Basis $\mathbf{v}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0, j = 1, \dots, m$, von L . Ein linearer Unterraum M liegt genau dann vor, wenn $\mathbf{0} \in M$ gilt, somit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ gewählt werden kann und M eine lineare Hülle ist:

$$M = L = \text{lin} \{ \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \}.$$

Ausführlichere Betrachtungen zu den beiden Darstellungsweisen für einen affinen bzw. linearen Unterraum findet man z. B. bei Rockafellar (1970), S. 4–7, und Jungnickel (2008), S. 262f.

3.4 Zusammenhang der Alternativsätze für konvexe lineare Kegel mit Alternativsätzen über lineare Ungleichungssysteme

Beschränkt man sich nun in Satz 3, Teil a) auf abgeschlossene konvexe lineare Kegel T , die als Durchschnitt von *endlich* vielen homogenen Halbräumen gebildet werden, also auf **polyedrische Kegel**, so kann dessen Aussage in einen Alternativsatz über die Lösbarkeit endlicher linearer Ungleichungssysteme umformuliert werden. Ebenso liefert Teil b) des Satzes einen entsprechenden Alternativsatz, da ein linearer Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ stets als Durchschnitt endlich vieler linearer Hyperebenen bzw. als Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems und auch als lineare Hülle einer Basis von T dargestellt werden kann.

Nach dem Polyederdarstellungssatz von Weyl-Minkowski ist nun T genau dann ein polyedrischer Kegel im \mathbb{R}^n ,

$$T = P(Z, \mathbf{0}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : Z\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \} \quad (Z \in \mathbb{R}^{m \times n}),$$

wenn T ein endlich erzeugter linearer Kegel ist, also die konische Hülle einer endlichen Menge $L = \{ \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m \} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist:

$$T = \text{cone } L = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{c}_i, \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, m \}.$$

Die endliche Menge L ist ein Erzeugendensystem des konvexen linearen Kegels T .

Die Aussage von Satz 3, Teil a) für den Spezialfall eines polyedrischen bzw. endlich erzeugten Kegels

$$T = P(Z, \mathbf{0}) = \text{cone } L \text{ mit } L = \{ \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

wird jetzt in eine Aussage über lineare Ungleichungssysteme umformuliert. Es wird dazu die innere Beschreibung von T verwendet. Bezeichnet man die mit den Vektoren $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$ der Menge L als Spaltenvektoren gebildete Matrix ebenfalls mit L ,

$$L = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m) \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

so ist der polyedrische Kegel T das Bild des nichtnegativen Orthanten \mathbb{R}_{+0}^m bei der durch die Matrix L vermittelten linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $L(\mathbf{z}) = L\mathbf{z}$ für $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_{+0}^m$:

$$T = \text{cone } L = L(\mathbb{R}_{+0}^m) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = L\mathbf{z}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \}.$$

Es kann hier für drei verschiedene mathematische Objekte dieselbe Bezeichnung L verwendet werden, da aus dem Zusammenhang hervorgeht, ob jeweils die Menge, die Matrix oder die Abbildung gemeint ist.

Für den zu T polaren Kegel $T^P = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{o} \text{ für alle } \mathbf{y} \in T\}$ gilt

$$T^P = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T L \leq \mathbf{o}\}:$$

Es ist nämlich genau dann $\mathbf{v} \in T^P$, wenn $\mathbf{v}^T \mathbf{y} \leq 0$ ist für alle $\mathbf{y} = L\mathbf{z}$ mit $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$. Speziell mit den Standardbasisvektoren $\mathbf{z} = \mathbf{e}_j$ des \mathbb{R}^m folgt daraus $\mathbf{v}^T \mathbf{c}_j = \mathbf{v}^T L \mathbf{e}_j \leq 0$ ($j = 1, \dots, m$) und damit $\mathbf{v}^T L \leq \mathbf{o}$. Umgekehrt folgt aus $\mathbf{v}^T L \leq \mathbf{o}$ auch für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$ die Ungleichung $\mathbf{v}^T L\mathbf{z} \leq 0$ bzw. für alle $\mathbf{y} = L\mathbf{z} \in T$ die Ungleichung $\mathbf{v}^T \mathbf{y} \leq 0$ und somit $\mathbf{v} \in T^P$.

Die Aussage

$$(1) \quad T \cap \mathbb{R}_{+0}^n \neq \emptyset$$

ist dann gleichbedeutend dazu, dass ein $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$(1') \quad L\mathbf{z} \succ \mathbf{o} \text{ und } \mathbf{z} \geq \mathbf{o}.$$

Die Aussage

$$(2) \quad T^P \cap \mathbb{R}_{+0}^n \neq \emptyset$$

ist gleichbedeutend dazu, dass ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$(2') \quad \mathbf{v}^T L \leq \mathbf{o} \text{ und } \mathbf{v} > \mathbf{o}.$$

Nach diesen Vorüberlegungen ergibt sich schon der Teil a) des nachfolgenden Zusatzes 7, nach dem genau eines der beiden angegebenen Ungleichungssysteme (1') oder (2') lösbar ist. Dieser Teil a) von Zusatz 7 ist ein homogener Spezialfall des bei Jungnickel (2008), S. 44, angegebenen Korollars 2.4.11 (mit $A = -E$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Einheitsmatrix, $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, $B = L^T$, $\mathbf{b} = \mathbf{o}$).

In **Teil b)** von Satz 3 wird als ein spezieller (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel ein **linearer Unterraum** T von \mathbb{R}^n und das zugehörige orthogonale Komplement T^\perp betrachtet. Um die Aussage von Teil b) über die alternative Disjunktheit von Mengen für den Spezialfall eines linearen Unterraums T jetzt in die Sprache von linearen Ungleichungssystemen zu übersetzen, wird wieder die innere Beschreibung von T verwendet. Die linearen Unterräume $T \subseteq \mathbb{R}^n$ sind genau die Teilmengen des \mathbb{R}^n , die jeweils die lineare Hülle eines endlichen Erzeugendensystems $L = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\} \subseteq T$, $m \geq \dim T$, sind. Mit der endlichen Menge $L \subseteq T$ bzw. mit der Matrix $L = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ bzw. der Abbildung $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt also für den linearen Unterraum

$$\begin{aligned} T &= \text{lin } L = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = L\mathbf{z}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m\} \\ &= L(\mathbb{R}^m) =: \text{Bild}(L) =: \text{Im } L. \end{aligned}$$

Der Unterraum T ist der von den Spalten \mathbf{c}_j der Matrix L aufgespannte sogenannte Spaltenraum der Matrix und der Bildraum (das Bild, englisch: image) $\text{Im } L$ der linearen Abbildung (des Vektorraumhomomorphismus) $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für das zu T gehörige orthogonale Komplement gilt

$$\begin{aligned} T^\perp &= (\text{lin } L)^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T L\mathbf{z} = 0 \text{ für alle } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T L = \mathbf{o}\}. \end{aligned}$$

Die Aussage

$$(1) \quad T \cap \mathbb{R}_{+0}^n \neq \emptyset$$

ist dann gleichbedeutend dazu, dass ein $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$(1') \quad L\mathbf{z} \succ \mathbf{o};$$

die Aussage

$$(2) \quad T^\perp \cap \mathbb{R}_{+0}^n \neq \emptyset$$

ist gleichbedeutend dazu, dass ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$(2') \quad \mathbf{v}^T L = \mathbf{o} \text{ und } \mathbf{v} > \mathbf{o}.$$

Aus diesen Vorüberlegungen ergibt sich auch Teil b) des nachfolgenden Zusatzes, der als Satz von Stiemke (1892–1915) bezeichnet wird und in engem Zusammenhang mit dem Minkowski-Farkas-Lemma steht.

Literatur: Beweise des Satzes von Stiemke findet man beispielsweise auch bei Stoer und Witzgall (1970), S. 24, Borgwardt (2001), S. 23, und Jungnickel (2008), S. 42f. Bei Jungnickel

wird der Satz von Stiemke aus dem Satz von Motzkin (1908–1970) und dieser wiederum aus dem Minkowski-Farkas-Lemma hergeleitet. Dieses Lemma wurde unabhängig voneinander 1902 vom ungarischen Physiker und Mathematiker Julius (Gyula) Farkas (1847–1930) und vom deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (1864–1909) bewiesen. Verschiedene Beweise des Lemmas findet man beispielsweise bei Rockafellar (1970), S. 200, Corollary 22.3.1, Stoer und Witzgall (1970), S. 55, Theorem (2.8.5), Borgwardt (2001), S. 18–21, Satz 2.3 und Jungnickel (2008), S. 39f, Satz 2.4.2.

Zusatz 7 Alternativsatz über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen

Es sei die Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gegeben.

a) Von den beiden folgenden Ungleichungssystemen ist dann entweder (1′) oder (2′) lösbar:

$$(1′) \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m: \quad L\mathbf{z} \succ \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0};$$

$$(2′) \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n: \quad \mathbf{v}^T L \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{0}.$$

b) **Satz der Alternativen von Erich Stiemke (1915):** Von den beiden folgenden Ungleichungssystemen ist dann entweder (1′) oder (2′) lösbar:

$$(1′) \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m: \quad L\mathbf{z} \succ \mathbf{0};$$

$$(2′) \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n: \quad \mathbf{v}^T L = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} > \mathbf{0}.$$

Um einen Vergleich des Alternativsatzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma anzustellen, werden die im Zusatz 7 b), der homogenen Version des Satzes von Stiemke, auftretenden homogenen Ungleichungssysteme mittels einer Variablentransformation in äquivalente Ungleichungssysteme umgeformt, von denen mindestens eines inhomogen ist. Mit den Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^T \\ -A^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$L^T = (\mathbf{b}, -A)$$

und den Variablen

$$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{v} = (1, \mathbf{x})^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

ergibt sich aus Zusatz 7 der nachfolgende Zusatz 8 über inhomogene lineare Ungleichungssysteme. Umgekehrt erhält man aus dem nachfolgenden Zusatz speziell mit $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $A = -L^T$, $-A^T = L$ und $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ wieder den vorigen Zusatz über die homogenen linearen Ungleichungssysteme.

Zusatz 8 Alternativsatz über die Lösbarkeit von inhomogenen linearen Ungleichungssystemen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) Es ist dann genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (1′′) oder (2′′) lösbar:

$$(1′′) \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m: \quad \alpha) \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}^T \mathbf{z} > 0, \quad A^T \mathbf{z} \leq \mathbf{0} \quad \text{oder}$$

$$\beta) \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}^T \mathbf{z} \geq 0, \quad A^T \mathbf{z} \prec \mathbf{0};$$

$$(2′′) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \quad \mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}.$$

b) **Inhomogene Version des Satzes von Stiemke:** Es ist dann genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (1′′) oder (2′′) lösbar:

$$(1′′) \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m: \quad \alpha) \mathbf{b}^T \mathbf{z} > 0, \quad A^T \mathbf{z} \leq \mathbf{0} \quad \text{oder}$$

$$\beta) \mathbf{b}^T \mathbf{z} \geq 0, \quad A^T \mathbf{z} \prec \mathbf{0};$$

$$(2′′) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: \quad \mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

3.5 Vergleich der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma

Der Teil b) von Zusatz 8 ist eine inhomogene Version des selbst in homogener Version auftretenden Satzes von Stiemke. Diese inhomogene Version lässt sich mit dem (inhomogenen) Minkowski-Farkas-Lemma vergleichen.

Das **Minkowski-Farkas-Lemma** besagt, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (I) oder (II) lösbar ist:

(I) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: $\mathbf{b}^\top \mathbf{z} > 0, \quad A^\top \mathbf{z} \leq \mathbf{0}$;
 (II) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Im Ungleichungssystem (II) wird mit den nichtnegativen \mathbf{x} eine größere Lösungsmenge zugelassen als im Ungleichungssystem (2'') mit den positiven \mathbf{x} . Im Gegenzug dazu verkleinert sich in (I) die Lösungsmenge auf den Fall α) von (1''). Beim Ungleichungssystem (I) des Minkowski-Farkas-Lemmas wird für die schwache Positivität des Vektors $L\mathbf{z} = (\mathbf{b}^\top \mathbf{z}, -A^\top \mathbf{z})^\top$ im Ungleichungssystem (1'') des Satzes von Stiemke also nur der Fall α) und nicht auch noch der Fall β) zugelassen. Der Fall (1'' α) wird in Abbildung 6 dargestellt.

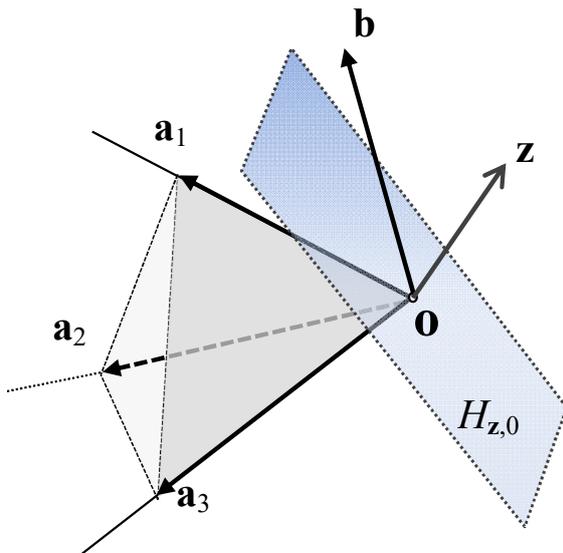


Abb. 6 Der Fall (I) im Minkowski-Farkas-Lemma bzw. der Fall (1'' α) in der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke, in dem \mathbf{b} außerhalb des Kegels $\text{cone}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ liegt ($m = n = 3$)

Das Minkowski-Farkas-Lemma bedeutet geometrisch, dass der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ entweder gemäß (II) in dem von den Spalten $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ der Matrix $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ erzeugten konvexen linearen Kegel liegt,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \in \text{cone}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} &= \text{cone } A = A(\mathbb{R}_{+}^n) \\ &= \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\ &= \{x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n : x_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

oder gemäß (I) sich von diesem Kegel folgendermaßen trennen lässt:

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m : \quad \mathbf{z}^\top \mathbf{b} > 0 &\geq \mathbf{z}^\top \mathbf{u} \text{ für alle } \mathbf{u} \in \text{cone } A, \\ \text{d.h. } \mathbf{u} &= A\mathbf{x} \text{ mit } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Es ist nämlich $\mathbf{z}^\top \mathbf{u} \leq 0$ für alle $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j \leq 0$ für $j = 1, \dots, n$ bzw. wenn $\mathbf{z}^\top A \leq \mathbf{0}^\top$ ist. Im Falle (I) wird also der Punkt \mathbf{b} vom Kegel $\text{cone } A$ durch die Hyperebene

$H_{z,0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^\top \mathbf{x} = 0\}$ derart getrennt, dass der Punkt \mathbf{b} im offenen Halbraum $H_{z,0}^\succ$ und der Kegel cone A im abgeschlossenen Halbraum $H_{z,0}^\leq$ liegt (Lexikon der Mathematik, Bd. 2 (2001), S. 132):

$$\mathbf{b} \in H_{z,0}^\succ \wedge \text{cone } A \subseteq H_{z,0}^\leq.$$

Die inhomogene Version des Satzes von Stiemke dagegen bedeutet geometrisch, dass der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ entweder gemäß (2“) im Bild des positiven Orthanten $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o}\}$ bei der durch $A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ vermittelten linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ liegt,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \in A(\mathbb{R}_+^n) &= \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{o}\} \\ &= \{x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n : x_j > 0 \text{ für } j = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

oder gemäß (1“) sich von diesem Bild derart trennen lässt, dass eine Hyperebene $H_{z,0}$ existiert mit

$$\begin{aligned} \alpha) \mathbf{b} \in H_{z,0}^\succ \wedge A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{z,0}^\leq &\text{ oder} \\ \beta) \mathbf{b} \in H_{z,0}^\geq \wedge A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{z,0}^\leq. & \end{aligned}$$

Im Fall (1“) sind die Mengen $\{\mathbf{b}\}$ und $A(\mathbb{R}_+^n)$ also sogenannte eigentlich trennbare Mengen. Die Menge $A(\mathbb{R}_+^n)$ ist die Menge aller Positivkombinationen (positiven Linearkombinationen) der Spalten \mathbf{a}_j der Matrix A , also ein konvexer linearer Kegel gemäß der Definition von Rockafellar (1970), S. 14 (konvexer linearer P -Kegel).

Während im Fall (I) des Minkowski-Farkas-Lemmas der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ nur im offenen Halbraum $H_{z,0}^\succ$ liegen kann, kann im entsprechenden Fall (1“) der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sowohl im offenen Halbraum $H_{z,0}^\succ$ (Fall 1“ α) als auch im abgeschlossenen Halbraum $H_{z,0}^\geq$ (Fall 1“ β) liegen.

Beweis für die geometrische Interpretation von Fall (1“ β) in der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke: Es ist zu zeigen, dass die Vektorungleichung $\mathbf{z}^\top A \leq \mathbf{o}^\top$ gleichbedeutend zur Mengeninklusion $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{z,0}^\leq$ ist. Die Vektorungleichung $\mathbf{z}^\top A = \mathbf{z}^\top (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = (\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{z}^\top \mathbf{a}_n) \leq \mathbf{o}^\top$ bedeutet für die Komponenten $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j \leq 0$ für alle Indizes $j \in I_n = \{1, \dots, n\}$ und $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_k < 0$ für mindestens einen Index $k \in I_n$. Daraus folgt für alle $\mathbf{x} > \mathbf{o}$ die Ungleichung $\mathbf{z}^\top A\mathbf{x} < 0$, d. h. $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{z,0}^\leq$.

Geht man umgekehrt von dieser Mengeninklusion $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{z,0}^\leq$ aus, so ist $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j \leq 0$ für alle $j \in I_n$ und $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_k < 0$ für mindestens ein $k \in I_n$ zu folgern: Aus der Annahme $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_m > 0$ für ein $m \in I_n$ ergibt sich für ein $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)^\top > \mathbf{o}$ mit

$$x_m = 1, \quad 0 < x_j \leq \delta \quad (j \neq m)$$

wegen $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j x_j \geq -|\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j| x_j \geq -|\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j| \delta$ ($j \neq m$) die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 > \mathbf{z}^\top A\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^n \mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{z}^\top \mathbf{a}_m + \sum_{j \neq m} \mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j x_j \\ &\geq \mathbf{z}^\top \mathbf{a}_m - \delta \sum_{j \neq m} |\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j|. \end{aligned}$$

Bei hinreichend kleiner Wahl von δ kann eine positive rechte Seite der Ungleichung und somit ein Widerspruch erreicht werden. Daher ist zunächst $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j \leq 0$ für alle $j \in I_n$ gezeigt.

Darüber hinaus kann dabei der Fall $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_j = 0$ für alle $j \in I_n$ bzw. $\mathbf{z}^\top A = \mathbf{o}^\top$ nicht eintreten, da dann $\mathbf{z}^\top A\mathbf{x} = 0$ insbesondere auch für die $\mathbf{x} > \mathbf{o}$ wäre und somit $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{z,0}$ folgen würde, im Widerspruch zur Voraussetzung $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{z,0}^\leq$. Somit existiert mindestens ein Index $k \in I_n$ mit $\mathbf{z}^\top \mathbf{a}_k < 0$. Insgesamt ist damit die Vektorungleichung $\mathbf{z}^\top A \leq \mathbf{o}^\top$ gezeigt.

Analog lässt sich für die geometrische Interpretation des Falles (1“ α) zeigen, dass die Vektorungleichung $\mathbf{z}^\top A \leq \mathbf{o}^\top$ gleichbedeutend mit der Inklusion $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{z,0}^\leq$ ist. \square

Literatur

- Aigner M., Ziegler G. M. (2004), Das Buch der Beweise, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage.
- Borgwardt K.H. (2001), Optimierung, Operations Research, Spieltheorie, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin.
- Bröcker T. (2004), Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Birkhäuser Verlag, Basel, 2. Auflage.
- Erwe F. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Bibliographisches Institut, Mannheim.
- Faigle U. (2006), Einführung in die Mathematik des Operations Research, pdf-Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 2006, www.zaik.uni-koeln.de/AFS: Stand: 19.07.2011.
- Faigle U. (2009), Einführung in die Mathematik des Operations Research, pdf-Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 2009, www.zaik.uni-koeln.de/AFS: Stand: 19.07.2011.
- Franz W. (1968), Topologie Band I - Allgemeine Topologie, Sammlung Göschen, Walter de Gruyter Verlag, Berlin.
- Grauert H., Fischer W. (1968), Differential- und Integralrechnung II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Hildebrandt S. (2003), Analysis 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1. Auflage.
- Hildebrandt S. (2006), Analysis 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.
- Jarre F., Stoer J. (2004), Optimierung, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Jungnickel D. (2008), Optimierungsmethoden, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.
- Kowalsky H.-J. (1967), Lineare Algebra, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 3. Auflage.
- Kremer J. (2006), Einführung in die Diskrete Finanzmathematik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1. Auflage.
- Lexikon der Mathematik (2000-2003), Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin: Band 1 – 6.
- Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Tredition, Hamburg, 2. Auflage.
- Pleier R. (2023), Diskrete stochastische Finanzmathematik, Tredition, Ahrensburg, 2. Auflage.
- Rockafellar R.T. (1970), Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton New Jersey.
- Stoer J., Witzgall C. (1970), Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Wagner R. (1981), Grundzüge der linearen Algebra, Teubner Verlag, Stuttgart.

Sachverzeichnis

- Abbildung
 - abgeschlossene 9
 - bijektive 9
 - lineare 9
 - stetige 9
 - topologische 9
- Affinkombination 22
- Aigner M. 22
- Alternativsatz
 - über Disjunktheit punktierter Kegel 3, 13, 14, 17, 19
 - über lineare Ungleichungssysteme 23, 25, 26
- Analysis, konvexe 3
- arg min 9
- Argument einer Funktion 9
- Basis
 - eines linearen Unterraums 9, 23
- Berührungspunkt einer Menge 12
- Beschreibung eines Polyeders
 - äußere 23
 - innere 23, 24
- Bildraum einer linearen Abbildung 25
- Borgwardt K.H. 3, 22, 23, 25
- Bröcker T. 9
- Dekomposition eines Polyeders 22
- disjunkte Mengen 10, 14, 17, 19
- Disjunktheit 12, 13, 14, 17, 19
- Diskontierungsprozess 3
- Ebenflächner 16, 22
- Eidelheit M. 3, 10
- Einheitspunkte 15, 18
- Einheitssimplex 15
- Erwe F. 7
- Erzeugendensystem
 - eines konvexen linearen Kegels 24
 - eines linearen Unterraums 24
 - eines Polyeders 22
- Extremwertsatz 7
- Faigle U. 22
- Farkas J. 25
- Fischer W. 7
- Franz W. 9
- Grauert H. 7
- Grenzwert einer Folge 12
- Halbraum
 - abgeschlossener 10, 12, 16, 22
 - homogener 10
 - linearer 12
 - offener 10
- Hildebrandt St. 7, 12
- Homöomorphismus 9
- Hülle
 - affine 22
 - Kegel- 21
 - konische 21, 24
 - konvexe 15, 18, 21
 - lineare 21
- Hyperebene
 - affine 10
 - lineare 10
- Isomorphismus 9
- Jarre F. 3, 6, 11, 20, 22
- Jungnickel D. 3, 6, 11, 16, 22, 23, 24, 25
- Kegel
 - der freien Richtungen 23
 - der normalen Richtungen 7
 - endlich erzeugter 24
 - konvexer linearer 5, 21, 23
 - linearer 9, 21
 - polarer 7, 10, 20, 24
 - polyedrischer 13, 22, 23, 24
 - spitzer konvexer linearer 23
- Kegelhülle 21
 - konvexe 21
- Kombination
 - affine 22
 - konische 21
 - konvexe 21
 - lineare 21
 - nichtnegative 21
 - positive 27
- Komplement
 - lineares 7
 - orthogonales 7, 10, 20, 25
- Konuskombination 21
- Konvexkombination 12, 21
- Kowalsky H.-J. 6, 20
- Kremer J. 11
- Kronecker L. 15
- Kronecker-Symbol 15
- Linearkombination 21
 - nichtnegative 21
 - positive 27
- Linienraum
 - eines konvexen linearen Kegels 23
- Lösbarkeit 25, 26
- Lotfußpunkt 7
- Mantellinie eines Kegels 16
- Menge
 - abgeschlossene 12
 - folgenkompakte 12
 - kompakte 12
 - konvexe 21, 22
 - polyedrische 16, 22
 - überdeckungskompakte nach Heine-Borel 12
- Minimierungsproblem 6
- Minkowski H. 22, 23, 25
- Minkowski-Farkas-Lemma 25, 26
- Minkowski-Summe 22
- Motzkin T., Satz von 25
- Nichtnegativkombination 21
- Norm
 - euklidische 6
- Normalenvektor
 - einer Hyperebene 15, 18, 19
 - einer Hyperebene, positiver 3, 14
 - eines Halbraums 17, 19
 - eines Halbraums, positiver 14
- Normalkegel 7
- Nullraum eines Vektorraums 21
- Oktant 13
- Orthant 13
 - nichtnegativer 13
 - positiver 13
 - punktierter nichtnegativer 13, 14
 - schwach positiver 13
- Orthonormalbasis 7

- Parallelität von affinen Unterräumen 12
- Polarkegel 7
- Polyeder 16, 22
 - leeres 22
- Polyederdarstellungssatz 22, 23
- Polytop 22
- Positivkombination 27
- Preisvektor
 - des vollkommenen Kapitalmarkts 3
- Projektion 6
 - eines Punktes auf eine Menge 3, 5
 - orthogonale 6, 7
- Punkte, affin unabhängige 23
- Pythagoras, Satz von 8
- Quadrant 13
- Rezeptionskegel 23
- Richtung
 - freie 23
 - normale 7
 - polare 7
- Rockafellar R.T. 16, 22, 23, 25, 28
- Satz
 - von Motzkin 25
 - von Pythagoras 8
 - von Stiemke 13, 25, 26
 - von Stiemke, inhomogene Version 26
 - von Weierstraß 7
- Skalarprodukt
 - kanonisches 6
- Spaltenraum einer Matrix 25
- Standardbasisvektor 15
- Standardsimplex 15
- Standardskalarprodukt 6
- Stiemke E., Satz von 13, 25
- Stoer J. 3, 6, 11, 16, 20, 22, 25
- Stützhyperebene 8
- Summe
 - direkte 7
 - orthogonale 7
- Tangentialebene 16
- Trennung
 - eigentliche 27
 - strikte 3, 10
- Umkehrabbildung 9
- Unterraum
 - affiner 22, 23
 - linearer 5, 21, 23
- Untervektorraum 5, 21
- Variablentransformation 25
- Vektor
 - positiver 15
 - schwach positiver 15
 - strikt positiver 15
- Vektorunterraum 21
- Verbindungsstrecke zweier Punkte 8
- Vielflächner 16, 22
- Wagner R. 6, 9
- Weierstraß K., Satz von 7
- Weyl H. 22, 23
- Witzgall Ch. 6, 16, 22, 25
- Zerlegung
 - additive, eines Polyeders 22
 - additive, eines Vektors 5
 - orthogonale additive 5
- Ziegler G.M. 22