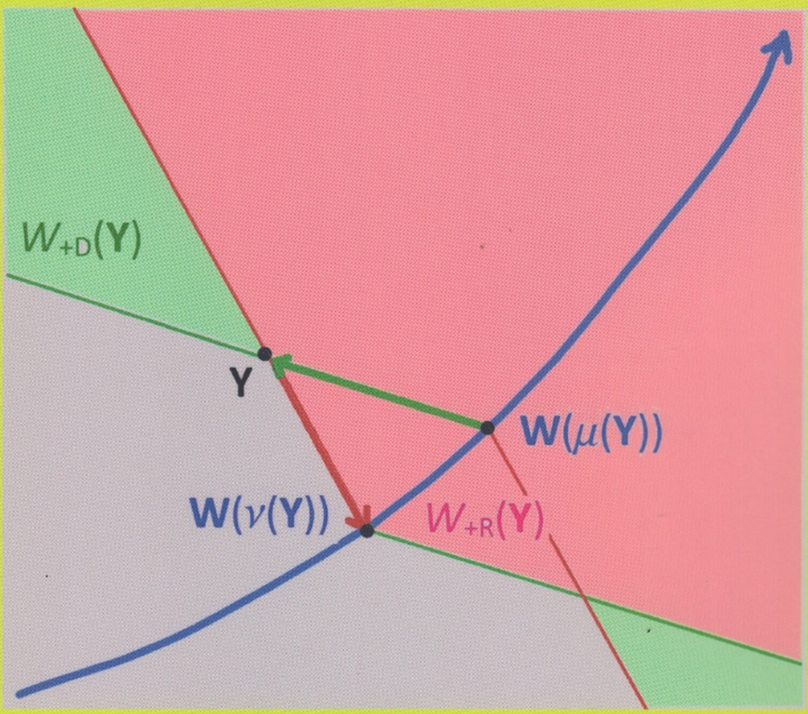
Rudolf Pleier

Finanzmathematik

Bewertung von Zahlungsströmen

Zweite Auflage



Der Autor Dr. Dr. Rudolf Pleier ist 1948 in Etzenricht in der Oberpfalz (Bayern) geboren. In den 1970er Jahren studierte er Mathematik und Physik an der Universität Würzburg mit den Abschlüssen Diplom und Promotion. Bei seiner Existenzgründung wurden ihm verschiedene Finanzierungen angeboten, von denen er mit einer geeigneten Methode die optimale auswählen sollte. Inspiriert durch dieses Schlüsselerlebnis befasst er sich seit vielen Jahren mit der Finanzmathematik und insbesondere mit der Bewertung von Zahlungsströmen.

Rudolf Pleier

Finanzmathematik

Bewertung von Zahlungsströmen

Zweite Auflage

2. Auflage

Verlag und Druck: tredition GmbH, Halenreie 40-44, 22359 Hamburg

ISBN Taschenbuch: 978-3-347-35460-9
ISBN Hardcover: 978-3-347-35461-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Vorwort

Die Beurteilung einer Zahlung in der Zukunft oder einer aus mehreren Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten bestehenden Zahlungsfolge (eines Zahlungsstroms) und der Vergleich von alternativen Zahlungsströmen ist ein zentrales Thema der Finanzmathematik und der Investitions- und Finanzierungstheorie. In der Praxis sind zukünftige Zahlungen meist noch unsicher und eventuell auch gar nicht genau bekannt. Das vorliegende Buch befasst sich mit den Konzepten der Duplizierung (Nachbildung) und Replizierung (Glattstellung) zur Bewertung von sicheren Zahlungsströmen. Die Bewertung unsicherer zufallsabhängiger Zahlungsströme wird im Buch ‚Diskrete stochastische Finanzmathematik‘ des Autors untersucht.

Die klassische Finanzmathematik behandelt sichere zeitdiskrete Zahlungsströme und umfasst die Gebiete Abschreibung, Zins-, Renten-, Tilgungs-, Kurs- und Rendite-, Effektivzins- und Investitionsrechnung. Die dynamische Investitionsrechnung beurteilt die Zahlungsströme von Investitionen unter Verwendung der Zinseszinsrechnung mit einem konstanten Kalkulationszinsfaktor q mittels der Kapitalwert- (Barwert-), Endwert-, Zeitwert-, Annuitätenmethode oder der Methode des internen Zinssatzes. Die Anwendung dieser klassischen Methoden führt aber auf die viel diskutierte Frage zur Auswahl eines richtigen Kalkulationszinssatzes. Außerdem erfolgt deren Verwendung unter der impliziten Prämisse, dass für den Entscheider in einer konkreten Situation zumindest für die betrachtete Menge von Zahlungsströmen tatsächlich Ergänzungsgeschäfte des speziellen vollkommenen Kapitalmarkts mit dem Preisvektor $\mathbf{P}(q) = (1,1/q,\ldots,1/q^n)^\mathsf{T}$ (q Kalkulationszinsfaktor) zur Verfügung stehen. Ein Beispiel hierfür wird in Abschnitt 6.3.7.4 angegeben.

Ein vollkommener Kapitalmarkt kann in guter Näherung jedoch nur für größere Finanzinstitutionen und marktbestimmende Investoren angenommen werden. Für eine Privatperson, eine kleine Firma und selbst eine Bank treten dagegen im Handel stets zwei verschiedene Preisarten (Kursarten) auf. Es sind dies der niedrigere Geldkurs (Nachfragepreis, Nachfragegebot zur Nachfrage des Markts, bid-price) und der höhere Briefkurs (Angebotpreis zum Angebot im Markt, ask-price, offer-price). Zur Berücksichtigung dieser Geld-Brief-Differenz (bid-ask-spread, bid-offer-spread) zwischen Geldkurs und Briefkurs bei Finanzmarktinstrumenten gibt es in der Literatur von Fisher (1932) über Heister (1962), Kruschwitz (1978) bis Grob (1999) verschiedene Verallgemeinerungen der klassischen Methoden mit speziellen Varianten der Duplizierung und der Replizierung der zu beurteilenden Zahlungsströme. An die Stelle der irgendwie gewählten Kalkulationszinssätze tritt hier ein Set von Finanzgeschäften (Ergänzungsgeschäften, Supplementen) des zugänglichen Kapitalmarkts zur Erzeugung der Nulllinie einer Beurteilung. An die Stelle des Beurteilungsmaßstabes tritt ein Margenzahlungsstrom auf der geordneten (n+1)-dimensionalen Zielsetzungskurve (Beurteilungskurve, Präferenzkurve), die der Festlegung der Zeitpräferenz dient. Außerdem wird noch die Liquidität des Entscheiders als Basiszahlungsstrom berücksichtigt. Diese verschiedenen Varianten werden in der Literatur in der Komponentenschreibweise oder als Tabellenkalkulation angegeben und unterscheiden sich in der Berücksichtigung des Basiszahlungsstroms, der Auswahl der ergänzenden Kapitalmarktgeschäfte und der Wahl der Zielsetzungskurve. Ein Überblick über diese Methoden in der Literatur wird zur besseren Vergleichsmöglichkeit in einer einheitlichen Vektorschreibweise in Kapitel 3 gegeben. Dieser Weg der Zahlungsstrombewertung wird dann in den Kapiteln 4 und 5 weiter untersucht und verallgemeinert.

Vorbereitend werden dazu im Kapitel 2 für die beiden grundlegend verschiedenen Konzepte der Duplizierung und Replizierung Plausibilitätsbetrachtungen durchgeführt und jeweils eine ziemlich allgemeine Definition in der Vektorschreibweise entwickelt. Außerdem werden die dabei benötigten Voraussetzungen an die zulässigen Ergänzungsgeschäfte und die Beurteilungskurve herausgearbeitet, welche die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung sichern. Mittels der in der Spur der Beurteilungskurve vorliegenden Ordnung kann dann eine Präferenzordnung für die Zahlungsströme erzeugt werden. Als bewährtes didaktisches Hilfsmittel wird hierfür die Erklärung mittels einfacher Beispiele gewählt.[1] Dabei wird zwar zunächst nur die Laufzeit $n = 1$ betrachtet, jedoch werden für die Beschreibung der Zielsetzung des Beurteilers schon allgemeine Beurteilungskurven verwendet. Mit „Robinson beim Fischfang“ wird ein Beispiel ohne Kapitalmarkt und mit „Robinson auf dem Kartoffelmarkt“ eines mit Kapitalmarkt gerechnet.

Zur Verallgemeinerung der in der Literatur angegebenen speziellen Ansätze wird in den Kapiteln 4 und 5 für den vollkommenen bzw. den unvollkommenen Kapitalmarkt und eine beliebige Laufzeit $n \geq 1$ ein ziemlich allgemeiner Ansatz sowohl für die Nachbildung als auch die Glattstellung eines sicheren Zahlungsstroms in der Vektorschreibweise verwendet. Zahlenbeispiele zur Bestimmung der Replizierung von vorgegebenen Zahlungsströmen mit verschiedenen Beurteilungskurven werden in den Abschnitten 2.2.2 ($n = 1$), 3.3.1 ($n = 3$), 3.3.2 ($n = 5$), 5.1.9 ($n = 2$), 5.3.2 ($n = 2$) und 6.4.2 ($n = 2$) gerechnet. Die nach den Konzepten der Duplizierung bzw. Replizierung definierten D- bzw. R-Präferenzordnungen werden auf besondere Eigenschaften hin untersucht, wie zum Beispiel auf die Existenz einer Nutzenfunktion, geometrische Struktur der Indifferenzklassen und Bessermengen, Abgeschlossenheit bezüglich der Vektorraum-Verknüpfungen, Monotonie, Stetigkeit und Konvexität. Außerdem wird die Vielfalt dieser D- und R-Präferenzordnungen in Abhängigkeit von der zulässigen Supplementmenge und der Beurteilungskurve beschrieben. Wann genau auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt für eine feste zulässige Supplementmenge zwei verschiedene Beurteilungskurven die gleiche Präferenzordnung liefern, kann mittels einer Äquivalenzrelation für die Beurteilungskurven charakterisiert werden. Zum Beweis dieser Aussage wird mit einem Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel die Existenz eines positiven Normalenvektors auf dem Linienraum der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte geschlossen. Im Spe-

[1] Die Erklärung mit Hilfe eines Beispiels wird schon im 6. Brief des römischen Philosophen Lucius Annaeus Seneca (~4 oder 1 v. Chr. – 65 n. Chr.) an Lucilius empfohlen: „Longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla. Lang ist der Weg durch Lehren, kurz und wirksam durch Beispiele.“

zialfall eines vollkommenen Kapitalmarkts erhält man für alle zulässigen Supplementmengen und alle Beurteilungskurven nur eine einzige Präferenzordnung, nämlich die Barwert-Präferenzordnung. Beim vollkommenen Kapitalmarkt erhält man als Normalenvektor den Preisvektor, dessen Komponenten die Preise der reinen Wertpapiere (Arrow-Debreu-Papiere) sind. Dieser Alternativsatz aus der konvexen Geometrie, der im engen Zusammenhang mit dem Satz von Stiemke und dem Minkowski-Farkas-Lemma steht, ist derselbe Satz, der auch im zeitdiskreten Mehrperiodenmodell der stochastischen Finanzmathematik bei vollkommenem Kapitalmarkt verwendet wird, um die Existenz eines positiven Zustandspreisprozesses (Diskontierungsprozesses) nachzuweisen. Weiter wird noch die geometrische Struktur der Menge der Zahlungsströme untersucht, auf der man bei verschiedenen D- und R-Präferenzordnungen unterschiedliche Vergleichsergebnisse erhält. Für den Entscheider stellt sich im konkreten Fall die Aufgabe, eines der beiden Konzepte als möglichst zweckmäßig für die Beurteilung der betrachteten Zahlungsströme auszuwählen, seinen Basiszahlungsstrom zu bestimmen, ein für ihn zugängliches und für die eindeutige Duplizierung bzw. Replizierung geeignetes System von Ergänzungsgeschäften zu finden und eine Beurteilungskurve zur Präzisierung seiner Zielsetzung zu wählen. Beispielsweise kann sich bei der Existenzgründung und der Finanzierung eines Betriebs für einen Selbstständigen die Aufgabe stellen, für ein Darlehen verschiedene Tilgungsmodelle zu vergleichen. Dazu sind zunächst für die ihm angebotenen Tilgungsmodelle, wie zum Beispiel Annuitäten-, Tilgungs-, Festdarlehen oder Kapitallebensversicherungsdarlehen, aus den nominellen Angaben die zugehörigen effektiven Zahlungsströme eventuell auch noch nach der Steuer zu berechnen und dann diese zu vergleichen. Aufgrund der hinterlegten Sicherheiten können diese Zahlungsströme hierbei als sicher angenommen werden.

In Kapitel 6 wird für die oben bereits genannten klassischen Methoden der Zahlungsstrombewertung und bestimmte Verallgemeinerungen dieser Methoden auf den unvollkommenen Kapitalmarkt gezeigt, dass sie Spezialfälle von R-Präferenzordnungen darstellen. Diese Verallgemeinerungen werden statt mit einem konstanten Kalkulationszinsfaktor etwas allgemeiner mit Transpositionsfaktoren (Auf- und Abzinsungsfaktoren) definiert, die von der Fristigkeit abhängen und auch für Haben und Soll verschieden sein können. Für diese ökonomische Interpretation des jeweils verwendeten Beurteilungsmaßstabes (Endwert, Kapitalwert, Zeitwert, Annuitätenniveau) als Margenwert müssen aber bestimmte Prämissen vorliegen. Diese vielzitierten impliziten Prämissen werden exakt angegeben für den Fall, dass zunächst nur ein einzelner Zahlungsstrom auf den jeweiligen Zeitwert glattgestellt werden kann, und für den Fall, dass jeder beliebige Zahlungsstrom des $\mathbb{R}^{n+1}$ auf seinen Zeitwert glattgestellt werden kann. Die bei dieser Verallgemeinerung resultierende Vielfalt der verschiedenen Zeitwert-Präferenzordnungen kann mittels des Satzes über die Vielfalt der R-Präferenzordnungen von Kapitel 5 beschrieben werden. Beispielsweise können damit die Bedingungen für die Transpositionsfaktoren angegeben werden, unter denen die allgemeinere Barwert- mit der allgemeineren Endwert-Präferenzordnung übereinstimmt. Die klassischen Methoden mit ihrem konstanten Kalkulationszinsfaktor q liefern selbst nur eine einzige Präferenzordnung, nämlich die spezielle Barwert-Präferenzordnung mit dem oben bereits angegebenen Diskontierungsvektor $\mathbf{P}(q)$.

In Kapitel 7 wird die in der Praxis sehr beliebte, aber in der Literatur viel diskutierte Methode des internen Zinssatzes behandelt. Zunächst erfolgt eine Plausibilisierung der Methode für die Beurteilung regulärer Zahlungsströme durch ihre Rückführung auf die Kapitalwertmethode. Bei Verwendung dieser Methode zur Beurteilung eines Zahlungsstroms wird in der Literatur als bisher umfassendster Anwendungsbereich die Menge der sogenannten „isoliert durchführbaren Investitionen" angegeben. Dies sind Zahlungsströme mit einem (einfachen) positiven internen Zinsfaktor, dessen Horner-Schema-Vektor keinen Vorzeichenwechsel aufweist. Die Problematik dieser Methode bestand bisher darin, dass ohne Rückgriff auf die Kapitalwertmethode im Allgemeinen schwer entscheidbar ist, ob der zu untersuchende Zahlungsstrom in dem eingeschränkten Anwendungsbereich liegt, d. h. in dem Bereich, in dem die Beurteilungsergebnisse der Methode des internen Zinssatzes und der Kapitalwertmethode übereinstimmen. Eine einfache Entscheidung war nur für die regulären Zahlungsströme, also die Zahlungsströme mit genau einem Vorzeichenwechsel in ihrer Zahlungsfolge möglich.
Hinsichtlich einer Verallgemeinerung der Methode wird zunächst die Menge der Zahlungsströme charakterisiert, für welche die Methode des internen Zinssatzes mit *jedem* beliebig festgelegten Kalkulationszinsfaktor konsistent zur Kapitalwertmethode ist. Man erhält hierbei die NU-Zahlungsströme, deren einziger positiver interner Zinsfaktor eine ungerade Nullstellenordnung aufweist, und die NF-Zahlungsströme, die keinen positiven internen Zinsfaktor besitzen. Auch bei weiteren Verallgemeinerungsversuchen zu dieser Methode mit einem einzigen internen Zinssatz bleibt aber stets der Nachteil bestehen, dass sie nur auf einem eingeschränkten Anwendungsbereich einsetzbar ist. Weiter sind dabei noch die Fragen zu klären, wie die Zugehörigkeit eines zu beurteilenden Zahlungsstroms oder zu vergleichenden Zahlungsstrompaars zum eingeschränkten Anwendungsbereich zu prüfen ist und wie aus mehreren vorliegenden internen Zinssätzen ein passender auszuwählen ist.
Die mit dem eingeschränkten Anwendungsbereich verbundenen Probleme können nun durch eine Verallgemeinerung der Methode gelöst werden, indem der Blick von einem einzelnen internen Zinsfaktor weg auf die Gesamtheit der internen Zinsfaktoren gerichtet wird. Mit nur etwas Basiswissen der Gymnasialoberstufe zur Kurvendiskussion für eine reellwertige Polynomfunktion kann eine Charakterisierung der B-Beurteilung (Beurteilung mit der Barwert- bzw. Kapitalwertmethode) mittels der Nullstellengesamtordnung der internen Zinsfaktoren rechts des Kalkulationszinsfaktors angegeben werden. Damit wird in den Abschnitten 7.5 und 7.13 sowohl für die Beurteilung eines einzelnen Zahlungsstroms als auch für den Vergleich von alternativen Zahlungsströmen die allgemeinste und auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ bzw. $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ universell einsetzbare „Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren" definiert. Diese ist nun äquivalent zu den anderen klassischen Methoden und löst das Rätsel der traditionell mit einem einzigen internen Zinssatz angewandten Methode. Bei der Herleitung dieser Methode wird unter anderem geklärt, warum auch ein sogenannter

relevanter interner Zinssatz im Allgemeinen keinen brauchbaren Zinssatz für die Beurteilung liefert.

Im Gegensatz zur klassischen Finanzmathematik erfasst die moderne stochastische Finanzmathematik auch die Zufallsabhängigkeit der Zahlungsströme mit deren Beschreibung als stochastische Prozesse. Geschichtlich gesehen war Anfang der 1970er Jahre die Preisbestimmung für eine sogenannte europäische Call-Option auf eine Aktie das Ausgangsproblem der modernen Finanzmathematik. Dieses elementare Beispiel wird auch heute in der Literatur meist zur Einführung in die stochastische Finanzmathematik behandelt. In der Praxis werden sowohl die zeitdiskreten Marktmodelle als Einperioden- und Mehrperiodenmodell als auch die zeitkontinuierlichen (zeitstetigen) Marktmodelle angewandt. Im Unterschied zur vorherigen Auflage dieses Buchs wird hier aber das Kapitel zur Bewertung zufallsabhängiger Zahlungsströme weggelassen, da dieses Thema nun im Buch ‚Diskrete stochastische Finanzmathematik' des Autors ausführlicher behandelt wird. Dort werden auch verschiedene Interpretationen der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip gegeben und Brücken geschlagen von der Beurteilung deterministischer (zufallsunabhängiger, sicherer) Zahlungsströme zur Beurteilung stochastischer (zufallsabhängiger, unsicherer) Zahlungsströme.

Das Buch ist für ein Selbststudium geeignet. Es wendet sich an Studierende mit finanz- und wirtschaftsmathematischer Ausrichtung und allgemein an Leser mit Interesse an der Bewertung von Zahlungsströmen und Interesse an dem Einsatz der ziemlich allgemein formulierten Konzepte der Duplizierung und Replizierung. Für sichere (zufallsunabhängige) Zahlungsströme erfolgt die Bewertung mit Berücksichtigung der Geld-Brief-Differenz des unvollkommenen Kapitalmarkts in Kapitel 5. Dazu werden einige Grundkenntnisse in der Analysis und linearen Algebra vorausgesetzt. Weitere mathematische Grundlagen werden in dem als mathematischen Anhang anzusehenden Kapitel 8 bereitgestellt. Hier werden einige Sätze über Relationen eines Vektorraums, konvexe Geometrie und (n+1)-dimensionale Beurteilungskurven hergeleitet. Außerdem werden spezielle Supplementsysteme aus Termingeschäften oder Kassageschäften auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt angegeben, für welche die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung und die Monotonie und Stetigkeit der damit definierten Präferenzordnungen gesichert ist.

Die einzelnen Kapitel können unabhängig voneinander studiert werden. Für ein zügigeres Lesen können ohne Weiteres die Kapitel 2 und 3 übersprungen werden, in denen Plausibilitätsbetrachtungen für einen möglichst allgemeinen formalen Ansatz der Konzepte der Duplizierung und Replizierung anhand von einfachen Beispielen durchgeführt werden bzw. die verschiedenen speziellen Ansätze dargestellt werden, die dazu bisher in der Literatur auftraten. Außerdem können im Kapitel 7, in dem die Auflösung des Mysteriums der Methode des internen Zinssatzes erfolgt, auch noch die Abschnitte mit den Plausibilitätsbetrachtungen zur bisherigen Methode mit einem einzigen internen Zinssatz übersprungen werden und sogleich die Abschnitte 7.5 und 7.13 zur allgemeinsten und universellen Methode der internen

Zinssätze für die Beurteilung bzw. den Vergleich von Zahlungsströmen gelesen werden.

Eine konkrete Erklärung einiger Themenbereiche geben 29 Beispiele, zur Veranschaulichung des Stoffes dienen 74 Abbildungen. Für die Anfertigung der Robinson-Bilder im Kapitel 2 danke ich herzlich meinem Freund Herrn Adi Bogner. Die übrigen Abbildungen wurden von mir selbst angefertigt und die Abhandlung im Alleingang erstellt. Anregungen und Verbesserungen nehme ich gerne über meine E-Mail-Adresse rpleier@t-online.de entgegen.

Mit der Herausgabe dieser Arbeit sollen auch einige bisher noch offene Fragen zur Bewertung von Zahlungsströmen beantwortet werden. So wird für die Konzepte der Duplizierung und Replizierung zur Zahlungsstrombewertung ein ziemlich allgemeiner Ansatz in der Vektorschreibweise entwickelt. Es wird die Vielfalt der mit diesen Konzepten bei einem unvollkommenen Kapitalmarkt erhaltenen Präferenzordnungen für sichere Zahlungsströme in Abhängigkeit vom Supplementsystem und von der Beurteilungskurve beschrieben. Die impliziten Prämissen von verallgemeinerten klassischen Bewertungsmethoden werden explizit dargestellt. Das Mysterium des eingeschränkten Anwendungsbereichs der Methode des internen Zinssatzes wird geklärt und mittels einer Verallgemeinerung der Methode sowohl für die Beurteilung als auch den Vergleich der Anwendungsbereich auf alle diskreten Zahlungsströme erweitert. Einige ausgewählte Themen dieses Buchs werden auch in kürzer gefassten Aufsätzen auf der Website www.pleier-r.de des Autors dargestellt.

Etzenricht, im Juli 2021 Rudolf Pleier

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Bewertung und der Vergleich von Zahlungsströmen ist ein zentrales Thema der Finanzmathematik und der Investitions- und Finanzierungstheorie. Bei den als klassisch bezeichneten Methoden der dynamischen Investitionsrechnung wie z. B. Kapitalwertmethode, Endwertmethode, Zeitwertmethode, Annuitätenmethode und Methode des internen Zinssatzes für deterministische (sichere, zufallsunabhängige) diskrete Zahlungsströme gibt es eine rege Diskussion über die Anwendbarkeit der Methoden aufgrund der impliziten Prämissen, über die Wahl des verwendeten Kalkulationszinssatzes und die Wahl des richtigen internen Zinssatzes. Als Verallgemeinerung der klassischen Methoden findet man in der neueren Literatur der Investitionsrechnung wie zum Beispiel bei Kruschwitz (2019) verschiedene dynamische Verfahren, bei denen die situative Liquidität und spezielle Zielsetzungen des Investors bzw. Kreditnehmers berücksichtigt werden und statt irgendwie gewählter Zinssätze jetzt tatsächliche oder fiktive Finanzgeschäfte des vorhandenen Kapitalmarktes verwendet werden. Ausgehend von diesem Ansatz wird nun das zugrunde liegende Konzept ziemlich allgemein dargestellt und daraus eine Präferenzordnung für die sicheren Zahlungsströme des $\mathbb{R}^{n+1}$ gewonnen.

Es werden im Folgenden endliche zeitdiskrete und wertkontinuierliche Zahlungsströme (Zahlungsfolgen) unter vorausgesetzter Sicherheit der Zahlungen betrachtet. Die Indizes j der Zahlungsstromkomponenten X_j liegen also in der Menge $I = \{0,1,\ldots,n\}$ und die Werte X_j in $\mathbb{R}$. Die Zahlungsstromkomponenten X_j gelten als sicher (deterministisch, zufallsunabhängig) und hängen nicht wie in der stochastischen Finanzmathematik auch noch von einem Zustand (Szenario) ω eines bestimmten Zustandsraum Ω ab. Bei Zahlungsfolgen mit unbestimmtem Ende wird nach Festlegung eines Planungshorizonts die Zahlungsfolge nur innerhalb einer festen Laufzeit von n Zeitintervallen betrachtet. Diese Zahlungsfolgen werden durch die $(n+1)$-Tupel

$$\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

der zu den Zeitpunkten $j = 0,1,\ldots,n$ auftretenden Zahlungen $X_j \in \mathbb{R}$ dargestellt $(n \geq 1)$. Obwohl in der Realität alle in der Zukunft erfolgenden Zahlungen mit Unsicherheit und eventuell auch Unkenntnis behaftet sind, kann die Einschränkung auf den Spezialfall von sicheren Zahlungen als einfacherer Zugang zu einer umfassenderen Problemlösung gewählt werden. In diesem Spezialfall und in konkreten einfachen Beispielen können die verschiedenen Konzepte für die Bewertung und den Vergleich von Zahlungsströmen einfacher dargestellt werden und bestehende Zusammenhänge und Unterschiede leichter aufgedeckt werden.

1.1 Natürliche Halbordnung

Während die Zahlenmengen $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der totalen (linearen, konnexen, vollständigen) Ordnung $\geq$ („größer oder gleich") ausgestattet sind, liefert die zugehörige sogenannte natürliche, d. h. komponentenweise definierte, Ordnung $\geq$ („größer oder gleich") im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ der $(n+1)$-Tupel $\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n)^\mathsf{T}$ reeller Zahlen X_j für $n \geq 1$ nur eine Halbordnung (Teilweiseordnung, Partialordnung, nicht-lineare Ordnung) 1. Art. Ein Paar $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ von Vektoren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{n+1}$ ist bezüglich der Halbordnung $\geq$ vergleichbar ($\mathbf{X}$ ist größer-gleich $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{Y}$), wenn für alle Komponenten

$$X_j \geq Y_j \qquad (j = 0,\ldots,n)$$

gilt. Die natürliche Halbordnung $\geq$ im Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ hat die fünf Eigenschaften der im Vergleich zur Halbordnung einer Menge spezieller definierten Halbordnung eines Vektorraums:

(H1) Reflexivität: $\mathbf{X} \geq \mathbf{X}$ für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$,

(H2) Identitivität (Antisymmetrie):
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y} \geq \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Y},$$

(H3) Transitivität: $\mathbf{X} \geq \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y} \geq \mathbf{Z} \Rightarrow \mathbf{X} \geq \mathbf{Z}$,

(H4) Abgeschlossenheit bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation:
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{Y} \wedge \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda\mathbf{X} \geq \lambda \boldsymbol{Y},$$

(H5) Abgeschlossenheit bezüglich der Addition:
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{Y} \wedge \ \mathbf{X}' \geq \mathbf{Y}' \Rightarrow \mathbf{X} + \mathbf{X}' \geq \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'.$$

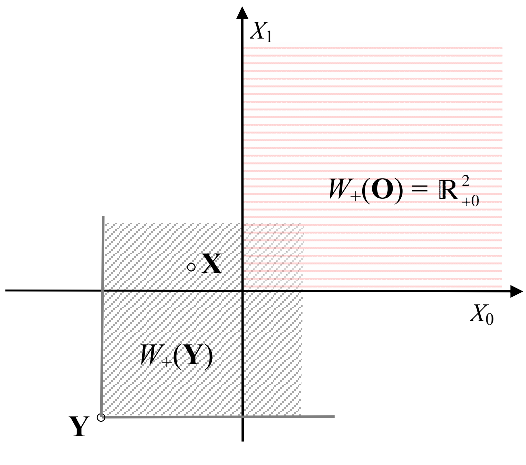


Abb. 1.1 Die Bessermengen $W_+(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} \geq \mathbf{Y}\}$ von $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ und $W_+(\mathbf{O})$ von $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^2$ zur natürlichen Halbordnung im $\mathbb{R}^2$

Für die Halbordnungsrelation $\geq$ des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{n+1}$ gibt es eine Charakterisierung mittels des zugehörigen konvexen linearen Kegels $K = \mathbb{R}^{n+1}_{+0}$ der nichtnegativen Vektoren $\mathbf{U} \geq \mathbf{O} = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$, also der Bessermenge $W_+(\mathbf{O})$ von $\mathbf{O}$. Das Paar $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ ist genau dann bezüglich der Halbordnungsrelation $\geq$ vergleichbar, wenn sein Differenzvektor $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ in dem zur Halbordnung $\geq$ gehörigen Kegel $K = \mathbb{R}^{n+1}_{+0}$ der nichtnegativen Vektoren liegt. Diese Charakterisierung wird in Abschnitt 8.1.2 allgemeiner für eine additiv abgeschlossene Quasiordnung eines Vektorraums bewiesen. In der Mengenschreibweise bedeutet dies, dass für jede Bessermenge $W_+(\mathbf{Y})$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, die Darstellung $W_+(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + W_+(\mathbf{O})$ gilt. Eine grafische Darstellung von Bessermengen wird in Abbildung 1.1 gegeben.
Die natürliche Halbordnung $\geq$ ist für $n \geq 1$ nicht total (konnex, linear). Dies heißt, dass nicht je zwei Vektoren $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mittels $\geq$ vergleichbar sind in dem Sinne, dass $\mathbf{X} \geq \mathbf{Y}$ oder $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$ gilt. Beispielsweise sind im $\mathbb{R}^2$ die beiden Zahlenpaare

$$\mathbf{X} = (1,-2)^{\mathsf{T}} \text{ und } \mathbf{Y} = (-2,3)^{\mathsf{T}}$$

bezüglich der Halbordnung $\geq$ nicht vergleichbar, da ihre Differenz

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} = (3,-5)^{\mathsf{T}}$$

einen Vorzeichenwechsel aufweist. Es gilt weder $\mathbf{U} \geq \mathbf{O}$ noch $\mathbf{U} \leq \mathbf{O}$.
Zur Halbordnung (1. Art) $\geq$ gehört noch die dadurch induzierte Halbordnung 2. Art (strenge Halbordnung) $\underset{\cdot}{>}$, indem man von der Relation $\geq$ als Menge in $V \times V$ die Diagonale $\{(\mathbf{X},\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in V\}$ wegnimmt. Ein Vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird als (schwach) positiv bezüglich der strengen natürlichen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnet,

$$\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O},$$

wenn er komponentenweise nichtnegativ ist und mindestens eine positive Komponente besitzt:

$$X_j \geq 0 \text{ für } j = 0,\ldots,n \text{ und } \sum_{j=0}^{n} X_j > 0.$$

Für $n = 0$, also für $\mathbf{X} = X_0 \in \mathbb{R}$, ist die strenge Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ identisch mit der strengen Halbordnung $>$ (“größer als”) von $\mathbb{R}$. Ein Paar $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ von Vektoren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann bezüglich der strengen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ vergleichbar ($\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{Y}$; $\mathbf{X}$ ist (echt) größer als $\mathbf{Y}$), wenn der Differenzvektor $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$ bezüglich dieser strengen Halbordnung positiv ist ($\mathbf{X} - \mathbf{Y} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$). Zu unterscheiden ist von der (durch $\geq$ induzierten) strengen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ („schwach größer“) eine weitere strenge Halbordnung $>$ oder $\gg$ („strikt größer“) des $\mathbb{R}^{n+1}$, die dadurch definiert ist, dass für alle Komponenten $>$ („größer“) gilt. Bei der dazu gehörigen Halbordnung 1. Art $\underline{\gg}$ gilt entweder bei allen Komponenten „>“ oder bei allen Komponenten „=“. Zur deutlicheren Unterscheidung von einem strikt positiven Vektor $\mathbf{U} > \mathbf{O}$ oder einem nichtnegativen Vektor $\mathbf{U} \geq \mathbf{O}$ wird hier ein Vektor $\mathbf{U} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ als schwach positiv bezeichnet.
Weiter gehört zur Halbordnung $\geq$ die eindeutig bestimmte inverse Halbordnung $\leq$ („kleiner oder gleich“) und zur strengen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ die inverse strenge

Halbordnung $\lessdot$ („kleiner als"): Es gilt $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ genau dann, wenn $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$ ist; es gilt $\mathbf{X} \lessdot \mathbf{Y}$ genau dann, wenn $\mathbf{Y} \gtrdot \mathbf{X}$ ist.

1.2 Präferenzordnungen

Es wird nun nach einer Möglichkeit gesucht, wie man unter Verwendung von als indifferent (weder günstig noch ungünstig) angesehenen speziell ausgesuchten Kapitalmarktgeschäften $\mathbf{S} \in K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und einer Beurteilungskurve (Präferenzkurve) $\mathbf{W}(\mu)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ zur Beschreibung der Zielsetzung des Entscheiders für die Zahlungsströme des $\mathbb{R}^{n+1}$ eine **Präferenzordnung** (Präferenzrelation) $\succcurlyeq$, also eine totale Quasiordnung, konstruieren kann. So wird in den nachfolgenden Kapiteln 2, 4 und 5 mit den Konzepten der Duplizierung und der Replizierung jedem Vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ jeweils eindeutig ein Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ auf der geordneten Spur $\mathbf{W}(J)$ der verwendeten Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ zugeordnet und damit eine **Präferenzfunktion** (Bewertungsfunktion)

$$\mathbf{w} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

auf $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert, mit der die Ordnung $\geq$ der Spur $\mathbf{W}(J)$ als Präferenzordnung $\succcurlyeq$ auf den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ übertragen wird. In Abbildung 1.2 werden für zwei Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ deren Bewertungsfunktionswerte auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ dargestellt. Die damit erhaltenen Präferenzordnungen werden dann noch auf ihre Vielfalt und auf weitere Eigenschaften wie die Monotonie, Stetigkeit, Konvexität und die Abgeschlossenheit bezüglich der Verknüpfungen des Vektorraums hin untersucht. Einige grundlegende Aussagen über Präferenzordnungen und Quasiordnungen werden im Abschnitt 8.1 des mathematischen Anhangs bereitgestellt. Monotone und stetige D- und R-Präferenzordnungen ergeben sich beispielsweise für die speziellen Supplementsysteme des Abschnitts 8.4. Die Konvexität und die Abgeschlossenheit der erhaltenen Präferenzordnungen wird in den Abschnitten 4.3.3.1, 4.3.3.2, 5.2.5 und 5.2.6 behandelt.

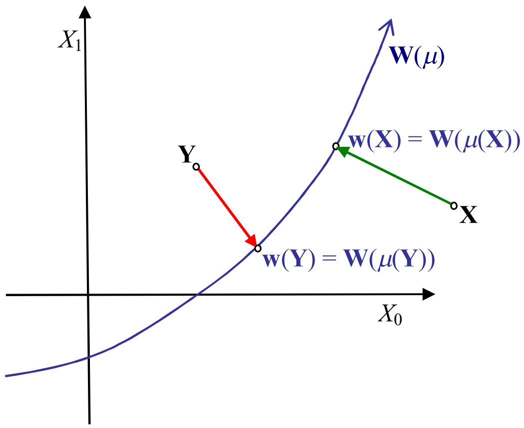


Abb. 1.2 Eine Präferenzfunktion $\mathbf{w}(\mathbf{X})$ im $\mathbb{R}^2$ mit den Funktionswerten $\mathbf{w}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ und $\mathbf{w}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$

Eine **Quasiordnung** (Präordnung) $\succcurlyeq$ einer Menge M ist die Abschwächung der Halbordnung einer Menge, bei der auf die Antisymmetrie (Identitivität) verzichtet wird. Somit können mit der Quasiordnung $\succcurlyeq$ auch voneinander verschiedene Elemente $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ in beiden Richtungen vergleichbar sein: $\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}$ und $\mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{X}$. Diese Elemente werden dann als zueinander äquivalent (indifferent) bezeichnet: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$. Im Vergleich zur Halbordnung eines Vektorraums wird bei der Quasiordnung auch noch die Abgeschlossenheit der Relation $\succcurlyeq$ bezüglich der Vektorraumverknüpfungen (Vektoraddition und Skalarmultiplikation) weggelassen.
Eine Quasiordnung $\succcurlyeq$ auf der Menge $M = \mathbb{R}^{\mathrm{n}+1}$ ist also eine zweistellige Relation dieser Menge, also eine Teilmenge $\succcurlyeq$ von $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, mit den beiden Eigenschaften

(H1) Reflexivität: $\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{X}$ für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$,

(H3) Transitivität: $\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{Z} \Rightarrow \mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Z}$.

Eine **Präferenzordnung** $\succcurlyeq$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ hat neben diesen beiden Eigenschaften auch noch die Eigenschaft der

(T) Totalität (Konnexität, Linearität, allgemeinen Vergleichbarkeit): $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}$ oder $\mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{X}$.

Zu einer Präferenzordnung ist wie zu jeder zweistelligen Relation $\succcurlyeq$ die Umkehrrelation (inverse Relation) $\preccurlyeq$ definiert durch

$$\mathbf{X} \preccurlyeq \mathbf{Y} :\Leftrightarrow \mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{X}.$$

Dass die Präferenzordnung $\succcurlyeq$ auf $M = \mathbb{R}^{\mathrm{n}+1}$ auch total (linear, konnex) ist, bedeutet in der Mengenschreibweise, dass die Vereinigung der Relation $\succcurlyeq$ und der inversen Relation $\preccurlyeq$ das gesamte zweifache Produkt des $\mathbb{R}^{\mathrm{n}+1}$ ergibt:

$$\succcurlyeq \cup \preccurlyeq = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Für die Elemente des $\mathbb{R}^{n+1}$ bedeutet dies, dass je zwei beliebige $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich der Relation $\succcurlyeq$ vergleichbar sind, d. h. es gilt

$\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist mindestens so gut wie $\mathbf{Y}$) oder

$\mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{X}$ ($\mathbf{Y}$ ist mindestens so gut wie $\mathbf{X}$).

Im Vergleich mit der Halbordnung einer Menge wird bei der Präferenzordnung auf die Antisymmetrie (Identitivität) verzichtet, dafür aber die Totalität gefordert.

Die Präferenzordnung $\succcurlyeq$ induziert wie jede Quasiordnung eine **Äquivalenzrelation** (**Indifferenzrelation**, eine reflexive, transitive und symmetrische Relation)

$$\sim \; = \; \succcurlyeq \cap \preccurlyeq$$

durch die folgende Festlegung:

$\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ (**X** ist ebenso gut wie **Y**, **X** ist äquivalent zu **Y**, **X** und **Y** sind indifferent)

gilt genau dann, wenn die Elemente **X** und **Y** in beiden Richtungen vergleichbar sind,

$\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}$ und $\mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{X}$.

Die induzierte Äquivalenzrelation ~ besitzt aufgrund ihrer symmetrischen Definition die Eigenschaft der

(S) Symmetrie: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Y} \sim \mathbf{X}$.

Allgemein erhält man für eine Äquivalenzrelation ~ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ durch die Äquivalenzklassen (Indifferenzklassen)

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{Y} \sim \mathbf{X}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, eine disjunkte Zerlegung (Klasseneinteilung, Faserung, Partition, schlichte Überdeckung) der Menge $\mathbb{R}^{n+1}$. Dies heißt, dass $\mathbb{R}^{n+1}$ die Vereinigung der nichtleeren, paarweise disjunkten (elementfremden) Teilmengen (Klassen) Ind(**X**) ist. Umgekehrt entspricht einer derartigen Zerlegung stets bijektiv eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, sodass die Teilmengen die Äquivalenzklassen (Restklassen, Fasern) sind.[1]

Weiterhin erzeugt die Präferenzordnung $\succcurlyeq$ wie jede Quasiordnung eine **strenge Halbordnung** (Halbordnung 2. Art, Striktordnung, eine transitive und irreflexive (antireflexive) Relation)

$$\succ \; = \; \succcurlyeq \setminus \preccurlyeq \; = \; \succcurlyeq \setminus \sim$$

durch die folgende Festlegung:

$\mathbf{X} \succ \mathbf{Y}$ (**X** ist besser als **Y**, **X** wird gegenüber **Y** präferiert (vorgezogen))

gilt genau dann, wenn

$\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X} \nsim \mathbf{Y}$.

Auf der Menge der Äquivalenzklassen (Indifferenzklassen)

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{Z} \sim \mathbf{X}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, einer zu einer Quasiordnung $\succcurlyeq$ gehörigen Äquivalenzrelation (Indifferenzrelation) ~ ist dann eine wohldefinierte Halbordnung, also eine antisymmetrische Quasiordnung, induziert durch die Festlegung

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{X}) \succcurlyeq \mathrm{Ind}(\mathbf{Y}) :\Leftrightarrow \; \mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}.$$

Denn aus $\mathrm{Ind}(\mathbf{X}) \succcurlyeq \mathrm{Ind}(\mathbf{Y})$ und $\mathrm{Ind}(\mathbf{Y}) \succcurlyeq \mathrm{Ind}(\mathbf{X})$ folgt $\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}$ und $\mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{X}$, also $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ bzw. $\mathrm{Ind}(\mathbf{X}) = \mathrm{Ind}(\mathbf{Y})$ und somit die Antisymmetrie für die Quasiordnung der Äqui-

---

[1] Den Zusammenhang zwischen disjunkter Zerlegung und Äquivalenzrelation findet man beispielsweise im Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S.95, und im Analysis-Buch von Mangoldt und Knopp, Bd. 4 (1973), S. 16f.

valenzklassen. Insbesondere induziert eine Präferenzordnung (totale Quasiordnung) in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf der Menge der Äquivalenzklassen eine (Total-)Ordnung.

Barwert-Präferenzordnung
Es wird nun noch ein einfaches und wichtiges Beispiel einer Präferenzordnung des $\mathbb{R}^{n+1}$ angegeben, das uns bei den nachfolgenden Untersuchungen immer wieder begegnen wird. Es ist die Barwert-Präferenzordnung (B-Präferenzordnung, Kapitalwert-Präferenzordnung) $\trianglerighteq$, die mittels einer speziellen Nutzenfunktion

$$B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} P_j X_j$$

mit einem fest vorgegebenen positiven Vektor $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($P_j > 0$ für $j = 0,\ldots,n$, o. E. $P_0 = 1$) definiert ist. Diese Nutzenfunktion $B_n(\mathbf{X})$ ist eine lineare Abbildung (Homomorphismus)

$$B_n : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit dem Bildraum $\mathbb{R}$ und wird daher auch Linearform und lineares Funktional genannt. Die Komponenten P_j des Vektors $\mathbf{P}$ bzw. die Elemente P_j der $1\times n$-Darstellungsmatrix $\mathbf{P}^{\mathsf{T}} = (P_0,\ldots,P_n)$ sind die B_n-Bilder der Standardbasis $\mathbf{e}_j = (0,..,0,1,0,..,0)^{\mathsf{T}}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$. Auf Grund der Positivität der Komponenten P_j ist $B_n(\mathbf{X})$ ein sogenanntes positives lineares Funktional (eine positive Linearform), das (die) auf dem punktierten nichtnegativen Orthanten positiv ist:

$$B_n(\mathbf{X}) > 0 \ \forall\ \mathbf{X} \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1}_{+0} = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{Z} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}, \text{ d.h. } \mathbf{Z} \geq \mathbf{O} \wedge \mathbf{Z} \neq \mathbf{O}\}.$$

Geometrisch beschreibt die „Abstandsfunktion“

$$d(\mathbf{X}) := B_n(\mathbf{X})/\|\mathbf{P}\| \qquad (\|\mathbf{P}\| = \sqrt{\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}})$$

den vorzeichenversehenen (orientierten) Abstand des Punktes $\mathbf{X}$ von der homogenen (linearen) Hyperebene

$$H_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n+1} : B_n(\mathbf{D}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{D} = 0\}$$

mit dem Normalenvektor $\mathbf{P} > \mathbf{O}$.

Interpretiert man wie in Abschnitt 6.2 beim Spezialfall der nicht gespaltenen Abzinsungsfaktoren mit der Normierung $P_0 = 1$ die Komponenten P_j finanzmathematisch als Diskontierungsfaktoren (Abzinsungsfaktoren) d_j bzw. $\mathbf{P}$ als Diskontierungsvektor (Abzinsungsvektor), so wird der Wert $B_n(\mathbf{X})$ als Barwert des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ und die Funktion $B_n(\mathbf{X})$ als Barwert-Funktion bezeichnet. Weitere Bezeichnungen für den Barwert sind Kapitalwert, Kapitalgegenwartswert, Gegenwartswert, englisch present value und bei Zahlungsströmen aus Zahlungen $X_j = e_j - a_j$, die als ggf. auch negative Einzahlungsüberschüsse aus Differenzen von Einzahlungen e_j und Auszahlungen a_j gebildet werden und einen Vorzeichenwechsel aufweisen können, auch Nettobarwert und englisch netto present value. Die zu dieser Nutzenfunktion $B_n(\mathbf{X})$ gehörige Barwert-Präferenzordnung (B-Präferenzordnung) $\trianglerighteq$ vergleicht die Zahlungsströme $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ also finanzmathematisch mittels ihrer Barwerte oder geometrisch mittels ihrer orientierten Abstände von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ und kann daher auch als Abstand-Präferenzordnung bezeichnet werden:

$$\mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y} \quad \Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y})$$
$$\Leftrightarrow d(\mathbf{X}) \geq d(\mathbf{Y}).$$

In Abbildung 1.3 werden zwei Zahlungsströme bzw. Punkte $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mittels ihrer Abstände $d(\mathbf{X})$ und $d(\mathbf{Y})$ von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ verglichen. Der auf der durch $\mathbf{W}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{P}/\|\mathbf{P}\|$ beschriebenen Geraden lin $\{\mathbf{P}\}$ liegende Punkt $\mathbf{w}(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{P}/\|\mathbf{P}\|$ ist der Lotfußpunkt von $\mathbf{X}$ auf der Geraden, d. h. die orthogonale Projektion von $\mathbf{X}$ auf die Gerade.

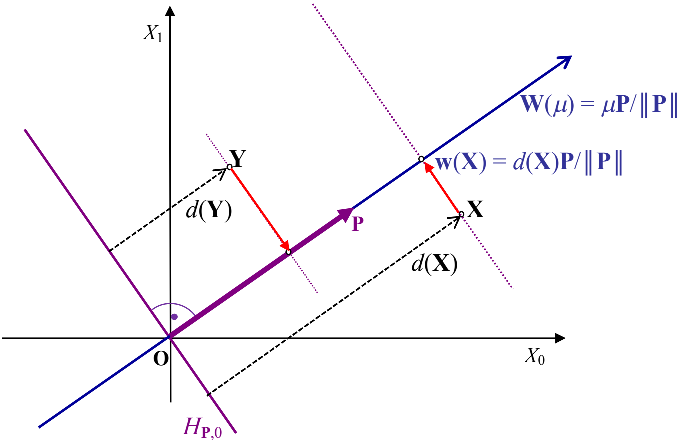


Abb. 1.3 Die B-Präferenzordnung im $\mathbb{R}^2$ mit dem Vergleich der Barwerte $B_n(\mathbf{X})$ und $B_n(\mathbf{Y})$ bzw. der orientierten Abstände $d(\mathbf{X})$ und $d(\mathbf{Y})$ von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$

In den Abschnitten 6.1 und 6.3.2 wird jeweils beim Spezialfall der nicht gespaltenen Transpositionsfaktoren mit der entsprechenden Normierung $P_m = 1$ gezeigt, dass die Komponenten P_j finanzmathematisch auch als Aufzinsungsfaktoren oder Transpositionsfaktoren interpretiert werden können, die Nutzenfunktion auch als Endwert- oder Zeitwert-Funktion und die Präferenzordnung auch als Endwert- oder Zeitwert-Präferenzordnung.

In Kapitel 4 wird dargestellt, dass diese B-Präferenzordnung auch konvex, monoton und abgeschlossen bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation ist. Die Monotonie der B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ ist gleichbedeutend zur „strengen Monotonie" der Nutzenfunktion $B_n(\mathbf{X})$, wenn hierbei nur Argumente (unabhängige Variable) $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet werden, die mittels der strengen Halbordnung $\dot{>}$ verglichen werden können:

$$\mathbf{X} \dot{>} \mathbf{X}' \;\; \Rightarrow \;\; B_n(\mathbf{X}) > B_n(\mathbf{X}') \text{ bzw. } \mathbf{X} \rhd \mathbf{X}'.$$

Wie jede additiv abgeschlossene Quasiordnung eines Vektorraums (siehe Satz 8.1.1) lässt sich die B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ mittels der Menge der $\trianglerighteq$-nichtnegativen Vektoren charakterisieren:

$$\mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \trianglerighteq \mathbf{O}.$$

In den Kapiteln 4 und 5 erweist sich beim vollkommenen Kapitalmarkt und auch bei einem vollkommenen Supplementsystem eines unvollkommenen Kapitalmarkts die

B-Präferenzordnung als die einzige Präferenzordnung, die mit den Konzepten der Duplizierung und Replizierung erzeugt werden kann.

In Abschnitt 8.3.5 tritt die B-Präferenzordnung in den Beweisen für die Übereinstimmung der Präferenzordnungen für L-äquivalente Beurteilungskurven auch versteckt auf: Nach der Linksmultiplikation der Vektorgleichung für die Beurteilungskurvenpunkte mit dem Normalenvektor $\mathbf{P}$ der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$, welche den Linienraum $K \cap (-K)$ des Kapitalmarkts K umfasst, werden nämlich implizit bestimmte Eigenschaften der Nutzenfunktion $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ verwendet: 1) Es gilt $B_n(\mathbf{S}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} = 0$ für alle $\mathbf{S} \in H_{\mathbf{P},0}$. 2) Aus der strengen Monotonie von $B_n(\mathbf{X})$ und der strengen Monotonie der homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ ergibt sich auch die strenge Monotonie der zusammengesetzten Abstandsfunktion

$$\alpha(\mu)/\|\mathbf{P}\| = B_n(\mathbf{V}(\mu))/\|\mathbf{P}\| = d(\mathbf{V}(\mu)),$$

welche die orientierten Abstände der Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{V}(\mu)$ von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ beschreibt.

In Abschnitt 6.3.7 wird der Spezialfall

$$B_n(\mathbf{X},q) = \mathbf{P}(q)^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{-j}$$

der Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X})$ mit dem speziellen Diskontierungsvektor $\mathbf{P}(q) = (1,1/q,\ldots,1/q^n)^{\mathsf{T}}$ und dem konstanten nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor $q > 0$ näher untersucht. In Kapitel 7 findet dieser Spezialfall dann noch eine Anwendung bei der Behandlung der Methode des internen Zinssatzes.

2 Duplizierung und Replizierung in Beispielen

2.1 Beispiel ohne Kapitalmarkt: Robinson beim Fischfang

Zur Beurteilung einer Zahlung zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft oder eines aus mehreren Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten bestehenden Zahlungsstroms als vorteilhaft oder unvorteilhaft oder zum Vergleich von alternativen Zahlungsströmen werden die zwei verschiedenen Konzepte der Duplizierung und der Replizierung dargestellt. Am Anfang der Betrachtung stehen einfache und übersichtlichere Beispiele, um den Blick auf das Wesentliche zu erleichtern. Es werden zunächst Beispiele mit sicheren Zahlungen und nur zwei Zahlungszeitpunkten, also diskrete Zahlungsströme der Laufzeit $n = 1$, behandelt. Dabei wird in Abschnitt 2.1 der Fall behandelt, dass kein Kapitalmarkt zur Verfügung steht, und in Abschnitt 2.2 der Fall, dass es einen Kapitalmarkt gibt.

In diesem Abschnitt nun soll sich ein Individuum, das sich in einem Lebensbereich ohne Kapitalmarkt befindet, zwischen zwei für ihn möglichen Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ entscheiden. Zur Lösung dieses Entscheidungsproblems werden in Beispielen vier verschiedene Methoden behandelt. In Abschnitt 2.1.1 wird dazu der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ unter Verwendung des Ausgangszahlungsstroms $\mathbf{Y}$, der Indifferenzkurve Ind($\mathbf{Y}$) von $\mathbf{Y}$ als Teil der monotonen Präferenzordnung $\succcurlyeq$ des Entscheiders und eines Vergleichszahlungsstroms $\mathbf{V}(\mu)$ dupliziert (nachgebildet, additiv zerlegt) und dann mittels des Vergleichszahlungsstroms der Vergleich von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ beschrieben. In Abschnitt 2.1.2 werden beide Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ jeweils bei Verwendung eines festen Ausgangszahlungsstroms $\mathbf{U}$, dessen Indifferenzkurve Ind($\mathbf{U}$) und einer Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ dupliziert und mit Hilfe der $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ jeweils zugeordneten Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ und $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y}))$ der Vergleich von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ definiert. In Abschnitt 2.1.3 werden die beiden Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ jeweils bei Verwendung ihrer Indifferenzkurve Ind($\mathbf{X}$) bzw. Ind($\mathbf{Y}$) und einer Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ auf den Nullzahlungsstrom $\mathbf{O}$ glattgestellt (repliziert, additiv ergänzt) und mittels der Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{V}(\nu(\mathbf{X}))$ und $\mathbf{V}(\nu(\mathbf{Y}))$ der Vergleich von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ beschrieben. In Abschnitt 2.1.4 werden die beiden Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ jeweils bei Verwendung der Indifferenzkurve Ind($\mathbf{U}$) und der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ auf einen festen Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ glattgestellt und mit den Beurteilungskurvenpunkten der Vergleich von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ definiert. Bei allen vier Methoden wird die Kenntnis einer zu einem speziellen Zahlungsstrom gehörigen individuellen Indifferenzkurve des Entscheiders vorausgesetzt. Weiter wird angenommen, dass diese Indifferenzkurve zu einer monotonen Präferenzordnung des Entscheiders gehört. Man hat damit vier Methoden zur Umsetzung der Idee, wie man aus einer einzelnen Indifferenzkurve und einer Beurteilungskurve einen Vergleich für die damit duplizierbaren bzw. replizierbaren Zahlungsströme erhalten kann. Der Vergleich erfolgt bei den Methoden der Abschnitte 2.1.1 und 2.1.3 gemäß der Präferenzordnung, die den individuellen Indifferenzkurven zugrunde liegt, bei den Methoden der Abschnitte 2.1.2 und 2.1.4 dagegen gemäß einer neuen Präferenzordnung, die sich von der der Indifferenzkurve Ind(**U**) zugrunde liegenden Präferenzordnung unterscheidet.

Diese Idee wird dann auch im nächsten Abschnitt 2.2 weiterentwickelt, um mittels der aus den Kapitalmarktgeschäften gebildeten externen Indifferenzkurve durch den Ursprung **O** des Koordinatensystems und der inhomogenen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ nach dem Konzept der Duplizierung bzw. der Replizierung eine Präferenzordnung zu definieren. Beiden Konzepten gemeinsam ist, dass jedem zu beurteilenden bzw. zu vergleichenden Zahlungsstrom **X** ein zu **X** indifferenter Zahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ auf der Spur der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ zugeordnet wird und die Beurteilung bzw. der Vergleich mittels der auf der Beurteilungskurve existierenden Ordnung durchgeführt wird. Das Beispiel in Abschnitt 2.2 dient der Plausibilisierung des allgemeinen formalen Ansatzes der Duplizierung bzw. der Replizierung in Kapitel 5. Dort wird bei der allgemeineren Behandlung der beiden Konzepte auf einem unvollkommenen Kapitalmarkt dann noch die Vielfalt der dabei erhaltenen Präferenzordnungen in Abhängigkeit von der verwendeten Auswahl von Kapitalmarktgeschäften und den verschiedenen Beurteilungskurven untersucht. Außerdem werden dort die mit den verschiedenen Beurteilungskurven oder den beiden verschiedenen Konzepten erhaltenen Präferenzordnungen verglichen.

2.1.1 Duplizierung eines Zahlungsstroms mit einem anderen Zahlungsstrom als Ausgangspunkt

Bei der zuerst behandelten Methode wird einer der beiden Zahlungsströme, etwa **X**, dargestellt als Summe des anderen Zahlungsstroms **Y**, einer Verschiebung **ΔY** auf der Indifferenzkurve Ind(**Y**) von **Y** und eines direkt beurteilbaren (d. h. mit dem Nullvektor **O** komponentenweise vergleichbaren) Zahlungsstroms **V**:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} + \mathbf{V}.$$

Die verwendete Indifferenzkurve soll dabei Teil einer monotonen Präferenzordnung des Entscheiders sein. Die Idee für das nachfolgende Zahlenbeispiel von Robinson stammt von Kruschwitz (1999), S. 2–4. Sie wird hier und im darauffolgenden Beispiel noch weiter ausgebaut. In diesem Beispiel muss sich Robinson bei seinem Fischverzehr zwischen zwei Konsumplänen entscheiden. Dabei gibt es auf der Insel keinen Fischmarkt und muss Robinson die Fische selbst fangen.

Beispiel 2.1 Robinson beim Fischfang – Vergleich zweier Konsumpläne X und Y durch die Duplizierung von X mittels der Indifferenzkurve Ind(Y) **von Y**

Robinson Crusoe lebt allein auf einer einsamen Insel und kann nicht mit anderen Menschen Tauschgeschäfte durchführen. Er steht vor dem Entscheidungsproblem, ob er heute mit bloßen Händen und einem einfachen Speer Fische fangen soll oder heute lieber ein Netz knüpft und damit erst morgen mit dem Netz auf Fischfang geht (siehe Abbildungen 2.1 und 2.2).

Es sind folgende Nebenbedingungen zu berücksichtigen: Er fängt nur heute (zum Zeitpunkt $t = 0$) oder nur morgen (Zeitpunkt $t = 1$) Fische. Bei den ihm zur Verfügung stehenden Mitteln benötigt er einen Tag für die Herstellung des Netzes und hält das Fischernetz nur für einen einzigen Fischfang. Ohne Netz fängt er 50 Fische am Tag und mit Netz 60 Fische. Wie wird er sich entscheiden?

Abb. 2.1 Robinson beim Fischfang mit Speer

Abb. 2.2 Robinson beim Fischfang mit Netz

Bei seiner Entscheidung „Fischen heute ohne Netz" ist seine Einkommensverteilung (Konsumgutverteilung, Konsumplan) oder sein Zahlungsstrom in der Einheit Fisch also gegeben durch

$$\mathbf{X} = (50,0)^\mathsf{T}.$$

Allgemein ist für die Laufzeit $n = 1$ ein Konsumplan $\mathbf{C} = (C_0,C_1)^\mathsf{T}$ ein nichtnegativer Zahlungsstrom ($C_j \geq 0$, $j = 1,2$) des $\mathbb{R}^2$. Geometrisch beschreibt er als Ortsvektor einen Punkt im ersten Quadranten der Ebene $\mathbb{R}^2$. Die Alternative, heute auf den Fischfang zu verzichten, das Netz zu knüpfen und damit morgen zu fischen, liefert den Zahlungsstrom

$$\mathbf{Y} = (0,60)^\mathsf{T}.$$

Die beiden Zahlungsströme **X** und **Y** sind nicht direkt (komponentenweise, mit der natürlichen Halbordnung) vergleichbar. Um zu entscheiden, welcher der beiden alternativen Zahlungsströme **X** und **Y** für ihn vorteilhafter ist, muss sich Robinson überlegen, um wieviel lieber ihm „1 Fisch heute" ist als „1 Fisch morgen". Er muss also die Stärke seiner strikten Gegenwartspräferenz präzisieren. Robinson kommt zu dem Ergebnis, dass es ihm gleichgültig ist, ob er „55 Fische heute" oder „60 Fische morgen" bekommt. Die Konsumpläne

$$\mathbf{Y} = (0,60)^\mathsf{T} \text{ und } \mathbf{Y}' = (55,0)^\mathsf{T}$$

sind für Robinson gleich erwünscht. Robinson ist indifferent (gleichgültig, unentschieden, neutral) bei der Wahl zwischen diesen beiden Konsumplänen. Die beiden Konsumpläne liegen bei der geometrischen Darstellung als Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$ also auf der gleichen Indifferenzkurve, d. h. auf einem geometrischen Ort von Konsumplänen $(C_0,C_1)^\mathsf{T}$, die für den Entscheider Robinson die gleiche Erwünschtheit haben. Bei dem US-amerikanischen Ökonomen Irving Fisher (1867–1947) (1932), S. 200–204, werden diese Kurven auch als Gleicherwünschtheitslinien (iso-desirability lines), Gleichgültigkeitslinien, Bereitwilligkeitslinien (willingness lines) und W-Linien bezeichnet. Beispielsweise könnte Robinson auf der Indifferenzkurve Ind(**Y**) durch $\mathbf{Y} = (0,60)^\mathsf{T}$ auch noch die folgenden Punkte $(C_0,C_1)^\mathsf{T}$ einordnen:

$$(10,36)^\mathsf{T}, (20,22)^\mathsf{T}, (30,13)^\mathsf{T}, (40,7)^\mathsf{T}, (50,2)^\mathsf{T}, (55,0)^\mathsf{T}.$$

Eine grafische Darstellung der Indifferenzkurve ist in Abbildung 2.3 als blaue Kurve angegeben. Da hier nur ganzzahlige Konsumpläne auftreten, kann man statt von (stetigen) Indifferenzkurven genauer auch von Indifferenzklassen oder Äquivalenzklassen sprechen.

Robinsons Schlussfolgerungen

Robinson akzeptiert jede Verschiebung seines Konsumplans auf der durch den Punkt **Y** gehenden Indifferenzkurve, also insbesondere die Verschiebung vom Punkt $\mathbf{Y} = (0{,}60)^\mathsf{T}$ bis zum Punkt $\mathbf{Y}' = (55{,}0)^\mathsf{T}$, was eine Abänderung um den Zahlungsstrom (eine Finanzierung wegen $\Delta Y_0 > 0$)

$$\mathbf{\Delta Y} = (\Delta Y_0,\Delta Y_1)^\mathsf{T} = (55,-60)^\mathsf{T}$$

bedeutet. Durch diese Verschiebung (Transformation) $\mathbf{\Delta Y}$ erhält er aus **Y** den dazu äquivalenten (indifferenten) transformierten Zahlungsstrom **Y'**:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \mathbf{\Delta Y} = (55{,}0)^\mathsf{T} \sim \mathbf{Y}.$$

Dieser ist direkt (komponentenweise) mit dem Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (50{,}0)^\mathsf{T}$ vergleichbar, da der Differenzzahlungsstrom

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}' = (-5{,}0)^\mathsf{T}$$

direkt beurteilbar, also komponentenweise nichtnegativ ($\geq \mathbf{O}$) oder nichtpositiv ($\leq \mathbf{O}$) ist. Die Darstellung von **X** als Summe

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{\Delta Y} + \mathbf{V}$$

ist in der Abbildung 2.3 grafisch dargestellt. Da hier **V** (komponentenweise) nichtpositiv ist und in der ersten Komponente negativ ist, also $\mathbf{V} \lessdot \mathbf{O}$ und $\mathbf{Y}' \gtrdot \mathbf{X}$ ist, ist für Robinson der Zahlungsstrom **Y'** nach der natürlichen Halbordnung und seiner individuellen Präferenzordnung vorteilhafter als **X**: in formaler Schreibweise

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{X} - \mathbf{V} \succ \mathbf{X}.$$

Hier wird verwendet, dass Robinson als nicht gesättigt gilt, also seine auf der Menge

$$M = \{\mathbf{C} = (C_0,C_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : 0 \leq C_0 \leq 55,\ 0 \leq C_1 \leq 60\}$$

der möglichen Konsumpläne definierte Präferenzordnung (Präferenzrelation, eine totale Quasiordnung) $\succcurlyeq$, deren Existenz vorausgesetzt wird, zusätzlich die Eigenschaft der **Monotonie** aufweist:

$$(X_0 + \delta_0,X_1 + \delta_1)^\mathsf{T} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\delta} \succ \mathbf{X} \text{ für } \boldsymbol{\delta} = (\delta_0,\delta_1)^\mathsf{T} \gtrdot (0{,}0)^\mathsf{T} = \mathbf{O},$$

also für $\delta_0, \delta_1 \in \mathbb{N}_0$ mit $\delta_0 + \delta_1 > 0$. Hier wird also ein Zusammenhang zwischen der zur Präferenzordnung $\succcurlyeq$ („mindestens so vorteilhaft wie") gehörigen strengen Halbordnung $\succ$ („vorteilhafter als", „wird präferiert (vorgezogen) gegenüber") und der strengen natürlichen Halbordnung $\gtrdot$ („echt größer als") hergestellt: Ein bezüglich der strengen natürlichen Halbordnung $\gtrdot$ größerer Zahlungsstrom ist dann auch hinsichtlich der strengen individuellen Halbordnung $\succ$ vorteilhafter als der damit verglichene Zahlungsstrom.

Die Monotonie ist zu unterscheiden von der strikten Gegenwartspräferenz, die besagt, dass eine positive Zahlung δ heute günstiger ist als später: Für beliebige $\mathbf{X} = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ und $\delta > 0$ gilt

$$(X_0 + \delta,X_1)^\mathsf{T} \succ (X_0,X_1 + \delta)^\mathsf{T}.$$

Die Stärke der Gegenwartspräferenz ist individuell, objektbezogen, situationsbedingt, geschlechterspezifisch und stimmungsabhängig unterschiedlich ausgeprägt. Sie ist höher, wenn der Entscheider längere Zeit in Armut gelebt hat und eventuell sogar gehungert hat, und sie ist geringer, wenn seine Grundbedürfnisse schon weitgehend befriedigt wurden und er insbesondere genügend zu essen hatte. In der Günter Jauch-Live-Show „Typisch Mann – Typisch Frau" beim Fersehsender RTL am 25.03.2006 wurde in Tests über den Unterschied der Geschlechter gezeigt, dass eine Entscheidung beim Mann im Gegensatz zur Frau auch von der sexuellen Erregung abhängig ist.

Weiter folgt bei Robinsons Betrachtungen, dass mit **Y'** auch der zu **Y'** äquivalente Zahlungsstrom **Y** ($\mathbf{Y} \sim \mathbf{Y}'$) vorteilhafter als **X** ist:

$$\mathbf{Y} \succ \mathbf{X}.$$

Robinson entscheidet sich also für den Fischfang mit Netz und damit den zweiten Konsumplan **Y**. Für diese Folgerung wird die Transitivität der Präferenzordnung und die Transitivität der induzierten Indifferenzrelation (Äquivalenzrelation) verwendet: Aus $\mathbf{Y} \sim \mathbf{Y}'$ und $\mathbf{Y}' \succ \mathbf{X}$

folgt zunächst $\mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{Y}'$ und $\mathbf{Y}' \succcurlyeq \mathbf{X}$, also $\mathbf{Y} \succcurlyeq \mathbf{X}$. Weiter folgt $\mathbf{Y} \succ \mathbf{X}$, da sonst aus $\mathbf{Y} \sim \mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}' \sim \mathbf{Y}$ die Äquivalenz $\mathbf{Y}' \sim \mathbf{X}$ folgen würde, was aber im Widerspruch zu $\mathbf{Y}' \succ \mathbf{X}$ steht.

Die Akzeptanz der Finanzierung $\mathbf{\Delta Y}$ in der Ausgangssituation $\mathbf{Y}$ bedeutet, dass Robinson bereit ist, morgen auf 60 Fische zu verzichten, also morgen 60 Fische zu zahlen, wenn er dafür heute 55 Fische erhält. Die hinzugenommene indifferente Transformation $\mathbf{\Delta Y}$ ist für Robinson ein fiktives Ergänzungsgeschäft (Supplementgeschäft, Supplement, Transponement), das er hier mit sich selbst abschließt und das hier eine Zahlung von einem Zeitpunkt auf einen anderen überträgt (transponiert). Die Bezeichnung Supplement kommt vom lateinischen supplementum für Ergänzung und wird schon von Heister (1962), S. 37, verwendet. Diese Art der Duplizierung beschreibt den Fall, in dem sich Robinson spontan schon für den Zahlungsstrom **Y** entschlossen hat und dann doch zu einem späteren Zeitpunkt oder in einer anderen Situation die Entscheidung gemäß seiner Zeitpräferenz überprüfen und gegebenenfalls korrigieren möchte.

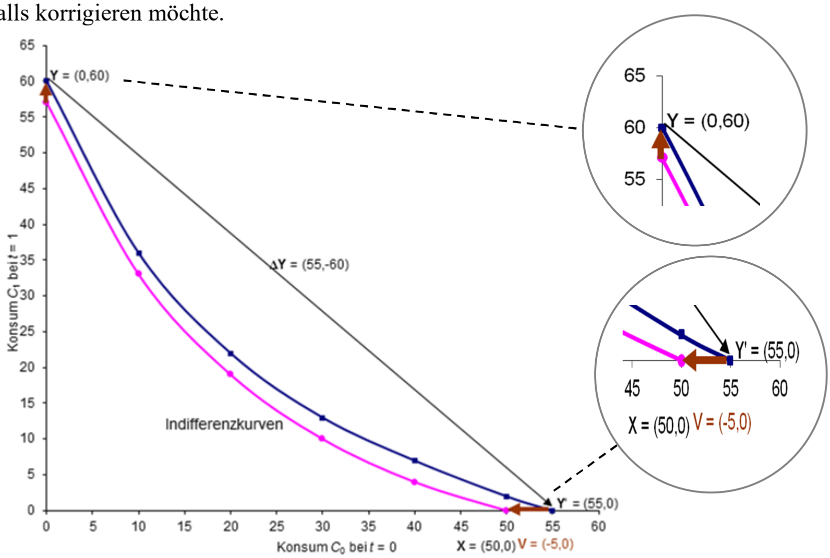


Abb. 2.3 Die Duplizierung des Konsumplans **X** mittels der Indifferenzkurve Ind(**Y**)

Analog kann Robinson der Ansicht sein, dass der Konsumplan $\mathbf{X} = (50,0)^{\mathsf{T}}$ für ihn indifferent (äquivalent) ist zum Konsumplan $\mathbf{X}' = (0,57)^{\mathsf{T}}$. Weitere auf der Indifferenzkurve Ind(**X**) durch **X** (rote Kurve in Abbildung 2.3) liegende Punkte könnten beispielsweise die folgenden Punkte $(C_0,C_1)^{\mathsf{T}}$ sein:

$$(10,33)^{\mathsf{T}}, (20,19)^{\mathsf{T}}, (30,10)^{\mathsf{T}}, (40,4)^{\mathsf{T}}.$$

Der Zahlungsstrom **X'** ist für ihn aber von besonderem Interesse, da dieser mit $\mathbf{Y} = (0,60)^{\mathsf{T}}$ direkt (komponentenweise) vergleichbar ist. Der Differenzzahlungsstrom

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}' = (0,3)^{\mathsf{T}}$$

ist direkt beurteilbar, also mit dem Nullvektor direkt vergleichbar ($\mathbf{V} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$, $= \mathbf{O}$ oder $\underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$). Hier ist $\mathbf{V} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$. Ausgehend von dem in Aussicht stehenden Konsumplan **X** akzeptiert er also die Transformation längs der Indifferenzkurve um den Zahlungsstrom (eine Investition)

$$\mathbf{\Delta X} = (\Delta X_0, \Delta X_1)^{\mathsf{T}} = (-50,57)^{\mathsf{T}}$$

und erhält den zu **X** äquivalenten transformierten Zahlungsstrom

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{\Delta X} = (0,57)^{\mathsf{T}},$$

der direkt (komponentenweise) mit **Y** vergleichbar ist. Da der Differenzzahlungsstrom $\mathbf{V} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}'$ nichtnegativ ist und in der zweiten Komponente positiv ist, ist für Robinson der Zahlungsstrom **X'** unvorteilhafter als **Y** (Monotonie der Präferenzrelation):

$$\mathbf{X}' = \mathbf{Y} - \mathbf{V} \prec \mathbf{Y}.$$

Demnach ist auch der zu **X'** äquivalente Zahlungsstrom **X** unvorteilhafter als **Y** (Transitivität der Präferenzrelation und der Indifferenzrelation):

$$\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}.$$

Robinson erhält damit auch bei seiner zweiten Überlegung dasselbe Ergebnis wie bei der ersten, nämlich dass **Y** vorteilhafter als **X** ist. Er entscheidet sich also für den Fischfang mit Netz und den Konsumplan **Y**. Die Akzeptanz der Investition **ΔX** in der Ausgangssituation **X** bedeutet, dass Robinson bereit ist, heute auf 50 Fische zu verzichten, wenn er dafür morgen 57 Fische erhält. Robinson legt damit den Preis auf $|\Delta X_0| = 50$ fest, den er heute zu zahlen bereit ist, um morgen einen Anspruch auf $\Delta X_1 = 57$ Fische zu haben. △

Konzept der Duplizierung

Es soll nun das von Robinson angewandte Bewertungskonzept näher beschrieben werden. Geht Robinson bei seiner Überlegung vom Zahlungsstrom **Y** aus und will er nun den alternativen Zahlungsstrom **X** als günstiger oder ungünstiger beurteilen, so bildet er ausgehend von **Y** durch Hinzunahme der indifferenten Supplementfinanzierung **ΔY** zunächst nur im Zeitpunkt $t = 1$ den Zahlungsstrom **X** exakt nach:

$$Y_1' = Y_1 + \Delta Y_1 = 0 = X_1.$$

Die exakte Nachbildung des gesamten Zahlungsstroms **X** zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{\Delta Y} + \mathbf{V},$$

erfolgt durch den Ausgangszahlungsstrom **Y**, die Hinzunahme des indifferenten Supplements **ΔY** und die zusätzliche Verwendung der beurteilbaren Zahlungsstromstruktur $\bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0)^\mathsf{T}$, mit der hier Robinson seine Zeitpräferenz für seinen Einkommensstrom präzisiert. Der Differenzvektor $\bar{\mathbf{V}}(\mu)$ berücksichtigt hier nur die zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörige Zahlungsstromkomponente. Insgesamt, also zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 0$, wird der Zahlungsstrom **X** dupliziert (dupliert, verdoppelt, nachgebildet) durch den auf der Indifferenzkurve von **Y** liegenden Zahlungsstrom $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \mathbf{\Delta Y}$ bis auf einen mittels der strengen Halbordnung $\dot{>}$ beurteilbaren Differenzzahlungsstrom

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot(1,0)^\mathsf{T}$$

mit $\mu = -5$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} + \mathbf{\Delta Y} + \mathbf{V} &= (0,60)^\mathsf{T} + (55,-60)^\mathsf{T} + (-5,0)^\mathsf{T}\\ &= (55,0)^\mathsf{T} + (-5,0)^\mathsf{T} = (50,0)^\mathsf{T}\\ &= \mathbf{Y}' + \mathbf{V} = \mathbf{X}.\end{aligned}$$

Da $\mathbf{V} \dot{<} \mathbf{O}$ ist, ist bei monotoner Präferenzordnung der Zahlungsstrom **Y'** vorteilhafter als **X** und somit ist auch der zu **Y'** äquivalente Zahlungsstrom **Y** vorteilhafter als **X**.

Genau genommen wird bei dieser Duplizierung (Duplikation, Nachbildung, Synthetisierung, additiven Zerlegung) des Zahlungsstroms **X** also **X** exakt nachgebildet durch das Duplikat (vom lateinischen duplicatum für Zweitausfertigung) **Y'** + **V**. Für den Entscheider Robinson ist also der real durchführbare Zahlungsstrom **X** identisch mit dem fiktiv aus **Y** konstruierbaren Zahlungsstrom **Y'** + **V**. Salopper wird oft auch formuliert, dass **X** bis auf einen beurteilbaren Differenzzahlungsstrom **V** nachgebildet wird durch das zu **Y** äquivalente „Duplikat" **Y'**, das mit **X** direkt vergleichbar ist. Bei der hier durchgeführten Duplizierung geht der Entscheider gedanklich auf der Indifferenzkurve Ind(**Y**) von **Y** bis zum Zahlungsstrom **Y**', der direkt mit **X** vergleichbar ist.

Je nachdem, ob der Differenzzahlungsstrom

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}' \gtrdot \mathbf{O}, = \mathbf{O} \text{ oder } \lessdot \mathbf{O}$$

ist, wird **X** hinsichtlich der Ind(**Y**) zugrunde liegenden monotonen Präferenzordnung vorteilhafter als **Y**, indifferent zu **Y** bzw. unvorteilhafter als **Y** angesehen.

Anforderungen an die Indifferenzkurve und die Beurteilungskurve V(μ)

Vorausgesetzt wird bei diesem Vergleichsverfahren, dass zumindest für einen der zu vergleichenden Zahlungsströme **X** oder **Y** eine Indifferenzkurve vorliegt, die zu einer monotonen Präferenzordnung $\succcurlyeq$ gehört. Außerdem wird jetzt vorausgesetzt, dass eine eindimensionale Zahlungsstromstruktur, eine Kurve **V**(μ), ausgewählt ist, die beurteilbar ist:

$$\mu \in J \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbf{V}(\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{V}(\mu) \gtrdot \mathbf{O}, = \mathbf{O} \text{ oder } \lessdot \mathbf{O}.$$

Wird beispielsweise die Indifferenzkurve Ind(**Y**) von **Y** und die Beurteilungskurve **V**(μ) benutzt, so wird weiter vorausgesetzt, dass für vorgegebenes **X** die Gleichung

$$\mathbf{Y}' + \mathbf{V}(\mu) = \mathbf{X}$$

eindeutig mit einem **Y**' $\in$ Ind(**Y**) und einem **V**(μ(**X**,**Y**)) lösbar ist, also **X** eindeutig additiv zerlegbar ist in einen zu **Y** indifferenten Zahlungsstrom **Y**' und einen beurteilbaren Kurvenpunkt **V**(μ). Bei den im Beispiel betrachteten speziellen Konsumplänen **X** und **Y** ist der Konsumplan **X** eindeutig duplizierbar mittels der Beurteilungskurve $\overline{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0)^{\mathsf{T}}$, aber nicht mittels $\hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\mu)^{\mathsf{T}}$, da hier für die Indifferenzkurve Ind(**Y**) keine Punkte mit negativem C_1 angegeben sind.

Unter den angegebenen Voraussetzungen kann das Konzept der Duplizierung eines Zahlungsstroms unter Verwendung des anderen Zahlungsstroms als Ausgangspunkt und Hinzunahme einer akzeptierten (indifferenten) Transformation auf der Indifferenzkurve und eines Beurteilungskurvenpunkts **V**(μ) für den Vergleich von Zahlungsströmen dienen. Mit diesen Hilfsmitteln, nämlich der Indifferenzkurve Ind(**Y**) durch **Y** und einer beliebig gewählten Beurteilungskurve **V**(μ), können also alle damit eindeutig duplizierbaren Zahlungsströme **X** mit dem fest gewählten **Y** verglichen werden. Das Ergebnis stimmt überein mit dem Vergleich mittels jeder monotonen Präferenzordnung $\succcurlyeq$, die eine Erweiterung der Indifferenzrelation ~ ist, mit der die Indifferenzkurve Ind(**Y**) gebildet wurde.

Hier im Spezialfall der Laufzeit $n = 1$ könnte noch gezeigt werden, dass die Indifferenzkurve Ind(**Y**) notwendig streng monoton fallend (streng antiton) ist, wenn die dahinterstehende Präferenzordnung monoton ist. Weiter könnte gezeigt werden, dass für einen gegebenen Zahlungsstrom **X** die Duplizierung bzw. die Lösung (**Y**',μ') des Gleichungssystems

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}' + \mathbf{V}(\mu'), \;\; \mathbf{Y}' \in \text{Ind}(\mathbf{Y}), \mu' \in J,$$

im Falle ihrer Existenz eindeutig bestimmt, wenn hier bei $n = 1$ die Indifferenzkurve Ind(**Y**) als streng monoton fallend und die Beurteilungskurve **V**(μ) noch als bezüglich der Halbordnung $\gtrdot$ streng monoton steigende (streng isotone) Kurve vorausge-

setzt ist. Diese Themen werden aber nicht weiter betrachtet, da hier das Hauptaugenmerk zunächst auf die formale Darstellung der Duplizierung gerichtet ist.
Die Existenz der Duplizierung für einen beliebig vorgegebenen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ bedeutet, dass $\mathbf{X}$ in der Menge

$$D := \mathrm{Ind}(\mathbf{Y}) + \mathbf{V}(J)$$

der duplizierbaren Zahlungsströme liegt, die durch die Spuren der Kurvenschar $\mathbf{Y}' + \mathbf{V}(\mu)$, $\mathbf{Y}' \in \mathrm{Ind}(\mathbf{Y})$, überdeckt wird. Die Lösbarkeit wird hier in Abschnitt 2.1 mit der individuellen Indifferenzkurve Ind($\mathbf{Y}$) für die betrachteten Zahlungsströme einfach mit vorausgesetzt und nicht weiter verfolgt. Im nachfolgenden Abschnitt 2.2 dagegen können für die durch den Kapitalmarkt gegebenen Indifferenzkurven Bedingungen angegeben werden, unter denen das Gleichungssystem stets eindeutig lösbar ist.

Anmerkung zur erzeugten Präferenzordnung
Anzumerken ist noch, dass der hier in Abschnitt 2.1.1 bestimmte Vergleichsvektor

$$\mathbf{w}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$$

von beiden Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ abhängt und mit dem Nullvektor $\mathbf{O}$ verglichen wird. Man erhält dabei dasselbe Vergleichsergebnis wie mit der monotonen Präferenzordnung des Entscheiders. Im nachfolgenden Abschnitt 2.1.2 dagegen hängt der Beurteilungsvektor $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ nur von $\mathbf{X}$ und nicht auch noch vom anderen Zahlungsstrom $\mathbf{Y}$ ab. Mit dem Vergleich der Beurteilungsvektoren $\mathbf{w}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{w}(\mathbf{Y})$ wird dann eine neue Präferenzordnung für die Konsumpläne definiert, die sich von der ursprünglich verwendeten Präferenzordnung des Entscheiders unterscheidet.

2.1.2 Duplizierung der beiden Zahlungsströme mit einem neutralen Zahlungsstrom als Ausgangspunkt

Robinson wendet jetzt das Konzept der Duplizierung noch in einer vereinfachten Methode an, wobei er für die Beurteilung der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ als Bezug nicht jeweils den anderen Zahlungsstrom $\mathbf{Y}$ bzw. $\mathbf{X}$, sondern einen neutralen Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ nimmt:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}' + \mathbf{V}.$$

Er dupliziert $\mathbf{X}$ durch die Summe des neutralen Zahlungsstroms $\mathbf{U}$, einer Verschiebung $\Delta\mathbf{U}$ auf der Indifferenzkurve von $\mathbf{U}$ und eines direkt beurteilbaren Zahlungsstroms $\mathbf{V}$. Die Indifferenzkurve Ind($\mathbf{U}$) soll dabei Teil einer monotonen Präferenzordnung des Entscheiders sein, also mit der zur Präferenzordnung gehörigen Indifferenzrelation gebildet werden. Der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ ist mittels des direkt beurteilbaren Differenzzahlungsstroms $\mathbf{V} = \mathbf{X} - \mathbf{U}'$ wegen der strengen Monotonie der Präferenzordnung $\succcurlyeq$ mit $\mathbf{U}'$ vergleichbar. Der Zahlungsstrom $\mathbf{U}' = \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}'$ ist indifferent zu $\mathbf{U}$. Demzufolge ist $\mathbf{X}$ auch mit dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ vergleichbar. Aus dem jeweiligen Vergleich der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ mit dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ wird dann noch ein Vergleich der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ konstruiert.

Beispiel 2.2 Vergleich der Konsumpläne X und Y mit dem festen Konsumplan U durch die Duplizierung mittels der Indifferenzkurve Ind(**U**)

Robinson kann heute und morgen jeweils den ganzen Tag ohne Netz Fische fangen und erlangt so den Einkommensstrom

$\mathbf{X} = (30{,}30)^{\mathsf{T}}$.

Als Alternative dazu kann er heute vormittags ohne Netz Fische fangen und nachmittags ein Netz knüpfen und morgen mit diesem Netz auf Fischfang gehen. Hierbei kommt er zu der Einkommensverteilung

$\mathbf{Y} = (10{,}52)^{\mathsf{T}}$.

Robinson überlegt, welche der beiden Möglichkeiten für ihn vorteilhafter ist. Die Zahlungsströme **X** und **Y** sind wieder nicht direkt vergleichbar.

In der nachfolgenden Abbildung 2.4 sind die Indifferenzkurven von **X** und **Y** dargestellt. Statt durch die Angabe der Kurvenpunkte $(C_0,C_1)^{\mathsf{T}}$ können die Indifferenzkurven auch mittels der Wertetabellen der jeweiligen Konsumfunktion $C_0 \mapsto C_1(C_0)$ oder deren Umkehrfunktion $C_1 \mapsto C_0(C_1)$ beschrieben werden:

	C_0	0	5	10	12	15	20	25	30	35	81	87
Ind(**X**):	$C_1(C_0)$	76	65	55	52	47	41	35	30	26	2	0
Ind(**Y**):	$C_1(C_0)$	74	62	52	49	44	38	32	27	23	0	--

Robinson nimmt jetzt für die Duplizierung der Zahlungsströme

$\mathbf{X} = (30{,}30)^{\mathsf{T}}$ und $\mathbf{Y} = (10{,}52)^{\mathsf{T}}$

als Bezug aber nicht jeweils den anderen Zahlungsstrom **Y** bzw. **X**, sondern einen neutralen Bezugspunkt wie beispielsweise den willkürlich fest fixierten Konsumplan

$\mathbf{U} = (20{,}39)^{\mathsf{T}}$.

Statt der mit den zu vergleichenden Zahlungsströmen variierenden Indifferenzkurven durch **X** oder **Y** verwendet er jetzt nur die fest fixierte Indifferenzkurve Ind(**U**) durch **U**. Auf dieser liegen beispielsweise die Konsumpläne

Ind(**U**): $(0{,}75)^{\mathsf{T}}$, $(5{,}63)^{\mathsf{T}}$, $(10{,}53)^{\mathsf{T}}$, $(11{,}52)^{\mathsf{T}}$, $(14{,}47)^{\mathsf{T}}$, $(15{,}46)^{\mathsf{T}}$, $(18{,}41)^{\mathsf{T}}$, $(19{,}40)^{\mathsf{T}}$, $(20{,}39)^{\mathsf{T}}$, $(23{,}35)^{\mathsf{T}}$, $(25{,}33)^{\mathsf{T}}$, $(28{,}30)^{\mathsf{T}}$, $(30{,}28)^{\mathsf{T}}$, $(33{,}26)^{\mathsf{T}}$, $(35{,}24)^{\mathsf{T}}$, $(41{,}20)^{\mathsf{T}}$, $(79{,}2)^{\mathsf{T}}$, $(84{,}0)^{\mathsf{T}}$.

Robinson vergleicht zunächst **X** und **Y** jeweils mit **U** und gelangt dann mittels der Definition einer neuen Präferenzordnung auch zu einem Vergleich von **X** mit **Y**. Es wird sich aber zeigen, dass dieser Vergleich sich vom obigen in Abschnitt 2.1.1 unterscheidet. Für die Beurteilung mittels der Duplizierung verwendet er als Ausgangspunkt **U** und die Beurteilungskurve der Form $\bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0)^{\mathsf{T}}$, die zur exakten Duplizierung im Zeitpunkt $t = 1$ gehört. Diese Duplizierung von **X** ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Analog könnte er auch die Beurteilungskurve in der Form $\hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\mu)^{\mathsf{T}}$ oder $\check{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,\mu)^{\mathsf{T}}$ oder eine eine ähnliche Beurteilungskurve nehmen. Auf die benötigten Eigenschaften der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ wird unten noch näher eingegangen. Bei Verwendung von $\bar{\mathbf{V}}(\mu)$ ist zur Darstellung der Indifferenzkurve Ind(**U**) von **U** die Wertetabelle der Funktion $C_0(C_1)$ zweckmäßiger:

	C_1	0	2	20	26	30	35	40	41	47	52	55	65	75
Ind(**U**):	$C_0(C_1)$	84	79	41	33	28	23	19	18	14	11	8	3	0

Bei der Duplizierung von $\mathbf{X} = (30{,}30)^{\mathsf{T}}$ mit Ausgangspunkt $\mathbf{U} = (20{,}39)^{\mathsf{T}}$ erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}' + \mathbf{V}' \\ &= \mathbf{U}' + \mathbf{V}'\end{aligned}$$

mit $\Delta\mathbf{U}' = (8,-9)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{U}' = (28{,}30)^{\mathsf{T}} \in$ Ind(**U**) und $\mathbf{V}' = \bar{\mathbf{V}}(2) = (2{,}0)^{\mathsf{T}} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$. Da **V'** bezüglich $\underset{\cdot}{>}$ positiv ist, ist **X** größer als **U'**:

$\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{U}'$, somit **X** vorteilhafter als **U**' (Monotonie der Präferenzrelation siehe in Beispiel 2.1),

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{U}',$$

und damit **X** auch vorteilhafter als der zu **U**' äquivalente Zahlungsstrom **U** (Transitivität der Präferenzrelation $\succcurlyeq$ und der Indifferenzrelation ~):

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{U}.$$

Wenn man die Indifferenzkurve Ind(**U**) von **U** als Nulllinie nimmt, kann **X** somit als vorteilhaft beurteilt werden.

Für die Beurteilung von $\mathbf{Y} = (10{,}52)^\mathsf{T}$ verwendet er ebenfalls die Duplizierung mit Ausgangspunkt **U** und einem Beurteilungszahlungsstrom der Form $\bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0)^\mathsf{T}$ und erhält

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}'' + \mathbf{V}'' \\ &= \mathbf{U}'' + \mathbf{V}''\end{aligned}$$

mit $\Delta\mathbf{U}'' = (-9{,}13)^\mathsf{T}$, $\mathbf{U}'' = (11{,}52)^\mathsf{T} \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U})$ und $\mathbf{V}'' = (-1{,}0)^\mathsf{T} \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$. Da **V**" (bezüglich $\underset{\cdot}{>}$) negativ ist, ist **Y** kleiner als **U**" ($\mathbf{Y} \underset{\cdot}{<} \mathbf{U}''$), **Y** unvorteilhafter als **U**" ($\mathbf{Y} \prec \mathbf{U}'$) und damit **Y** auch unvorteilhafter als der zu **U**" äquivalente Zahlungsstrom **U**:

$$\mathbf{Y} \prec \mathbf{U}.$$

Bei Verwendung der Indifferenzkurve Ind(**U**) als Nulllinie kann **Y** somit als unvorteilhaft beurteilt werden. Ein Vergleich der beiden Zahlungsströme **X** und **Y** wird in der unten folgenden Fortsetzung des Beispiels behandelt. △

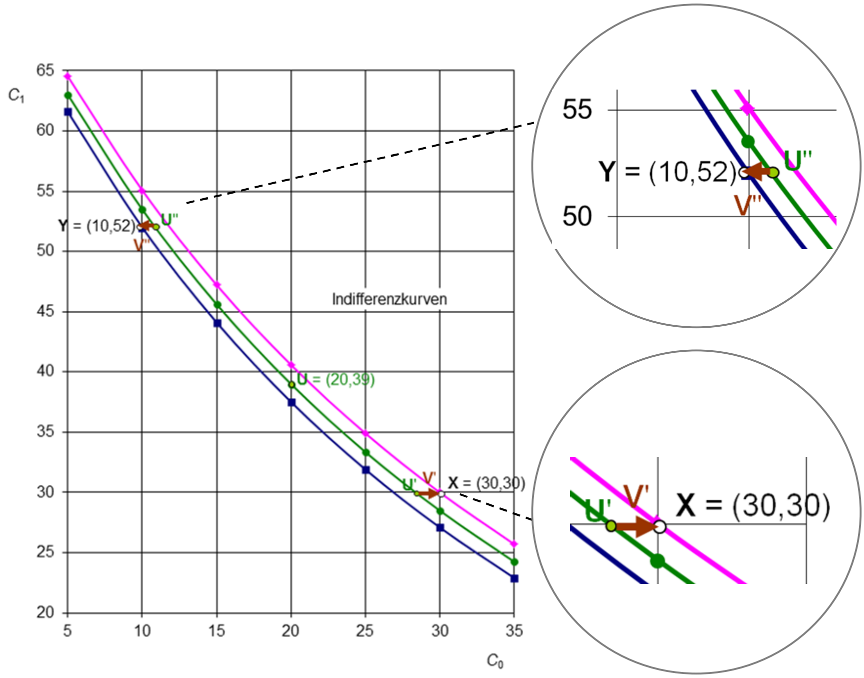


Abb. 2.4 Die Duplizierung der Konsumpläne **X** und **Y** mittels der Indifferenzkurve Ind(**U**) und der Beurteilungskurve $\bar{\mathbf{V}}(\mu)$

Robinson kann also **X** und **Y** jeweils mit **U** vergleichen. Er will nun aber auch die Zahlungsströme **X** und **Y** miteinander vergleichen. Hier im Beispiel liegen **X** und **Y** auf verschiedenen Seiten der durch **U** gehenden Indifferenzkurve, sodass aus $\mathbf{X} \succ \mathbf{U}$ und $\mathbf{U} \succ \mathbf{Y}$ schon mittels der Transitivität der Präferenzrelation die Aussage $\mathbf{X} \succ \mathbf{Y}$

folgt. Der Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (30,30)^\mathsf{T}$ ist also vorteilhafter als der Zahlungsstrom $\mathbf{Y} = (10,52)^\mathsf{T}$. Ein Vergleich von Konsumplänen **X** und **Y** gelingt nachfolgend aber auch im allgemeinen Fall, also auch wenn **X** und **Y** auf der gleichen Seite der Indifferenzkurve von **U** liegen. Es wird sich dabei aber zeigen, dass nicht in allen Fällen dasselbe Resultat wie bei der obigen direkteren Methode von Abschnitt 2.1.1 (ohne Verwendung von **U**) erzielt wird.

Es wird jetzt kurz zusammengefasst, welches Instrumentarium Robinson für den Vergleich der Zahlungsströme **X** und **Y** bereitgestellt hat. Er hat die durch den Bezugspunkt **U** verlaufende Indifferenzkurve Ind(**U**) bestimmt und eine Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ als eine beurteilbare und stetige Kurve

$$\mathbf{V} : \mu \in J =]a,b[\subset \mathbb{R} \mapsto \mathbf{V}(\mu) \in \mathbb{R}^2_{+0} \cup \{\mathbf{O}\} \cup \mathbb{R}^2_{-0}\,,$$

festgelegt, die durch den Nullpunkt verläuft und jetzt noch bezüglich der Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ streng monoton steigend ist. Es gibt also ein $\mu_0 \in J$ mit $\mathbf{V}(\mu_0) = \mathbf{O}$, $\mathbf{V}(\mu) \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ für $\mu > \mu_0$ und $\mathbf{V}(\mu) \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$ für $\mu < \mu_0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann noch $\mu_0 = 0$ angenommen werden, da man anderenfalls zur Kurve $\mathbf{V}^*(\mu) = \mathbf{V}(\mu - \mu_0)$ übergehen kann. Der jeweilige Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{V}(\mu)$ liegt also im nichtnegativen oder im nichtpositiven Quadranten von $\mathbb{R}^2$, sodass der Ortsvektor $\mathbf{V}(\mu)$ keinen Vorzeichenwechsel aufweist und beurteilbar, d. h. mit **O** vergleichbar, ist. Hier im Beispiel ist $\mathbf{V}(\mu) = \overline{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0)^\mathsf{T}$.

Jedem Zahlungstrom **X** in der Menge M der von ihm betrachteten Konsumpläne,

$$M = \{\mathbf{C} = (C_0,C_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \;:\; 0 \le C_0 \le 87,\ 0 \le C_1 \le 76\},$$

der sich mit diesem Instrumentarium eindeutig duplizieren lässt (Voraussetzung an **X**!),

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U}),\ \mu(\mathbf{X}) \in J,$$

kann Robinson eindeutig sowohl einen zum Bezugspunkt **U** äquivalenten Konsumplan $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X})$ als auch einen Beurteilungsvektor

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) := \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$$

zuordnen. Die Einzigkeit der Duplizierung von **X** könnte wie im vorigen Abschnitt 2.1.1 nachgewiesen werden, wenn die hier verwendete Indifferenzkurve Ind(**U**) zu einer monotonen Präferenzordnung gehört und wenn die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ streng monoton steigend ist. Die Existenz der Duplizierung des betrachteten Zahlungsstroms **X** wird hier einfach mit vorausgesetzt. Hier zeigt sich ein Unterschied zu der in Abschnitt 2.1.1 verwendeten Methode: Dort kann dem zu vergleichenden Konsumplan **X** kein eindeutig bestimmter Beurteilungsvektor zugeordnet werden, da der beurteilbare Differenzzahlungsstrom $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$ auch vom alternativen Konsumplan **Y** abhängt. Hier in Abschnitt 2.1.2 dagegen hängt der Beurteilungsvektor $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ zwar auch noch von Bezugspunkt **U** ab, doch ist dieser für alle **X** konstant gewählt. Auf der Menge

$$D = \{\mathbf{C} = (C_0,C_1)^\mathsf{T} : 0 \le C_0 \le 84,\ 0 \le C_1 \le 75\}$$

der duplizierbaren Konsumpläne ist damit eine zweidimensionale Beurteilungsfunktion (Präferenzfunktion)

$$\mathbf{X} \in D \mapsto \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \in \mathbf{V}(J) \subset \mathbb{R}^2$$

definiert, die jeder einzelnen Alternative $\mathbf{X}$ einen Beurteilungsvektor (Bewertungsvektor, Vergleichsvektor) $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ zuordnet. Eine grafische Darstellung der Beurteilungsfunktion $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$, der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ und der nachfolgend noch behandelten Nutzenfunktion $v(\mathbf{X})$ ist in Abbildung 2.5 gegeben. Auf Grund der strengen Monotonie der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ sind alle Beurteilungsvektoren mittels der Halbordnung $\geq$ des $\mathbb{R}^2$ untereinander vergleichbar. Nach Festlegung der Zielrichtung für den Beurteilungsvektor (Beurteilungsvektor maximieren oder minimieren) sind die Zielvorstellungen des Entscheiders bei der Lösung des Entscheidungsproblems präzisiert. Ausführlichere Erörterungen zu den Begriffen Zielfunktion eines Entscheidungsproblems, (eindimensionale) Präferenzfunktion für die Alternativen und Nutzenfunktion (Bewertungsfunktion) für deren Ergebnisse findet man beispielsweise bei Laux (2007), S. 23ff.
Beschreibt man die Indifferenzkurve Ind($\mathbf{U}$) durch die zugehörige Konsumfunktion $C_0(C_1)$, so gilt für den Punkt $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X})$ auf der Indifferenzkurve

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) = (C_0, C_1(C_0))^{\mathsf{T}}$$

mit eindeutig bestimmtem $C_0 = C_0(\mathbf{X})$. Wählt man noch für den Kurvenparameter die Abkürzung $\mu = \mu(\mathbf{X})$, so ist die eindeutige Duplizierbarkeit von $\mathbf{X}$ gleichbedeutend zur eindeutigen Lösbarkeit des im Allgemeinen nichtlinearen Gleichungssystems für die zwei Unbekannten C_0 und μ :

$$\begin{aligned} C_0 \quad &+ V_0(\mu) &= X_0, \\ C_1(C_0) &+ V_1(\mu) &= X_1. \end{aligned}$$

Bei Vorliegen einer allgemeiner definierten Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ (statt $\bar{\mathbf{V}}(\mu)$) ist diese eindeutige Lösbarkeit durch zusätzliche Bedingungen an $\mathbf{V}(\mu)$ und $C_1(C_0)$ noch zu sichern. In dem hier betrachteten Spezialfall $\mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = \mu \cdot (1,0)^{\mathsf{T}}$ kann aber das Gleichungssystem für jedes $\mathbf{X} \in D$ auf einfache Weise sogar explizit gelöst werden.

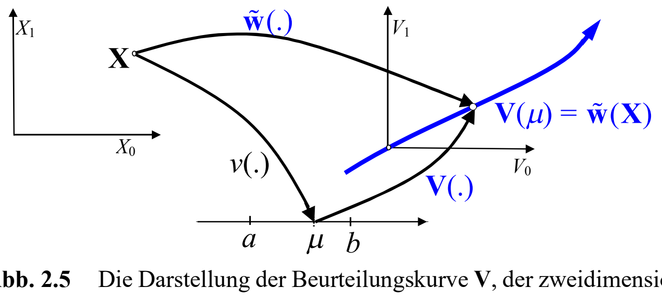


Abb. 2.5 Die Darstellung der Beurteilungskurve $\mathbf{V}$, der zweidimensionalen Beurteilungsfunktion $\tilde{\mathbf{w}}$ und der Nutzenfunktion v

Mit Hilfe der Beurteilungsvektoren $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ und $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$ kann nun Robinson die eindeutig duplizierbaren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ vergleichen und somit auf der Menge M eine **neue Quasiordnung** (Präordnung, eine reflexive und transitive Relation) $\trianglerighteq$ definieren.

Er legt fest, dass für eindeutig duplizierbare **X** und **Y** genau dann die Relation

$$\mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist mindestens so günstig wie }\mathbf{Y}\text{)}$$

gilt, wenn für die zu **X** und **Y** gehörigen Beurteilungsvektoren die folgende Ungleichung gilt:

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \geq \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}).$$

Duplizierbare **X** und **Y** sind damit stets vergleichbar, d. h. es gilt $\mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}$ oder $\mathbf{Y} \trianglerighteq \mathbf{X}$, da wegen der strengen Monotonie der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ die Kurvenpunkte $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$, $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) \in \mathbf{V}(J)$ stets vergleichbar sind. Die Reflexivität und Transitivität der Quasiordnung $\trianglerighteq$ ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften der in $\mathbb{R}^2$ definierten Halbordnung $\geq$ für die Beurteilungsvektoren.

Für die mit der neuen Quasiordnung auch induzierte Äquivalenzrelation (Indifferenzrelation) $\simeq$ gilt dann

$$\mathbf{X} \simeq \mathbf{Y} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist ebenso günstig wie }\mathbf{Y}\text{)} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$$

und für die induzierte strenge Halbordnung (Halbordnung 2. Art, Striktordnung, eine transitive und irreflexive Relation) $\vartriangleright$ gilt

$$\mathbf{X} \vartriangleright \mathbf{Y} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist günstiger als }\mathbf{Y}\text{)} \qquad \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \underset{\cdot}{>} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}).$$

Beispiel 2.2 – Fortsetzung 1: Vergleich der Konsumpläne X und Y mittels ihrer Beurteilungsvektoren

Robinson erhält für die betrachteten speziellen Zahlungsströme $\mathbf{X} = (30,30)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{Y} = (10,52)^\mathsf{T}$ in der oben ausgeführten Duplizierung die Beurteilungsvektoren

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}' = (2,0)^\mathsf{T} \text{ und}$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}'' = (-1,0)^\mathsf{T},$$

also die Ungleichung

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) - \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) = (3,0)^\mathsf{T} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O},$$

sodass bezüglich der neu definierten strengen Halbordnung $\vartriangleright$ der Zahlungsstrom **X** günstiger als **Y** ist:

$$\mathbf{X} \vartriangleright \mathbf{Y}.$$

Der Zahlungsstrom **U** hat die Duplizierung

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) + \bar{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{U}))$$

mit dem Indifferenzkurvenpunkt $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$ und dem Beurteilungsvektor $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{U}) = \bar{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{U})) = \mathbf{O}$.

Wenn man die Indifferenzkurve Ind(**U**) von **U** als Nulllinie nimmt, so kann wegen

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \underset{\cdot}{>} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{U}) \underset{\cdot}{>} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$$

der Zahlungsstrom **X** als vorteilhaft und der Zahlungsstrom **Y** als unvorteilhaft beurteilt werden.

Für den Nullkonsumplan **O** ergibt sich die Duplizierung

$$\begin{aligned}\mathbf{O} &= \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}(\mathbf{O}) + \bar{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{O})) \\ &= \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{O}) + \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{O})\end{aligned}$$

mit dem Punkt $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{O}) = (84,0)^\mathsf{T}$ auf der Indifferenzkurve Ind(**U**) und dem Beurteilungsvektor

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{O}) = \bar{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{O})) = (-84,0)^\mathsf{T}.$$

Der Vergleich der Konsumpläne **X** und **Y** mit **O** liefert

$$\mathbf{X} \vartriangleright \mathbf{O} \text{ und } \mathbf{Y} \vartriangleright \mathbf{O}.$$

Wenn nun der Nullkonsumplan **O** als Nullpunkt (Nulllinie) der Präferenzordnung gewählt wird, so können **X** und **Y** als günstig beurteilt werden. △

Diese neu definierte Quasiordnung $\trianglerighteq$ ist aber auf der Menge M der betrachteten Konsumpläne nicht total, also keine Präferenzordnung, da es Konsumpläne $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in M$ gibt, die damit nicht vergleichbar sind. Beispielsweise ist der Zahlungsstrom $\widehat{\mathbf{X}} = (0{,}76)^\mathsf{T} \in \mathrm{Ind}(\mathbf{X})$ bezüglich der Quasiordnung $\trianglerighteq$ nicht mit $\widehat{\mathbf{U}} = (0{,}75)^\mathsf{T} \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U})$ vergleichbar, da $\widehat{\mathbf{X}}$ nicht duplizierbar ist: Es gibt keine Vektoren $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U})$ und $\overline{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0)^\mathsf{T}$ mit

$$\widehat{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{U}} + \overline{\mathbf{V}}(\mu)\,.$$

Die Totalität der Relation $\trianglerighteq$ ist aber auf der oben angegebenen Menge

$$D = \{\mathbf{C} = (C_0,C_1)^\mathsf{T} : 0 \le C_0 \le 84,\ 0 \le C_1 \le 75\}$$

der duplizierbaren Zahlungsströme gegeben, sodass $\trianglerighteq$ eine Präferenzordnung auf D ist. Mit Hilfe der Abbildung (Beurteilungsfunktion)

$$\tilde{\mathbf{w}} : \mathbf{X} \in D \mapsto \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \in \mathbf{V}(J)$$

konnte somit aus der Totalordnung $\geq$ auf $\mathbf{V}(J)$ eine Präferenzordnung $\trianglerighteq$ auf D erzeugt werden.

Die neue Präferenzordnung $\trianglerighteq$ auf D unterscheidet sich geringfügig von der ursprünglich verwendeten Präferenzordnung $\succcurlyeq$: So sind beispielsweise die Konsumpläne $\mathbf{X} = (30{,}30)^\mathsf{T}$, $\mathbf{X}' = (12{,}52)^\mathsf{T} \in \mathrm{Ind}(\mathbf{X})$ indifferent bezüglich der Präferenzordnung $\succcurlyeq$,

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{X}',$$

aber nicht indifferent bezüglich dieser neuen Präferenzordnung $\trianglerighteq$: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) &= \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) &&= (30{,}30)^\mathsf{T} - (28{,}30)^\mathsf{T} &&= (2{,}0)^\mathsf{T},\\
\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}') &= \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}')) = \mathbf{X}' - \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}') &&= (12{,}52)^\mathsf{T} - (11{,}52)^\mathsf{T} &&= (1{,}0)^\mathsf{T},
\end{aligned}$$

also $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \mathrel{\dot{>}} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}')$, $\mathbf{X} \rhd \mathbf{X}'$ und

$$\mathbf{X} \not\simeq \mathbf{X}'.$$

Der Grund für die Verschiedenheit der Vergleiche mittels der Präferenzordnungen $\succcurlyeq$ bzw. $\trianglerighteq$ spiegelt sich in der Verschiedenheit der Indifferenzkurven wider. Die Indifferenzkurve zu einem fest vorgegebenen duplizierbaren Zahlungsstrom $\mathbf{X^*} \in D$,

$$\mathbf{X^*} = \mathbf{U^*} + \mathbf{V^*}$$

mit $\mathbf{U^*} = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X^*}) \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U})$ und $\mathbf{V^*} = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{U^*}) = \overline{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{U^*}))$, bezüglich der Quasiordnung $\trianglerighteq$, also die $\simeq$-Äquivalenzklasse von $\mathbf{U^*}$, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\simeq}(\mathbf{X^*}) &= \{\mathbf{C} \in D : \mathbf{C} \simeq \mathbf{U^*}\}\\
&= \{\mathbf{C} \in D : \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{C}) = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{U^*}) = \mathbf{V^*}\}\\
&= \tilde{\mathbf{w}}^{-1}(\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{U^*}))\\
&= \{\mathbf{C} \in D : \mathbf{C} = \mathbf{U}' + \mathbf{V^*},\ \mathbf{U}' \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U})\}\\
&= \mathrm{Ind}(\mathbf{U}) + \overline{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{X^*}))\,.
\end{aligned}$$

Man erhält sie also aus der Indifferenzkurve $\mathrm{Ind}(\mathbf{U})$ von $\mathbf{U}$ mittels einer Translation mit dem festen Verschiebungsvektor (Translationsvektor) $\mathbf{V^*} = \overline{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{X^*}))$ der Beurteilungskurve. Insbesondere ist für die Konsumpläne $\mathbf{U^*} \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U})$ die neue $\simeq$-Äquivalenzklasse gleich der alten $\sim$-Äquivalenzklasse:

$$\mathrm{Ind}_{\simeq}(\mathbf{U^*}) = \mathrm{Ind}(\mathbf{U}).$$

Die Gesamtheit der Indifferenzkurven der neuen Präferenzordnung $\trianglerighteq$ auf D ist gegeben durch die Kurvenschar

$$\mathbf{V}(\mu) + \mathrm{Ind}(\mathbf{U}),\ \mu = \mu(\mathbf{X}) \text{ für ein } \mathbf{X} \in D,$$

die sich im Allgemeinen von der Schar der evtl. auch unbekannten Indifferenzkurven Ind($\mathbf{X}$), $\mathbf{X} \in D$, der vorgegebenen Quasiordnung $\succcurlyeq$ unterscheidet. Damit ist im Allgemeinen die hier im Abschnitt 2.1.2 mittels der Duplizierung neu definierte Quasiordnung $\trianglerighteq$ verschieden von der ursprünglichen Präferenzordnung $\succcurlyeq$, die der Indifferenzkurve Ind($\mathbf{U}$) zugrunde liegt.

Für die neu definierte Präferenzordnung könnte man auch noch die **Monotonie** zeigen. Der Beweis wird hier aber weggelassen. Es wird nur noch kurz auf die Existenz einer **Nutzenfunktion** eingegangen. Da die Beurteilungskurve

$$\mathbf{V} : \mu \in J =]a,b[\subset \mathbb{R} \mapsto \mathbf{V}(\mu) \in \mathbb{R}^2$$

bezüglich der Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ eine streng monoton steigende Funktion ist, ist $\mathbf{V}(\mu)$ eine injektive und damit auf dem Bildbereich $\mathbf{V}(J)$ umkehrbare Funktion. Zu jedem Kurvenpunkt $\mathbf{T} = \mathbf{V}(\mu) \in \mathbf{V}(J)$ erhält man mittels der Umkehrfunktion eindeutig den Kurvenparameter $\mu = \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{T})$ wieder zurück. Jedem duplizierbaren Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ kann daher Robinson auf dem Weg über den Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mu)$ auch eindeutig den Kurvenparameter

$$\mu = \mathbf{V}^{-1}(\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X})) =: v(\mathbf{X})$$

als eine reelle Maßzahl zuordnen. Da die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ streng monoton steigend ist, erhält man somit auf der Menge D der duplizierbaren Konsumpläne $\mathbf{X}$ eine zur Quasiordnung $\trianglerighteq$ gehörige ordinale (nach Duden (2003), S. 965, eine Ordnung anzeigende) Nutzenfunktion (*engl.* utility function, value function)

$$v : \mathbf{X} \in D \mapsto \mu = v(\mathbf{X}) := \mathbf{V}^{-1}(\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X})) \in J \subset \mathbb{R}$$

d. h. die folgende Charakterisierung der Quasiordnung $\trianglerighteq$ mittels der Funktion v und der Ordnung $\geq$ in $\mathbb{R}$:

$\mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}$	($\mathbf{X}$ ist mindestens so günstig wie $\mathbf{Y}$) $\Leftrightarrow v(\mathbf{X}) \geq v(\mathbf{Y})$,
$\mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}$	($\mathbf{X}$ ist ebenso günstig wie $\mathbf{Y}$) $\Leftrightarrow v(\mathbf{X}) = v(\mathbf{Y})$,
$\mathbf{X} \triangleright \mathbf{Y}$	($\mathbf{X}$ ist günstiger als $\mathbf{Y}$) $\Leftrightarrow v(\mathbf{X}) > v(\mathbf{Y})$.

Statt zur Beschreibung der Präferenzordnung $\trianglerighteq$ auf D explizit die Vergleiche für alle vergleichbaren Paare $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in D \times D$ anzugeben, ist es meist einfacher diese Regel anzugeben, bei der mittels Vergleich der Funktionswerte $v(\mathbf{X})$ und $v(\mathbf{Y})$ in $\mathbb{R}$ der Vergleich der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ resultiert. Den gleichen Dienst wie die Nutzenfunktion v mit ihren Funktionswerten in $\mathbb{R}$ leistet hier aber auch schon die mittels der Beurteilungsvektoren $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ auf D definierte zweidimensionale (im Allgemeinen eine (n+1)-dimensionale) Beurteilungsfunktion (Präferenzfunktion)

$$\tilde{\mathbf{w}} : \mathbf{X} \in D \mapsto \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \in \mathbf{V}(J) \subset \mathbb{R}^2,$$

da wegen der strengen Monotonie der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ auf ihrer Spur $\mathbf{V}(J)$ mittels der Halbordnung $\geq$ des $\mathbb{R}^2$ ebenfalls eine (totale) Ordnung gegeben ist. Im

Unterschied dazu hat man im Abschnitt 2.1.1 eine auf $D \times D$ (statt auf D) definierte zweidimensionale Vergleichsfunktion

$$\mathbf{w}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X},\mathbf{Y})),$$

mittels welcher der Vergleich von **X** und **Y** durch den Vergleich des Funktionswerts $\mathbf{w}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ mit dem Nullvektor **O** charakterisiert wird.

Untersuchungen zu dem Thema, wann eine Präferenzordnung durch eine ordinale Nutzenfunktion beschreibbar ist, findet man beispielsweise bei Jarrow (1988), S. 11, 12, 14–16, und Kruschwitz (1999), S. 29–33. Dort wird mit den zusätzlichen Eigenschaften der Stetigkeit (intermediate value axiom), der Dominanz (order preserving axiom) und der Beschränktheit (boundedness axiom, für die leichtere Beweisführung) für die Präferenzordnung die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion v bewiesen. Diese ist nur bis auf die Nachschaltung einer streng monoton steigenden Transformation $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eindeutig ($J = \mathbb{R}$). Alle weiteren zugehörigen Nutzenfunktionen u sind also gegeben durch

$$u = g \circ v(\mathbf{X}) = g(v(\mathbf{X}))$$

mit einer beliebigen streng monoton steigenden Transformation g.

Da bei den alternativen Konsumplänen die Möglichkeiten bzw. Konsequenzen der Entscheidung zu verschiedenen Zeitpunkten auftreten, spricht man von intertemporalen Entscheidungen, intertemporalen Präferenzen und einer intertemporalen Nutzenfunktion. Letztere ist ein Spezialfall der multiattributiven Nutzenfunktion (Eisenführ und Weber (2003), S. 292).

Die Indifferenzkurven sind die Urbildmengen der Funktion v zu den verschieden möglichen Funktionswerten $\mu^* = v(\mathbf{X}^*)$ des Bildbereichs $v(D) \subset J$ und werden demnach auch als Isonutzenkurven (Isonutzenlinien, Niveaulinien) bezeichnet:

$$\mathrm{Ind}_{\cong}(\mathbf{X}^*) = v^{-1}(\{\mu^*\}) = \{\mathbf{C} \in D : v(\mathbf{C}) = \mu^*\}.$$

Bei der dreidimensionalen Darstellung des Graphen (Funktionsgraph, Schaubild)

$$N = \{(\mathbf{X}, v(\mathbf{X})) : \mathbf{X} \in D\} \subset \mathbb{R}^3,$$

der Nutzenfunktion $v(\mathbf{X}) = v(X_0, X_1)$ spricht man anschaulich auch von einem Nutzengebirge, für welches die Indifferenzkurven die Höhenlinien darstellen. Eine grafische Darstellung einer Nutzenfunktion ist in Abbildung 2.6 angegeben.

Für jedes feste $\mathbf{X} \in D$ bestimmt man aus der Duplizierungsgleichung von **X**,

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})),$$

eindeutig den Indifferenzkurvenpunkt $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U})$, den Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{V}(\mu)$ und aus letzterem über die Umkehrfunktion $\mathbf{V}^{-1}$ den Kurvenparameter μ, also den Funktionswert $v(\mathbf{X})$ der Nutzenfunktion v.

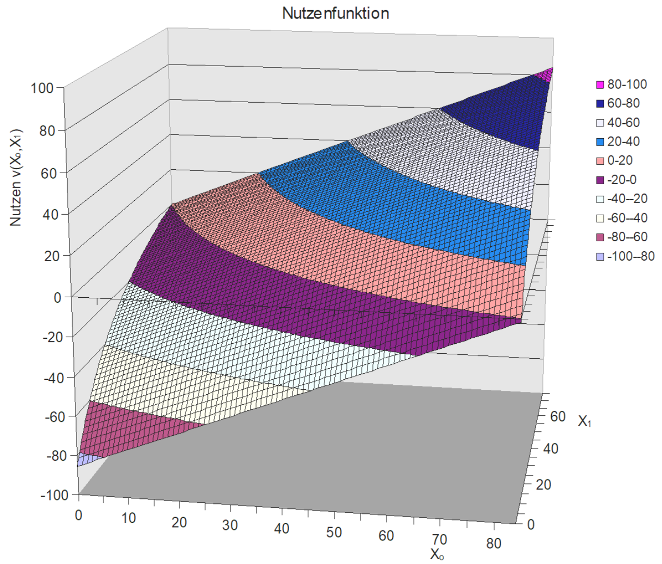


Abb. 2.6 Der Graph der Nutzenfunktion als Nutzengebirge mit den Indifferenzkurven als Höhenlinien

2.1.3 Replizierung des Zahlungsstroms als die Duplizierung des Nullkonsumplans

Konzept der Replizierung

Robinson behandelt jetzt das in Abschnitt 2.1.2 schon betrachtete Entscheidungsproblem von Beispiel 2.2 noch mit einem anderen Konzept, nämlich mit dem Konzept der sogenannten Replizierung (Glattstellung, additiven Ergänzung) des zu beurteilenden Zahlungsstroms. Er will entscheiden, ob der Konsumplan

$$\mathbf{X} = (30,30)^{\mathrm{T}}$$

oder der alternative Konsumplan

$$\mathbf{Y} = (10,52)^{\mathrm{T}}$$

für ihn vorteilhafter ist. Dazu möchte er wissen, inwieweit sich jeder der Zahlungsströme **X** und **Y** vom Nullkonsumplan **O** unterscheidet. Zu diesem Zweck will er jeden zu beurteilenden oder zu vergleichenden Konsumplan **X** durch Hinzunahme einer akzeptierten (indifferenten) Transformation **ΔX** längs der zu einer monotonen Präferenzordnung gehörigen Indifferenzkurve Ind(**X**) von **X** bis auf einen beurteilbaren Zahlungsstrom $\breve{\mathbf{W}}$ ($\underset{\cdot}{>}$, =, $\underset{\cdot}{<}$ **O**) glattstellen, also in den Nullkonsumplan **O** = $(0,0)^{\mathrm{T}}$ überführen:

$$\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X} = \breve{\mathbf{W}}\,.$$

Etwas anders formuliert soll also ausgehend vom zu bewertenden Zahlungsstrom **X** mittels des indifferenten Supplements **ΔX** und des Beurteilungsvektors $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ der Konsumplan **O** exakt dupliziert werden:

$$\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X} + \mathbf{V} = \mathbf{O}.$$

Genau genommen wird bei dieser Duplizierung der Zahlungsstrom **O** durch das Duplikat **X** + Δ**X** + **V** = **X'** + **V** exakt nachgebildet. Salopper gesprochen wird der Zahlungsstrom **O** bis auf einen beurteilbaren und vergleichbaren Zahlungsstrom **V** bzw. $\breve{\mathbf{W}} = -\mathbf{V}$ nachgebildet durch das zu **X** äquivalente „Duplikat" **X'** = **X** + Δ**X** ∈ Ind(**X**), das mit **O** direkt vergleichbar ist. Der direkt beurteilbare Zahlungsstrom $\breve{\mathbf{W}} = -\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X}'$ ist hier also ein Schnittpunkt der Indifferenzkurve Ind(**X**) von **X** mit der Kurve $\breve{\mathbf{W}}(\mu) = -\mathbf{V}(\mu)$, der am Nullpunkt **O** gespiegelten Beurteilungskurve **V**(μ). Dieser wird dann als Beurteilungsvektor $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ zur Bewertung von **X** und zum Vergleich von **X** mit anderen Konsumplänen **Y** verwendet. Eine grafische Darstellung dieser Art von Replizierung mit dem Nullpunkt als Bezugspunkt (Glattstellungspunkt) ist für den Konsumplan **X** in Abbildung 2.7 gegeben.

Beispiel 2.2 – Fortsetzung 2: Vergleich der Konsumpläne X und Y durch die Replizierung mittels ihrer Indifferenzkurven

Verwendet Robinson in einer ersten Variante für die Glattstellung von $\mathbf{X} = (30,30)^T$ (die zweite Variante folgt in Abschnitt 2.1.4) die zugehörige Indifferenzkurve Ind(**X**) von Beispiel 2.2 in Abschnitt 2.1.2 und die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0)^T$, so erhält er die gewünschte Darstellung

$$\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X} = \breve{\mathbf{W}} = -\bar{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{X})) =: \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$$

mit dem Beurteilungsvektor $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \in \mathrm{Ind}(\mathbf{X}) \cap (-\mathbf{V}(J))$ (Voraussetzung der Existenz und Einzigkeit des Schnittpunkts der Kurven!),

$$\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = -\bar{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{X})) = -\bar{\mathbf{V}}(-87) = (87,0)^T \mathrel{\dot{>}} \mathbf{O},$$

und dem Verbindungsvektor Δ**X** der zwei Punkte **X** und $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ auf der Indifferenzkurve Ind(**X**), dem Replikat bzw. Gegengeschäft

$$\Delta\mathbf{X} = (57,-30)^T.$$

Als Voraussetzung wird also verwendet, dass die am Nullpunkt gespiegelte Beurteilungskurve, also die Kurve $\breve{\mathbf{W}}(\mu) := -\mathbf{V}(\mu)$, mit der Indifferenzkurve Ind(**X**) genau einen Schnittpunkt hat.

Da hier der Beurteilungsvektor $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ bezüglich der strengen Halbordnung $\dot{>}$ positiv ist, ist auch der zu $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ äquivalente Konsumplan **X** vorteilhafter als der Konsumplan **O**: Wegen der vorausgesetzten Monotonie der Präferenzordnung $\succcurlyeq$ gilt nämlich $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \succ \mathbf{O}$ und aus $\mathbf{X} \sim \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \succ \mathbf{O}$ folgt

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{O}.$$

Sieht Robinson den Nullkonsumplan $\mathbf{O} = (0,0)^T$ als natürlichen absoluten Nullpunkt seiner Bewertungsskala an, so ergibt sich der Konsumplan **X** als vorteilhaft.

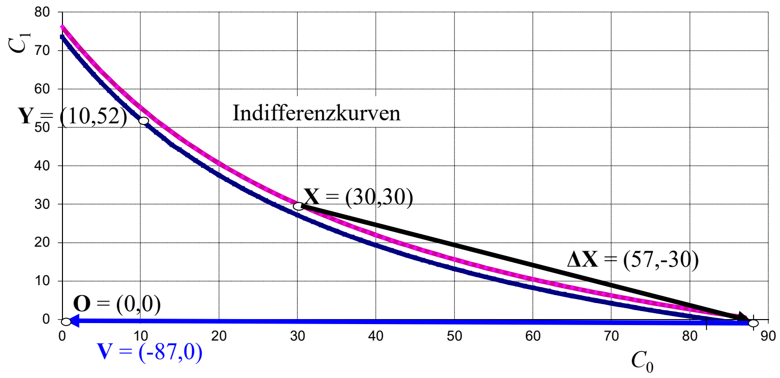


Abb. 2.7 Die Replizierung des Konsumplans **X** mittels der Indifferenzkurve Ind(**X**) und der Beurteilungskurve $\bar{\mathbf{V}}(\mu)$

Analog verwendet Robinson für die Glattstellung von **Y** die zugehörige Indifferenzkurve Ind(**Y**) und die Beurteilungskurve $\bar{\mathbf{V}}$ (μ) und erhält den Beurteilungsvektor

$$\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) = - \bar{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{Y})) = - \bar{\mathbf{V}}(-81) = (81,0)^{\mathsf{T}} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}.$$

Da $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$ bezüglich $\underset{\cdot}{>}$ positiv ist, ist wegen der Monotonie von $\succcurlyeq$ auch der zu $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$ äquivalente Konsumplan **Y** vorteilhafter als der Nullkonsumplan **O**:

$$\mathbf{Y} \succ \mathbf{O}.$$

Mit dem Nullkonsumplan **O** als Nullpunkt seiner Bewertungsskala wird also auch der Konsumplan **Y** als vorteilhaft angesehen.

Robinson kann also zunächst **X** und **Y** jeweils mit **O** vergleichen. Er will nun aber auch die Zahlungsströme **X** und **Y** miteinander vergleichen. Der Vergleich der nicht unmittelbar vergleichbaren Konsumpläne **X** und **Y** resultiert aus dem Vergleich der dazu jeweils äquivalenten Konsumpläne $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ und $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$ auf der Kurve $\breve{\mathbf{W}}(\mu) = - \mathbf{V}(\mu)$. Aus

$$\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = (87,0)^{\mathsf{T}} \underset{\cdot}{>} (81,0)^{\mathsf{T}} = \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$$

folgt mittels der Monotonie der Präferenzordnung

$$\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \succ \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$$

und mittels der Transitivität der Präferenzordnung und der Transitivität der induzierten Indifferenzrelation dann

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{Y}.$$

Formelmäßig ergibt sich aus der Kette von Relationen

$$\mathbf{X} \sim \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \underset{\cdot}{>} \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) \sim \mathbf{Y}$$

der Vergleich von **X** und **Y**:

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{Y}.$$

△

Allgemein ist die **eindeutige Replizierbarkeit** von **X**, d. h. die eindeutige Duplizierung von **O** bei Verwendung des Ausgangspunkts **X**, der Indifferenzkurve Ind(**X**) und der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$, mit einem eindeutig bestimmten Beurteilungsvektor $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ gleichbedeutend zur eindeutigen Lösbarkeit des folgenden Gleichungssystems. Da der Beurteilungsvektor $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ hier sowohl auf der Indifferenzkurve Ind(**X**) als auch auf der Kurve - **V**(μ) liegt, erhält man mit der Konsumfunktion $C_1(C_0)$ der Indifferenzkurve Ind(**X**) für den Beurteilungsvektor die Darstellung

$$(C_0, C_1(C_0))^{\mathsf{T}} = \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = -(V_0(\mu), V_1(\mu))^{\mathsf{T}},$$

also für die zwei Unbekannten $C_0 = C_0(\mathbf{X})$ und $\mu = \mu(\mathbf{X})$ das im Allgemeinen nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_0 \quad &+ V_0(\mu) &= 0,\\ C_1(C_0) \quad &+ V_1(\mu) &= 0. \end{aligned}$$

Die Einzigkeit der Replizierung von **X** bzw. der Duplizierung von **O** könnte wie in den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2 nachgewiesen werden, wenn die hier verwendete Indifferenzkurve Ind(**X**) zu einer monotonen Präferenzordnung gehört und wenn die Beurteilungskurve **V**(μ) streng monoton steigend ist. Die Existenz der Replizierung von **X**, also die Existenz eines Schnittpunkts der Kurven Ind(**X**) und $\breve{\mathbf{W}}(\mu) = -\mathbf{V}(\mu)$, wird hier einfach mit vorausgesetzt.

Das für die Glattstellung des vorgegebenen Zahlungsstroms **X** verwendete Ergänzungsgeschäft **ΔX** wird hier als Gegengeschäft oder Replik(at) bezeichnet. Die Bezeichnung Replikat leitet sich vom lateinischen „replicare“ ab, was wörtlich „wieder auseinander falten, wieder aufrollen“ bedeutet, und wird hier nicht in der Übersetzung als „originalgetreue Nachbildung“ bzw. „Bildung einer exakten Kopie“ verwendet, sondern in der Bedeutung einer „Entgegnung“ oder „Erwiderung“ zum vorgegebenen Zahlungsstrom **X**. In diesem Sinne wird die Glattstellung von **X** auch als Replizierung (Replikation) bezeichnet. Die Replizierung von **X** ist dabei die Duplizierung des Zahlungsstroms **O** bei Verwendung des Ausgangspunktes **X**. Die hierbei verwendete indifferente Transformation **ΔX** ist für Robinson ein fiktives Ergänzungsgeschäft (Supplementgeschäft, Supplement, Transponement), das er hier mit sich selbst abschließt und das eine Zahlung von einem Zeitpunkt auf einen anderen überträgt (transponiert). Bei den Aktivgeschäften einer Bank, die in der Kreditvergabe an Bankkunden (Finanzierungen für Bankkunden) bestehen, werden die Gegengeschäfte auch als Refinanzierungen bezeichnet (siehe z. B. Sievi (1995), S. 77–99; Kober et al. (1992), S. 129, 141).

Für beliebige bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu)$ eindeutig replizierbare (glattstellbare) Konsumpläne **X** und **Y**, deren Indifferenzkurven also die Kurve $\breve{\mathbf{W}}(\mu) = -\mathbf{V}(\mu)$ (hier die C_0-Achse) in genau einem Schnittpunkt schneiden, lässt sich deren Vergleich bezüglich der monotonen Präferenzordnung $\succcurlyeq$ mit Hilfe der durch die Replizierungen eindeutig zugeordneten Beurteilungsvektoren $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ und $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$ folgendermaßen charakterisieren:

$$\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so vorteilhaft wie } \mathbf{Y}) \Leftrightarrow \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \geq \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} \text{ ist ebenso vorteilhaft wie } \mathbf{Y}) \Leftrightarrow \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} \text{ ist vorteilhafter als } \mathbf{Y}) \Leftrightarrow \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) \mathrel{\dot{>}} \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}).$$

Der Vergleich mit Hilfe der Beurteilungsvektoren $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$, $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y}))$ $\in \breve{\mathbf{W}}(J)$ funktioniert für beliebige replizierbare Zahlungsströme **X** und **Y**, da wegen der strengen Monotonie der Beurteilungskurve $\breve{\mathbf{W}}(\mu) = -\mathbf{V}(\mu)$ der Differenzvektor

$$\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) - \breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) = -\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y}))$$

stets beurteilbar ($\dot{>}$, =, $\dot{<}$ **O**) ist. Das Vergleichsergebnis für zwei Zahlungsströme **X** und **Y** bezüglich einer monotonen Präferenzordnung $\succcurlyeq$ kann also auch ermittelt werden durch die jeweilige Glattstellung (Replizierung) mit einem indifferenten Gegengeschäft (Replikat) bis auf einen zum Zahlungsstrom indifferenten Beurteilungsvektor $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ bzw. $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$. Die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$, $\mu \in J$, kann dabei gemäß ihrer Definition in Abschnitt 2.1.2 beliebig gewählt werden, nämlich als eine bezüglich der Halbordnung $\dot{>}$ streng monoton steigende, beurteilbare und stetige Kurve mit $\mathbf{V}(0) = \mathbf{O}$. Die Charakterisierung der Präferenzordnung $\succcurlyeq$ erfolgt hier also auf der Menge der eindeutig replizierbaren Zahlungsströme durch den Vergleich der Funktionswerte einer zweidimensionalen Beurteilungsfunktion (Präferenzfunktion) $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = -\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$. Demnach kann analog zu Abschnitt 2.1.2 die Präferenzordnung auf dieser Menge auch durch eine ordinale Nutzenfunktion

$$\breve{v}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}^{-1}(\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}))$$

beschrieben werden.

Hier in Abschnitt 2.1.3 erfolgte also nach einem speziellen Konzept der Replizierung eine Charakterisierung des Vergleichs von **X** mit **Y** gemäß der vorgegebenen monotonen Quasiordnung. Die in Abschnitt 2.1.3 verwendete Replizierung liefert also dasselbe Ergebnis wie die in Abschnitt 2.1.1 dargestellte Duplizierung, da diese dieselben Indifferenzkurven Ind(**X**) und Ind(**Y**) verwenden, die Indifferenzkurven jeweils Teil einer monotonen Präferenzordnung $\succcurlyeq$ des Entscheiders sind und mittels der verwendeten Vergleichs- und Beurteilungsvektoren die „Abstände" zwischen den Indifferenzkurven beschrieben werden.

Zur Erinnerung wird die gemäß der Methode von Abschnitt 2.1.1 durchgeführte Duplizierung von **X** mit Ausgangspunkt **Y** bzw. die Duplizierung von **Y** mit Ausgangspunkt **X** noch einmal angegeben:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}' + \mathbf{V}(\mu'(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$$

mit $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}' \in \mathrm{Ind}(\mathbf{Y})$ bzw.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}' + \mathbf{V}(\mu'(\mathbf{Y},\mathbf{X}))$$

mit $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}' \in \mathrm{Ind}(\mathbf{X})$. Bei der in Abschnitt 2.1.1 verwendeten Duplizierung wird salopp ausgedrückt die „vorzeichenbehaftete Entfernung" des Punktes **X** von der Indifferenzkurve Ind(**Y**) von **Y** in Richtung der Beurteilungskurve durch den Vergleichsvektor **w**(**X**,**Y**) = $\bar{\mathbf{V}}(\mu'(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$ gemessen. Analog wird die „Entfernung“ des Punktes **Y** von der Indifferenzkurve Ind(**X**) von **X** gemessen durch **w**(**Y**,**X**) = $\bar{\mathbf{V}}(\mu'(\mathbf{Y},\mathbf{X}))$. Bei der hier in Abschnitt 2.1.3 verwendeten Replizierung dagegen wird die „Entfernung“ zwischen **X** und **Y** bzw. zwischen deren Indifferenzkurven gemessen durch die Differenz der Beurteilungsvektoren $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = -\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ und $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) = -\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y}))$, die jeweils selbst die „Entfernung“ der Indifferenzkurve Ind(**X**) bzw. Ind(**Y**) vom Nullpunkt **O** längs der Kurve $-\mathbf{V}(\mu)$ beschreiben.

2.1.4 Replizierung des Zahlungsstroms als Duplizierung des Bezugszahlungsstroms

Robinson wendet jetzt das Konzept der Replizierung (Glattstellung) noch in einer zweiten vereinfachten Variante an, bei der er nur noch eine einzige Indifferenzkurve verwendet, nämlich die Indifferenzkurve Ind(**U**) durch den als Bezugspunkt willkürlich fest fixierten Konsumplan $\mathbf{U} = (20,39)^T$, und diese Indifferenzkurve als Nulllinie der Beurteilung ansieht. Die Indifferenzkurve Ind(**U**) soll dabei wieder Teil einer monotonen Präferenzordnung $\succcurlyeq$ des Entscheiders sein. Er untersucht, inwieweit sich ein zu beurteilender bzw. zu vergleichender Zahlungsstrom vom Bezugszahlungsstrom **U** unterscheidet.

Beispiel 2.2 – Fortsetzung 3: Vergleich der Konsumpläne X und Y durch die Replizierung mittels der Indifferenzkurve Ind(U) **des Bezugspunkts U**

Zur Konstruktion einer Replizierung (Glattstellung) von

$$\mathbf{X} = (30,30)^T$$

auf **U** geht Robinson jetzt in einem ersten Schritt von **X** aus auf der Kurve $\mathbf{X} - \mathbf{V}(\mu) = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{V}}(\mu)$ durch Hinzunahme von $\mathbf{V}^* = -\bar{\mathbf{V}}(2) = (-2,0)^T$ bis zum Schnittpunkt $\mathbf{U}' = (28,30)^T$ mit der Indifferenzkurve Ind(**U**):

$$\mathbf{X} + \mathbf{V}^* = (30,30)^T + (-2,0)^T = (28,30)^T = \mathbf{U}' \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U}) \cap (\mathbf{X} - \mathbf{V}(J)).$$

Dabei ist

$$\mathbf{U}' = \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}'$$

mit dem indifferenten Ergänzungsgeschäft $\Delta\mathbf{U}' = (8,-9)^T$.

In einem zweiten Schritt kann er durch Hinzunahme des ebenfalls indifferenten Ergänzungsgeschäfts $-\Delta\mathbf{U}'$ von **U'** nach **U** gelangen:

$$\mathbf{U}' - \Delta\mathbf{U}' = \mathbf{U}.$$

Insgesamt ist man vom Punkt **X** aus über **U'** **zum** Punkt **U** gelangt.

Der erste Schritt $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} + \mathbf{V}^* = \mathbf{U}'$ der Replizierung entspricht der Umkehrung des zweiten Schritts

$$\mathbf{U}' \rightarrow \mathbf{U}' + \mathbf{V}' = \mathbf{X} \qquad (\mathbf{V}^* = -\mathbf{V}')$$

der in Abschnitt 2.1.2 behandelten Duplizierung von **X** mit Ausgangspunkt **U**:

$$\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}' = \mathbf{U}' \rightarrow \mathbf{U}' + \mathbf{V}' = \mathbf{X}.$$

Der zweite Schritt $\mathbf{U}' \rightarrow \mathbf{U}' - \Delta\mathbf{U}' = \mathbf{U}$ der Replizierung entspricht der Umkehrung des ersten Schritts

$$\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}'$$

der Duplizierung von Abschnitt 2.1.2. Insgesamt erhält man also hier durch Umkehrung der Duplizierung von **X** mit Ausgangspunkt **U** die Duplizierung von **U** mit Ausgangspunkt **X**.

Die Glattstellung von **X** auf **U**,

$$\mathbf{X} + \mathbf{V}^* - \Delta\mathbf{U}' = \mathbf{U}$$

erfolgt somit mit dem indifferenten Replikat (Gegengeschäft, glattstellenden Ergänzungsgeschäft) $-\Delta\mathbf{U}' = (-8{,}9)^{\mathsf{T}}$ und dem Beurteilungskurvenpunkt $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}' = -\mathbf{V}^* = (2{,}0)^{\mathsf{T}}$ von Abschnitt 2.1.2. Während Robinson in Abschnitt 2.1.2 das Supplement $\Delta\mathbf{U}'$ verwendet, kommt hier in Abschnitt 2.1.4 das dazu entgegengesetzte Supplement $-\Delta\mathbf{U}'$ zum Einsatz. Beide Supplemente bewirken jeweils eine für Robinson indifferente fiktive Transformation auf der Indifferenzkurve von **U**.
Bei anderer Sichtweise wird mit dem indifferenten Supplement $-\Delta\mathbf{U}'$ der Zahlungsstrom **X** in den äquivalenten Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} - \Delta\mathbf{U}' = \mathbf{U} - \mathbf{V}^* = \mathbf{U} + \mathbf{V}' = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = (22{,}39)^{\mathsf{T}}$$

auf der inhomogenen Beurteilungskurve (Glattstellungskurve) $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ übergeführt, der nachfolgend zum Vergleich von **X** mit **Y** verwendet wird.

Die entsprechende Replizierung von

$$\mathbf{Y} = (10{,}52)^{\mathsf{T}}$$

ergibt

$$\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{V}}(-1) = (10{,}52)^{\mathsf{T}} + (1{,}0)^{\mathsf{T}} = (11{,}52)^{\mathsf{T}} = \mathbf{U}'' \in \mathrm{Ind}(\mathbf{U}) \cap (\mathbf{Y} - \mathbf{V}(J))$$

mit $\mathbf{U}'' = \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}''$, $\Delta\mathbf{U}'' = (-9{,}13)^{\mathsf{T}}$, $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) = \bar{\mathbf{V}}(-1) = (-1{,}0)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) = (19{,}39)^{\mathsf{T}}$. Mit dem indifferenten Supplement $-\Delta\mathbf{U}''$ wird der Zahlungsstrom **Y** in den äquivalenten Zahlungsstrom

$$\mathbf{Y} - \Delta\mathbf{U}'' = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = (19{,}39)^{\mathsf{T}}$$

auf der inhomogenen Beurteilungskurve (Glattstellungskurve) $\mathbf{W}(\mu)$ übergeführt.

Mittels dieser Replizierungen ergibt sich für die Zahlungsströme **X** und **Y** jeweils ein Vergleich mit dem Bezugspunkt **U** gemäß der vorgegebenen monotonen Präferenzordnung $\succcurlyeq$. Aus

$$\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{U}' \sim \mathbf{U} \text{ bzw. } \mathbf{Y} \underset{\cdot}{<} \mathbf{U}'' \sim \mathbf{U}$$

folgt wegen der Monotonie von $\succcurlyeq$ nämlich

$$\mathbf{X} \succ \mathbf{U} \text{ und } \mathbf{Y} \prec \mathbf{U}.$$

Für die hier speziell betrachteten Zahlungsströme **X** und **Y**, die auf verschiedenen Seiten der Indifferenzkurve Ind(**U**) von **U** liegen, ergibt sich aus der Transitivität der Präferenzordnung auch ein Vergleich von **X** mit **Y**: $\mathbf{X} \succ \mathbf{Y}$. Im allgemeinen Fall, bei dem **X** und **Y** auch auf der gleichen Seite von Ind(**U**) liegen können, hat man zunächst keinen unmittelbaren Vergleich von **X** und **Y**. Einen Vergleich der replizierbaren Zahlungsströme **X** und **Y** erhält man aber wie in Abschnitt 2.1.2 mit Hilfe der errechneten Beurteilungsvektoren $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X})$ und $\breve{\mathbf{w}}(\mathbf{Y})$. Eine grafische Darstellung der Replizierung von Zahlungsströmen auf den Bezugspunkt (Glattstellungspunkt) **U** wird in Abbildung 2.8 gegeben. △

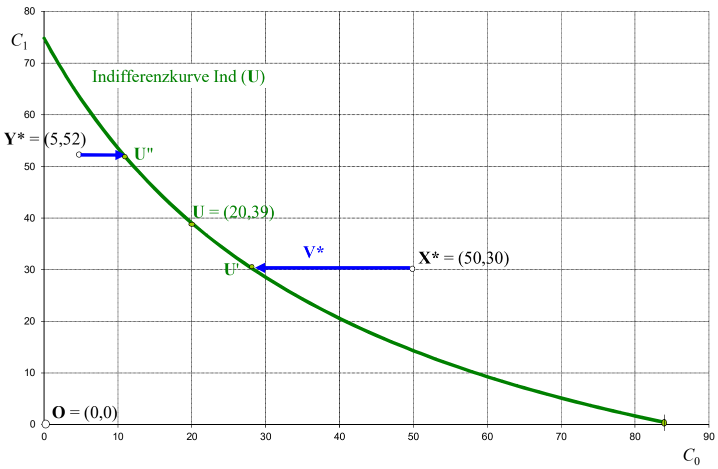


Abb. 2.8 Die Replizierung der Konsumpläne **X*** und **Y*** mittels der Indifferenzkurve Ind(**U**). Zur deutlicheren Darstellung sind in der Grafik statt der Konsumpläne **X** und **Y** die weiter von der Kurve entfernt liegenden Konsumpläne **X*** und **Y*** eingezeichnet

Die Existenz dieser Replizierung von **X** wird hier einfach mit vorausgesetzt. Die Einzigkeit der Replizierung von **X** kann nachgewiesen werden, wenn die hier verwendete Indifferenzkurve Ind(**U**) zu einer monotonen Präferenzordnung gehört und wenn die Beurteilungskurve **V**(μ) streng monoton steigend ist: Der Beurteilungsvektor - **V*** kann nämlich als Bestandteil der Duplizierung von **X** mit Ausgangspunkt **U** angesehen werden. Da die dabei verwendete Indifferenzkurve Ind(**U**) streng monoton fallend ist und die Beurteilungskurve **V**(μ) streng monoton steigend ist, ist nach der in Abschnitt 2.1.1 angeführten Aussage die Duplizierung eindeutig und damit der Vektor **V*** eindeutig bestimmt.

Robinson kann nun aber jedem Zahlungstrom **X** aus der Menge

$$D = \{\mathbf{C} = (C_0,C_1)^{\mathsf{T}} : 0 \le C_0 \le 84,\ 0 \le C_1 \le 75\}$$

der mittels Indifferenzkurve Ind(**U**) und Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu)$ eindeutig duplizierbaren Zahlungsströme (Voraussetzung an **X**!) mit Hilfe der Replizierung

$$\mathbf{X} + \Delta\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$$

bzw. der zugehörigen Duplizierung

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} - \Delta\mathbf{U}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$$

eindeutig den in Abschnitt 2.1.2 bereits verwendeten Beurteilungsvektor $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ zuordnen. Damit erhält Robinson auf der Menge D wieder die in Abschnitt 2.1.2 neu definierte Präferenzordnung $\trianglerighteq$, die sich von der von Robinson ursprünglich verwendeten Präferenzordnung unterscheidet.

2.2 Beispiel mit Kapitalmarkt: Robinson auf dem Kartoffelmarkt

Während im vorigen Abschnitt 2.1 Robinson den Übergang von einem Konsumplan zum anderen nur mit fiktiven Ergänzungsgeschäften längs seiner individuellen Indifferenzkurven vollziehen kann, stehen ihm im nächsten Beispiel 2.3 reale Ergänzungsgeschäfte (Supplemente) als Realinvestitionen und Kapitalmarktgeschäfte (Finanzinvestitionen und -finanzierungen) zur Verfügung. Das wesentliche Merkmal der Existenz der Ergänzungsgeschäfte ist dabei, dass durch diese die Zahlungsstromkomponenten mit einem externen, d. h. von der internen individuellen Zeitpräferenz des Entscheiders unabhängigen, Austauschfaktor von einem Zahlungszeitpunkt zu einem anderen Zahlungszeitpunkt verschoben (transferiert, transponiert) werden können (Eisenführ und Weber (2003), S. 308). Mit den Transformationsstrahlen der Kapitalmarktgeschäfte werden hier die vom Individuum unabhängigen Indifferenzkurven gebildet. Außerdem kann eine vom Individuum unabhängige Präferenzordnung unter Verwendung der Kapitalmarktgeschäfte und einer Beurteilungskurve (Zielsetzungskurve) nach dem Konzept der Duplizierung bzw. der Replizierung definiert werden. Der dabei auftretende Beurteilungsvektor stellt einen realen Margenzahlungsstrom dar, der dem Entscheider zufließt bzw. der vom Entscheider aufzubringen ist, der gemäß einer für die Zahlungszeitpunkte festgelegten Zeitpräferenz gebildet wird, der nur von einem einzigen Parameter streng monoton steigend abhängt und damit mit anderen derartigen Margenzahlungsströmen vergleichbar ist. Das hier betrachtete Beispiel sowie die in Abschnitt 3.3 dargestellten Methoden von Kruschwitz (1998) dienen dann als Vorlage für die allgemeine formale Definition der Duplizierung und Replizierung in Kapitel 5 für den unvollkommenen Kapitalmarkt.

In diesem Abschnitt soll sich also ein Individuum, in dessen Lebensbereich Ergänzungsgeschäfte für die zeitliche Verschiebung (Transposition, Transfer) von Zahlungen zur Verfügung stehen, zwischen zwei für ihn möglichen Zahlungsströmen **X** und **Y** entscheiden. Zur Lösung des Entscheidungsproblems werden im nachfolgenden Beispiel zwei verschiedene Methoden behandelt. In Abschnitt 2.2.1 wird für die beiden zu vergleichenden Zahlungsströme **X** und **Y** die Duplizierung mit der aus beiden Supplementtypen gebildeten geknickten Transformationsgeraden und der zu einem festen Bezugszahlungsstroms **U** gehörigen inhomogenen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ durchgeführt. Mit den dabei errechneten Beurteilungsvektoren wird die Präferenzordnung definiert. In Abschnitt 2.2.2 wird für beide Zahlungsströme **X** und **Y** die Replizierung mit der am Nullpunkt gespiegelten geknickten Transformationsgeraden und der inhomogenen Glattstellungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ durchgeführt. Mit den dabei errechneten Beurteilungsvektoren wird wieder die Präferenzordnung definiert. Es zeigt sich, dass im Spezialfall eines einheitlichen Marktzinsfaktors $q_H = q_S = q$ für Investitionen und Finanzierungen die mit den Methoden der Abschnitte 2.2.1 und 2.2.2 erhaltenen Präferenzordungen übereinstimmen. Bei Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts erhält man jeweils nur die Barwert-Präferenzordnung.

Die Idee für das nachfolgende einfache Beispiel mit der Laufzeit $n = 1$ stammt von Schäfer, Kruschwitz, Schwake (1998), S. 3–7, und wird hier noch weiter ausgebaut. Zunächst wird darin dargestellt, wie Robinson aus seiner Basisausstattung mit Hilfe der ihm zur Verfügung stehenden Realinvestition und der Kapitalmarktgeschäfte sich verschiedene Konsumpläne realisieren kann. In den Fortsetzungen des Beispiels werden dann zwei Konsumpläne mit dem Konzept der Duplizierung bzw. der Replizierung verglichen.

Beispiel 2.3 Robinson auf dem Kartoffelmarkt – Kapitaltransfers mit einer Lagerhaltung, einer Realinvestition und mit Kapitalmarktgeschäften

Robinson Crusoe kann von seinem gestrandeten Schiff auch 100 Kilogramm (kg) Kartoffeln auf seine Insel retten. Er will deren Verbrauch auf zwei Jahre aufteilen. Wie wird er sich entscheiden? Hinsichtlich seines Kartoffelkonsums muss er sich also für einen Konsumplan

$$\mathbf{C} = (C_0, C_1)^{\mathsf{T}}$$

entscheiden, wobei C_0 den Verbrauch im ersten Jahr und C_1 den Verbrauch im zweiten Jahr angibt. Ausgehend vom Basiszahlungsstrom (Basisausstattung, Erstausstattung, Eigenkapital)

$$\mathbf{B} = (B_0, B_1)^{\mathsf{T}} = (100,0)^{\mathsf{T}},$$

in der Einheit „Kilogramm Kartoffeln“ hat er zu berücksichtigen, welche Möglichkeiten er hat, den nicht konsumierten Teil

$$B_0' = B_0 - C_0$$

seines Kartoffelkapitals B_0 vom Zeitpunkt $t = 0$ auf den Zeitpunkt $t = 1$ zu verschieben (transponieren). Außerdem hat er zu beachten, ob er auch eine Möglichkeit findet, eine Kartoffelzahlung Z_1 vom Zeitpunkt $t = 1$ auf den Zeitpunkt $t = 0$ zu verschieben. Für die zeitliche Verschiebung von Kartoffelzahlungen stehen ihm folgende Transpositionen (Transfers) zur Verfügung:

1. Robinson kann die Kartoffeln in einer nahe gelegenen Höhle (siehe Abbildung 2.9) aufbewahren, wobei er bei dieser Lagerhaltung (Kassenhaltung) der verderblichen Ware mit einem Verlust durch Fäulnis, Ungeziefer usw. von 20% des Lagerbestandes rechnen muss. Der Habenzinssatz dieser Anlage beträgt also

$$i_L = -20\%.$$

Abb. 2.9 Robinsons Kartoffel-Lagerung in der Höhle

2. Bei der Erkundung der Insel hat Robinson ein Feld entdeckt, auf dem er Kartoffeln anbauen kann (siehe Abbildung 2.10). Auf Grund der Größe und Beschaffenheit des Feldes kann er maximal 20 Kilogramm Kartoffeln als Saatgut stecken und mit einer Ernte in Höhe des Zweifachen des Saatguts rechnen. Der Habenzinssatz dieser Realinvestition im Ackerbau beträgt also
   $i_A = 100\%$.

Abb. 2.10 Robinson beim Kartoffelanbau

3. Robinson ist auf der Insel dem Eingeborenen Mercator (siehe Abbildung 2.11) begegnet, der ihm mitteilt, dass sein Stamm einen Kartoffelmarkt betreibt und er als Kartoffelhändler tätig ist. Der Händler bietet Robinson eine Anlage für das Kartoffelkapital zum jährlichen Habenzinssatz
   $i_H = -10\%$
   an und eine Kreditaufnahme zum jährlichen Sollzinssatz
   $i_S = 50\%$.
   Übergibt Robinson dem Händler z. B. 10 kg Kartoffeln, so erhält er nach einem Jahr 9 kg zurück. Leiht er sich vom Händler 10 kg Kartoffeln, so muss er diesem nach einem Jahr 15 kg zurückgeben.

Abb. 2.11 Robinson auf dem Kartoffelmarkt

Ein Risiko dieser Aufbewahrungs- und Anlagemöglichkeiten, dass beispielsweise das Kartoffellager von einer Horde Affen geplündert wird, die Kartoffelernte durch ein Unwetter vernichtet wird, der Kartoffelmarkt zusammenbricht und das angelegte Kapital verloren geht, wird hier in die Betrachtung nicht mit einbezogen. Es wird also von sicheren Zahlungen ausgegangen.

Für die zeitliche Verschiebung einer Zahlung Z_0 $(= \alpha \geq 0)$ des Zeitpunkts $t = 0$ auf eine Zahlung Z_1 des Zeitpunkts $t = 1$ stehen Robinson also drei reale Ergänzungsgeschäfte (Supplemente) zur Verfügung, nämlich die Realinvestition im Ackerbau

$$\mathbf{A} = (A_0,A_1)^{\mathsf{T}} = (-\alpha,+\alpha q_A)^{\mathsf{T}} = \alpha\cdot(-1\,;2)^{\mathsf{T}}$$

$(0 \leq \alpha \leq 20,\ q_A = 1 + i_A = 2)$, die Finanzinvestition im Kartoffelkapitalmarkt

$$\mathbf{I} = (I_0,I_1)^{\mathsf{T}} = (-\alpha,+\alpha q_H)^{\mathsf{T}} = \alpha\cdot(-1;0{,}9)^{\mathsf{T}}$$

$(\alpha \geq 0,\ q_H = 1 + i_H = 0{,}9)$ und die Kassenhaltung mit der Höhlenlagerung

$$\mathbf{L} = (L_0,L_1)^{\mathsf{T}} = (-\alpha,+\alpha q_L)^{\mathsf{T}} = \alpha\cdot(-1;0{,}8)^{\mathsf{T}}$$

$(\alpha \geq 0,\ q_L = 1 + i_L = 0{,}8)$.

Für die zeitliche Verschiebung einer Zahlung Z_1 $(= -1{,}5\cdot\kappa \leq 0)$ des Zeitpunkts $t = 1$ auf eine Zahlung Z_0 $(= \kappa \geq 0)$ des Zeitpunkts $t = 0$ besitzt Robinson als reales Ergänzungsgeschäft die Finanzierung vom Kartoffelkapitalmarkt

$$\mathbf{F} = (F_0,F_1)^{\mathsf{T}} = (+\kappa,-\kappa q_S)^{\mathsf{T}} = \kappa\cdot(1;-\,1{,}5)^{\mathsf{T}}$$

$(\kappa \geq 0,\ q_S = 1 + i_S = 1{,}5)$.

In der Zahlungsstromschreibweise sind bei den Investitionen die Zahlungen A_0, I_0 und L_0 des Zeitpunkts $t = 0$ Auszahlungen und somit nichtpositive Zahlen und bei der Finanzierung die Zahlung F_0 eine Einzahlung und somit eine nichtnegative Zahl. Die Summe der angelegten

Kartoffelmengen $|A_0|$, $|I_0|$ und $|L_0|$ ist gleich der Summe der im Zeitpunkt $t = 0$ nichtkonsumierten Kartoffelmenge B_0' und der geliehenen Kartoffelmenge F_0 (≥ 0):

$$|A_0| + |I_0| + |L_0| = B_0' + F_0 = B_0 - C_0 + F_0.$$

Je nach Wahl des Konsums C_0 (≥ 0), der Investitionsauszahlungen A_0, I_0 und L_0 (≤ 0) und der Kreditaufnahme F_0 im Zeitpunkt $t = 0$ berechnet sich der zugehörige Konsumplan

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= (C_0,C_1)^{\mathsf{T}} = \mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{F} \quad \text{mit} \\
C_1 &= B_1 + A_1 + I_1 + L_1 + F_1 \\
&= 0 - A_0 q_A - I_0 q_H - L_0 q_L - F_0 \cdot q_S \\
&= - A_0 \cdot 2 - I_0 \cdot 0{,}9 - L_0 \cdot 0{,}8 - F_0 \cdot 1{,}5.
\end{aligned}$$

Beispielsweise könnte Robinson die folgenden Konsumpläne ohne Kreditaufnahme realisieren:

$C_0 = 80$, $A_0 = -20$, $I_0 = L_0 = F_0 = 0$: $\mathbf{C}^{\mathrm{A}} = (80,40)^{\mathsf{T}}$,
$C_0 = 60$, $L_0 = -40$, $A_0 = I_0 = F_0 = 0$: $\mathbf{C}^{\mathrm{L}} = (60,32)^{\mathsf{T}}$,
$C_0 = 40$, $I_0 = -60$, $A_0 = L_0 = F_0 = 0$: $\mathbf{C}^{\mathrm{I}} = (40,54)^{\mathsf{T}}$,
$C_0 = 30$, $A_0 = -20$, $I_0 = -50$, $L_0 = F_0 = 0$: $\mathbf{C}^{\mathrm{AI}} = (30,85)^{\mathsf{T}}$,

Falls Robinson im ersten Jahr mehr als 100 kg Kartoffeln verbrauchen will, kann er z. B. mit einem Kredit in Höhe von 26 kg die folgende Wahl treffen:

$C_0 = 106$, $A_0 = -20$, $F_0 = +26$, $I_0 = L_0 = 0$: $\mathbf{C}^{\mathrm{AF}} = (106,1)^{\mathsf{T}}$.

Die hier angegebenen realisierbaren Konsumpläne sind in Abbildung 2.12 dargestellt.

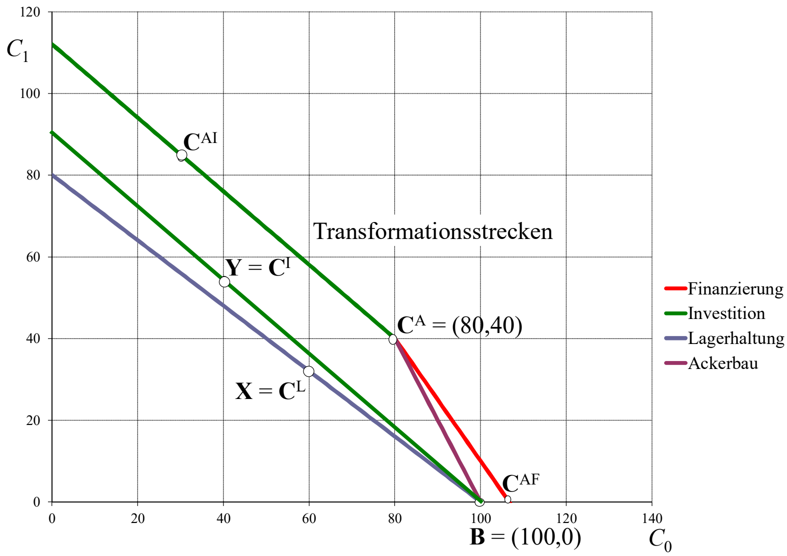


Abb. 2.12 Die Transformationsstrecken verschiedener Transpositionen: 1) Ausgehend von der Basisausstattung **B** die Transformationsstrecken für die Lagerhaltung, die Kapitalmarkt-Investition und den Ackerbau, 2) ausgehend vom Ergebnis $\mathbf{C}^{\mathrm{A}}$ des maximalen Ackerbaus die Transformationsstrecken für die Investition und die Finanzierung auf dem Kapitalmarkt

Die oben angegebenen Konsumpläne $\mathbf{C}^{\mathrm{AI}}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{A}}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{I}}$ und $\mathbf{C}^{\mathrm{AF}}$ sind untereinander nicht direkt (d. h. mit der natürlichen Halbordnung des $\mathbb{R}^2$) vergleichbar. Robinson will jetzt aber nicht, wie in Abschnitt 2.1 dargestellt, sich über seine individuelle Präferenzordnung und seine Indifferenzkurven Klarheit verschaffen, sondern er will eine externe Präferenzordnung aus den Finanzinstrumenten des Kapitalmarktes herleiten. Um die Konsumpläne in unmittelbar vergleichbare Zahlungsströme überzuführen, verwendet Robinson jetzt noch geeignet zu bestimmende Ergänzungsgeschäfte (Supplementgeschäfte, Supplemente) des Kapitalmarkts, welche er als indifferent (neutral, weder günstig noch ungünstig) ansieht. Bei der grafischen Darstellung der Konsumpläne im nichtnegativen Quadranten $\mathbb{R}^2_{+0}$ der Ebene liefern die zu den Ergänzungsgeschäften gehörigen Transformationshalbgeraden (Transformationsstrahlen, Transaktionshalbgeraden) somit die Indifferenzkurven einer durch den Markt definierten Präferenzordnung. Das Ergebnis des Vergleichs (günstiger, ungünstiger oder gleich günstig) der transformierten Zahlungsströme kann wegen der Transitivität der Präferenzordnung und der Äquivalenzrelation dann auf die ursprünglich betrachteten übertragen werden. Als Ergänzungsgeschäfte stehen ihm die Investition und die Finanzierung auf dem Kartoffelkapitalmarkt zur Verfügung. Bei tatsächlicher Ausführung des realen Ergänzungsgeschäfts liefert der Beurteilungsvektor einen realen Margenzahlungsstrom. Als Konzepte zur Konstruktion der Beurteilungsvektoren kommen wieder die Duplizierung und die Replizierung zum Einsatz. △

2.2.1 Duplizierung der Zahlungsströme mit einem festen Ausgangspunkt

Konzept der Duplizierung

Für den Vergleich der Kartoffel-Konsumpläne

$$\mathbf{X} = (60{,}32)^{\mathsf{T}} \text{ und } \mathbf{Y} = (40{,}54)^{\mathsf{T}}$$

verwendet Robinson jetzt das Konzept der Duplizierung (Nachbildung, additiven Zerlegung) eines Zahlungsstroms in der Variante, bei der die Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\mu)^{\mathsf{T}},$$

ein reales Supplement **S** vom Kapitalmarkt und ein für alle betrachteten Konsumpläne fest fixierter neutraler Bezugspunkt

$$\mathbf{U} = (45{,}40)^{\mathsf{T}}$$

als Ausgangspunkt der Duplizierung gewählt wird. Die Idee des Bewertungskonzepts der Duplizierung besteht darin, den zu beurteilenden oder zu vergleichenden Zahlungsstrom **X** durch ein Kapitalmarktgeschäft **S** oder bei einer Laufzeit $n \geq 2$ allgemeiner durch eine Kombination von Kapitalmarktgeschäften bis auf einen Differenzzahlungsstrom **W** einer bestimmten vergleichbaren Struktur nachzubilden:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{S} + \mathbf{U} + \mathbf{V}\\ &= \mathbf{S} + \mathbf{W} \quad \text{mit } \mathbf{W} = \mathbf{U} + \mathbf{V}.\end{aligned}$$

Da hier der Ausgangszahlungsstrom **U** durch die Kombination mit dem Kapitalmarktgeschäfts **S** in den transformierten Zahlungsstrom $\mathbf{U}' = \mathbf{U} + \mathbf{S}$ übergeführt wird, ist für **S** die Bezeichnung Supplement (Ergänzungsgeschäft) angebracht.

Zum Auffinden einer Präferenzordnung wird heuristisch vorgegangen, also von versuchsweise aufgestellten Annahmen weitergeschlossen, um schließlich mit den resultierenden Eigenschaften die Präferenzordnung definieren zu können. In diesem Sinne wird das hier als Supplement zur Verfügung stehende Kapitalmarktgeschäft **S** als indifferent (neutral, weder günstig noch ungünstig, ebenso günstig wie der Zahlungsstrom $\mathbf{O} = (0{,}0)^{\mathsf{T}}$) beurteilt. Der Zahlungsstrom

$$\mathbf{U}' := \mathbf{U} + \mathbf{S}$$

wird als äquivalent (indifferent) zu **U** angesehen und liegt somit auf der Indifferenzkurve Ind(**U**) von **U**. Da der Differenzzahlungsstrom $\mathbf{V} = \mathbf{X} - \mathbf{U}'$ direkt beurteilbar, also mit **O** vergleichbar sein soll ($\mathbf{V} \mathrel{\dot{>}} \mathbf{O} \vee \mathbf{V} = \mathbf{O} \vee \mathbf{V} \mathrel{\dot{<}} \mathbf{O}$), ist

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}' + \mathbf{V}$$

bei monotoner Präferenzordnung $\succcurlyeq$ zunächst mit **U**' und dann auch mit dem dazu äquivalenten **U** vergleichbar. Es ist **X** günstiger, ebenso günstig wie oder ungünstiger als **U**' bzw. **U**, wenn

$$\mathbf{V} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}, = \mathbf{O} \text{ oder } \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$$

ist. Auf diese Weise ergibt sich auch in Abschnitt 2.1.2 bei einer individuellen Indifferenzkurve Ind(**U**) von Robinson mittels des Beurteilungsvektors **V** zunächst der Vergleich des Zahlungsstroms **X** mit dem Bezugszahlungsstrom **U** und dann noch die Definition einer neuen Präferenzordnung.

Anstelle dieses Vergleichs von **X** mit dem Bezugszahlungsstrom **U** bzw. dem transformierten Bezugszahlungsstrom **U**‘ kann auch noch eine andere Interpretation für die Duplizierung von **X** gegeben werden, bei der statt **V** der um **U** verschobene Beurteilungsvektor **W** = **U** + **V** im Blickpunkt steht. Der Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{W}$$

wird als indifferent zu **W** angesehen. Der Entscheider Robinson hat die Möglichkeit zwischen den beiden identischen Zahlungsströmen **X** und **S** + **W** zu wählen. Er kann also **X** durchführen und bei Splittung der Zahlungen X_j in zwei Teile einen Zahlungsstrom **S**, der einem indifferenten Kapitalmarktgeschäft gleicht, und einen beurteilbaren Margenzahlungsstrom **W** erhalten. Alternativ kann er statt **X** als Nachbildung von **X** die Kombination von **S** und **W** wählen, also das indifferente Kapitalmarktgeschäft **S** durchführen und die Marge **W** annehmen und damit insgesamt einen Zahlungsstrom gleich **X** erhalten.

Im Gegensatz dazu wird im nachfolgenden Abschnitt 2.2.2 bei der Replizierung von **X** der Zahlungsstrom **X** selbst und zusätzlich das Gegengeschäft **S**' vom Kapitalmarkt durchgeführt und damit insgesamt als Summe der Margenzahlungsstrom **W**' erhalten.

Anforderungen an die Beurteilungskurve W(μ)

Die Beurteilung von **X** oder der Vergleich von **X** mit einem anderen Zahlungsstrom **Y** soll nun mittels des Margenzahlungsstroms **W** erfolgen. Falls **W** = **O** bzw. **X** = **S** ist, also **X** exakt durch ein Kapitalmarktgeschäft **S** duplizierbar ist, wird **X** ebenso wie **S** als indifferent bzw. indifferent zu **O** angesehen. Falls **W** $\neq$ **O** und direkt beurteilbar, also mit **O** vergleichbar ist, ist bei monotoner Präferenzordnung $\succcurlyeq$ auch der zu **W** äquivalente Zahlungsstrom **X** mittels **W** mit dem Nullvektor **O** vergleichbar: Im Falle $\mathbf{W} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ wird der Zahlungsstrom **X** als günstig (günstiger als **O**) und im Falle $\mathbf{W} \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$ der Zahlungsstrom **X** als ungünstig (ungünstiger als **O**) angesehen. Im Falle $\mathbf{W} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ wird der Enscheider den Zahlungsstrom **X** dem alternativen Kapitalmarktgeschäft **S** vorziehen und im Falle $\mathbf{W} \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$ wird er das alternative Kapitalmarktgeschäft **S** dem Zahlungsstrom **X** vorziehen.

Wählt man nun etwas allgemeiner für den Margenzahlungsstrom **W** den vorgegebenen Bezugszahlungsstrom **U** als verschobene Nulllinie, so kann bei monotoner Präferenzordnung $\succcurlyeq$ der Zahlungsstrom **X** als günstig, indifferent oder ungünstig (bzw. günstiger als **U**, indifferent zu **U** oder ungünstiger als **U**) angesehen werden, wenn für **W** die folgende Relation gilt:

$$\mathbf{W} \underset{\cdot}{>} \mathbf{U}, \mathbf{W} = \mathbf{U} \text{ oder } \mathbf{W} \underset{\cdot}{<} \mathbf{U}$$

bzw.

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} - \mathbf{U} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}, = \mathbf{O} \text{ oder } \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}.$$

Will man auch noch verschiedene Margenzahlungsströme **W** und **W'** miteinander vergleichen, so wird für diese eine geordnete einparameterige Zahlungsstromstruktur gefordert. Dazu wählt man **W** als Punkt auf einer inhomogenen Beurteilungskurve. Diese wird durch eine stetige Abbildung

$$\mathbf{W} : \mu \in J =]a,b[\mapsto \mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu),$$

$-\infty \leq b < 0 < a \leq \infty$, $\mathbf{W}(0) = \mathbf{U}$, beschrieben, die bezüglich der strengen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ des $\mathbb{R}^2$ streng monoton steigend ist. Der Margenzahlungsstrom **W** liefert dann einen Maßstab für die intertemporale Entscheidung zwischen den verschiedenen Zahlungsströmen. Er setzt sich zusammen aus der vorgegebenen konstanten Mindestmarge **U** und dem direkt beurteilbaren homogenen Margenzahlungsstrom $\mathbf{V}(\mu) = (V_0(\mu),V_1(\mu))^\mathsf{T}$, der die bei der Nachbildung möglichen Margen $V_j(\mu)$ gemäß der Kurvenstruktur $\mathbf{V}(\mu)$ auf die Zeitpunkte $t = 0$ und $t = 1$ verteilt. Beispielsweise setzt sich bei der Zielsetzung mit der speziellen inhomogenen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{V}}(\mu)$ für **X** berechnete Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ zusammen aus der konstanten Mindestmarge **U** und dem beurteilbaren, d. h. mit **O** vergleichbaren, Margenzahlungsstrom $\hat{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{X})) = (0,\mu(\mathbf{X}))^\mathsf{T}$, der die Endentnahme $\mu(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = 1$ als Maßstab nimmt. Bei der Zielsetzung mit der inhomogenen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \overline{\mathbf{V}}(\mu)$ wird die Sofortentnahme zum Zeitpunkt $t = 0$ und bei einer beliebigen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ eine allgemeiner auf die beiden Zeitpunkte $t = 0$ und $t = 1$ verteilte Entnahme als Maßstab genommen. Weitere Voraussetzungen über die Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ werden weiter unten noch zur Sicherung der eindeutigen realen Duplizierung angegeben.

Berücksichtigung des Basiszahlungsstroms

In der Praxis ist bei der Beurteilung und dem Vergleich von Zahlungsströmen stets auch noch der im finanziellen Hintergrund vorhandene Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = (B_0,B_1)^\mathsf{T}$ zu berücksichtigen, der den Basisfall beschreibt, wenn keiner der betrachteten Zahlungsströme **X** oder **Y** durchgeführt wird bzw. wenn die Unterlassungsalternative $\mathbf{O} = (0,0)^\mathsf{T}$ gewählt wird. Die Basiszahlungen B_j können jeweils positiv (liquide Mittel), gleich Null oder negativ (Finanzmitteldefizit) sein (Kruschwitz (1998), S. 53). Beim Konzept der Bewertung mittels der Duplizierung wird vorausgesetzt, dass für alle in Erwägung gezogenen Kombinationen **B** + **X**, die durch Hinzunahme eines Zahlungsstroms **X** zum Basiszahlungsstrom **B** entstehen, zu allen Zeitpunkten innerhalb der Laufzeit die (situative) Liquidität gesichert ist, also alle fälligen Zahlungsverpflichtungen erfüllt werden können (Gebhardt et al. (1993), S. 10, 100):

$$B_j + X_j \geq 0, \quad j = 0,1.$$

Falls schon die Basiszahlungen nichtnegativ sind,

$$B_j \geq 0, \qquad j = 0,1,$$

ist der Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{O}$ eine durchführbare Kombinationsalternative. In diesem Fall kann **B** als Unterlassungsalternative bei den Kombinationen bezeichnet werden.

Beispielsweise kann Robinson bei seinem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = (100;0)^{\mathsf{T}}$ nicht die Investition $\mathbf{I}(110) = (-110;99)^{\mathsf{T}}$ auf dem Kapitalmarkt durchführen, da im Zeitpunkt $t = 0$ seine Auszahlung $I_0 = -110$ betragsmäßig die Einzahlung $B_0 = 100$ übersteigen würde und somit seine Liquidität nicht vorhanden wäre. Die Durchführung der Investition $\mathbf{I}(110)$ müsste erst durch die Hinzunahme eines weiteren Zahlungsstroms, hier der Finanzierung $\mathbf{F}(10) = (10;-15)^{\mathsf{T}}$, gesichert werden. Bei seinem vorhandenen Eigenkapital **B** kann er jeweils als alleiniges Projekt an Investitionen die Lagerhaltung $\mathbf{L}(\alpha) = \alpha\cdot(-1;q_L)^{\mathsf{T}}$ und die Kapitalmarktinvestition $\mathbf{I}(\alpha) = \alpha\cdot(-1;q_H)^{\mathsf{T}}$ nur bis zu einem Anlagekapital von $\alpha = B_0 = 100$ durchführen. Da der Basiszahlungsstrom **B** zum Zeitpunkt $t = 1$ die Komponente $B_1 = 0$ aufweist, kann Robinson als alleiniges Projekt keine Kapitalmarktfinanzierung $\mathbf{F}(\kappa) = \kappa\cdot(1;-q_S)^{\mathsf{T}}$, $\kappa > 0$, vornehmen. In Kombination mit der Realinvestition $\mathbf{A}(\alpha) = \alpha\cdot(-1;q_A)^{\mathsf{T}}$ im Ackerbau mit der Anlagesumme von $\alpha = 20$ kann Robinson jedoch auch Kapitalmarktkredite $\mathbf{F}(\kappa)$ bis zur Kredithöhe von $\kappa = 40/1{,}5 \approx 26{,}66$ aufnehmen. Bei den oben unter Verwendung der Basisausstattung **B** zusammen mit Investitionen $\mathbf{A}(\alpha)$, $\mathbf{I}(\alpha)$ und $\mathbf{L}(\alpha)$ und Finanzierungen $\mathbf{F}(\kappa)$ als Kombinationszahlungsströme erhaltenen Konsumplänen $\mathbf{X} := \mathbf{C}^{\mathrm{L}}$, $\mathbf{Y} := \mathbf{C}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{A}}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{AI}}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{AF}}$ ist dann aber für die Gewährleistung der Liquidität und damit der Durchführbarkeit der Zahlungsströme als finanzieller Hintergrund der verbleibende Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ zu verwenden.

Der Zahlungsstrom **X** wird beim Bewertungskonzept der Duplizierung stets nur in Verbindung mit dem finanziellen Hintergrund **B** betrachtet und nicht wie bei der Replizierung auch noch mit einem weiteren Zahlungsstrom **S'** vom Kapitalmarkt kombiniert. Es hängt hier demnach nur von **B** ab, ob $\mathbf{B} + \mathbf{X}$ überhaupt durchgeführt werden kann. Bei realitätsbezogener Berücksichtigung der situativen Liquidität wird man die Bewertung auf die Zahlungsströme **X** mit $\mathbf{X} + \mathbf{B} \geq \mathbf{O}$ beschränken. Sinnvollerweise ist aber sowohl für den betrachteten Zahlungsstrom **X** als auch für sein „Duplikat" **S** der gleiche Hintergrund **B** zu wählen. Für den Vergleich von **X** mit **S** ergibt sich dann die Gleichung

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} = \mathbf{B} + \mathbf{S} + \mathbf{W}$$

und somit der gleiche Differenzvektor $\mathbf{W} = \mathbf{X} - \mathbf{S}$ wie bei $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. Beim Konzept der Duplizierung kann daher bei der Rechnung der Basiszahlungsstrom **B** weggelassen werden. Im Gegensatz dazu geht im nachfolgenden Abschnitt 2.2.2 beim Konzept der Replizierung der Basiszahlungsstrom **B** mit in die Beurteilung und den Vergleich ein.

Es wird nachfolgend noch gezeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen für die Zinsfaktoren q_H und q_S und die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ bei der Duplizierung des Zahlungsstroms **X** auch der Supplementtyp von **S** und damit insgesamt die Duplizierung eindeutig festgelegt ist. Den Konsumplänen **X** und **Y** können dann eindeutig Beurteilungsvektoren $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ und $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ zugeordnet werden, sodass damit eine Präferenzordnung definiert werden kann. Der jeweilige Beurteilungsvektor $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$

stellt den realen Margenzahlungsstrom dar, der sich als Unterschied der realen „Nachbildung“ **S** auf dem Kapitalmarkt zum betrachteten Zahlungsstrom **X** ergibt.

Beispiel 2.3 – Fortsetzung 1: Vergleich der Konsumpläne mittels der Duplizierung

Die Duplizierung des Konsumplans $\mathbf{X} = (60,32)^\mathsf{T}$ mit Ausgangspunkt (Bezugspunkt) $\mathbf{U} = (45,40)^\mathsf{T}$, einer Supplementfinanzierung $\mathbf{S} = \mathbf{F}(\kappa) = \kappa\cdot(1,-q_S)^\mathsf{T}$, $q_S = 1{,}5$, $\kappa \geq 0$, vom Kartoffelmarkt und der homogenen Beurteilungskurve $\hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\mu)^\mathsf{T}$ ergibt die additive Zerlegung

$$\mathbf{X} - \mathbf{U} = \mathbf{F}(\kappa) + \hat{\mathbf{V}}(\mu)$$

des Differenzvektors $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{X} - \mathbf{U}$ bzw. in der Komponentenschreibweise das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 15 &= \kappa &&+ 0,\\ -8 &= -q_S\cdot\kappa &&+ \mu \end{aligned}$$

mit der Lösung $(\kappa;\mu) = (15;14{,}5)$, der realen Supplementfinanzierung $\mathbf{F}(5) = (15;-22{,}5)^\mathsf{T}$ und dem Beurteilungsvektor $\hat{\mathbf{V}}(14{,}5) = (0;14{,}5)^\mathsf{T}$. Ein analoger Ansatz

$$\mathbf{X} - \mathbf{U} = \mathbf{I}(\alpha) + \hat{\mathbf{V}}(\mu)$$

mit einer Supplementinvestition $\mathbf{I}(\alpha) = \alpha\cdot(-1,q_H)^\mathsf{T}$, $\alpha \geq 0$, und einem Beurteilungsvektor $\hat{\mathbf{V}}(\mu)$ liefert für den Transformationsparameter α und den Beurteilungsparameter μ ein lineares Gleichungssystem mit der eindeutigen Lösung $\alpha = -15 < 0$ und $\mu = 21{,}5$, so dass im Widerspruch zum Ansatz der Zahlungsstrom $\mathbf{I}(\alpha)$ keine reale Investition ist. Bei der vorliegenden Beurteilungskurve $\hat{\mathbf{V}}(\mu)$ ist also als Supplement im Falle $X_0 - U_0 > 0$ eine Finanzierung $\mathbf{F}(\kappa)$ zu nehmen und im Falle $X_0 - U_0 \leq 0$ eine Investition $\mathbf{I}(\alpha)$.

Die Duplizierung von $\mathbf{Y} = (40,54)^\mathsf{T}$ mit Ausgangspunkt $\mathbf{U}$ ergibt wegen $Y_0 - U_0 = -5 < 0$ demzufolge

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} + \mathbf{I}(\alpha) + \hat{\mathbf{V}}(\mu)$$

mit der realen Supplementinvestition $\mathbf{I}(5) = (-5;4{,}5)^\mathsf{T}$ und dem Beurteilungsvektor $\hat{\mathbf{V}}(9{,}5) = (0;9{,}5)^\mathsf{T}$.

Die den Zahlungsströmen **X** und **Y** auf diese Weise zugeordneten Beurteilungsvektoren $\hat{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{X}))$ und $\hat{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{Y}))$ werden zum Vergleich der Zahlungsströme verwendet. Aus

$$\hat{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{X})) = (0;14{,}5)^\mathsf{T} \underset{\cdot}{>} (0;9{,}5)^\mathsf{T} = \hat{\mathbf{V}}(\mu(\mathbf{Y}))$$

wird geschlossen, dass **X** günstiger als **Y** ist:

$$\mathbf{X} \rhd_{\mathrm{DV}} \mathbf{Y}.$$

Eine grafische Darstellung der Duplizierung der Konsumpläne **X** und **Y** ist in Abbildung 2.13 angegeben. Es kann gezeigt werden, dass die hier verwendete spezielle Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot(0;1)^\mathsf{T}$ eine Sonderstellung einnimmt. Für $\hat{\mathbf{V}}(\mu)$ und für beliebige Zinsfaktoren $q_H, q_S \in \mathbb{R}$ weisen die unten noch verwendeten „Abstandsfunktionen“ $\alpha_{H,S}(\mu) = \mathbf{P}_{H,S}{}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu) = \mu$ die gleiche Monotonieart auf, sodass für jeden Zahlungsstrom **X** von den beiden Duplizierungen mit Ausgangspunkt **U** genau eine mit realem Supplement möglich ist. Es existiert also entweder eine reale Duplizierung mit einer Supplementinvestition oder eine mit einer Supplementfinanzierung. Für eine beliebige Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ gilt dies jedoch im Allgemeinen nicht und es muss die eindeutige reale Duplizierung eines jeden Zahlungsstroms **X** erst noch durch eine zusätzliche Bedingung an die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ und die Zinsfaktoren q_H und q_S gesichert werden. △

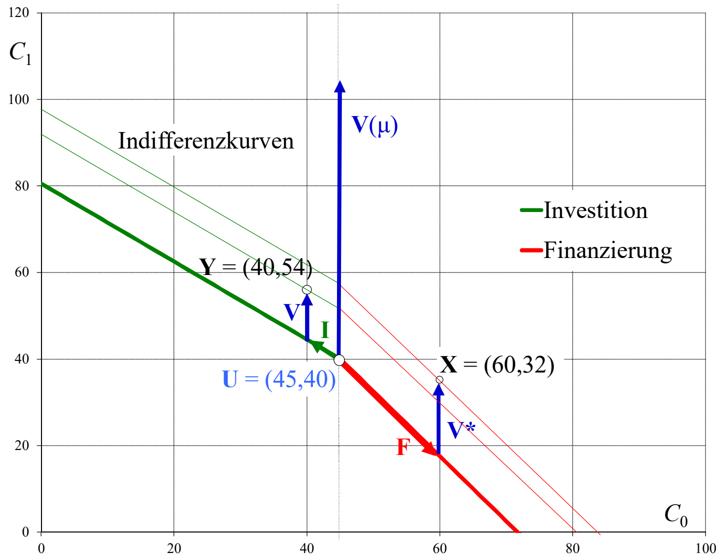


Abb. 2.13 Der Vergleich der Konsumpläne **X** und **Y** mittels Duplizierung mit der Indifferenzkurve Ind(**U**), der Supplemente des Kapitalmarktes und der Beurteilungskurve $\hat{\mathbf{V}}(\mu)$

Eindeutige Festlegung der realen Duplizierung durch eine hinreichende Bedingung

Beim Konzept der Duplizierung wird jetzt gefordert, dass auch allgemein bei einer beliebigen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ der zu verwendende Supplementtyp noch eindeutig entweder als reale Investition oder als reale Finanzierung festzulegen ist (Verbot der gleichzeitigen Durchführung einer Ergänzungsinvestition und einer Ergänzungsfinanzierung nach Kruschwitz (1998), S. 57). Eine Plausibilitätsbetrachtung hierzu wird in Abschnitt 5.1.5 angegeben. Entsprechende Überlegungen zur Existenz und Einzigkeit der realen Duplizierung mit diesem Verbot findet man für eine beliebige Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ in den Abschnitten 5.1.5, 5.1.7 und 8.4. Zu den in Abschnitt 8.4 betrachteten Supplementsystemen existieren positive Normalenvektoren $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}$ für die 2^n Supplementmengen $L_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{S}^1_{E_1}, \ldots, \mathbf{S}^n_{E_n}\}$ bzw. für die zugehörigen Hyperebenen $H_{\mathbf{E}}$, $\mathbf{E} \in M^n$, $M = \{H, S\}$. Für die Laufzeit $n = 1$ werden jetzt also für die Duplizierung in $\mathbb{R}^2$ nicht alle beliebigen Supplemente **S** des hier vorliegenden Kapitalmarkts

$$C := \text{cone}\,\{\mathbf{I}(1), \mathbf{F}(1)\} := \{\alpha\mathbf{I}(1) + \kappa\mathbf{F}(1) : \alpha, \kappa \geq 0\}$$

zugelassen, sondern nur Supplemente auf den Transformationsstrahlen

$$C_H := \text{ray}\,\{\mathbf{I}(1)\} = \{\alpha\mathbf{I}(1) : \alpha \geq 0\} \text{ und}$$
$$C_S := \text{ray}\,\{\mathbf{F}(1)\} = \{\kappa\mathbf{F}(1) : \kappa \geq 0\},$$

also auf der geknickten Transformationsgeraden

$$\check{T} = \text{ray}\,\{\mathbf{I}(1)\} \cup \text{ray}\,\{\mathbf{F}(1)\}.$$

Dieser Transformationskegel $\check{T}$ wird in Abschnitt 5.1.5 auch zulässige Supplementmenge genannt. Die Existenz und Einzigkeit der speziellen Duplizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{U} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X},$$

mit festem Ausgangspunkt $\mathbf{U}$, einem Beurteilungskurvenanteil $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ und der Supplementbedingung

(SB) $\quad \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in \check{T}$

ist gleichbedeutend zur Existenz und Einzigkeit der Duplizierung des Differenzvektors

$$\boldsymbol{\zeta} := \mathbf{X} - \mathbf{U}$$

mit Ausgangspunkt $\mathbf{O}$, einem Beurteilungskurvenanteil $\mathbf{V}(\mu^*(\boldsymbol{\zeta}))$ und der Supplementbedingung (SB) $\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\zeta}) \in \check{T}$:

$$\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{V}(\mu^*(\boldsymbol{\zeta})) = \boldsymbol{\zeta}$$

mit $\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in \check{T}$, $\mathbf{V}(\mu^*(\boldsymbol{\zeta})) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$. Durch die Supplementbedingung (SB) ist gewährleistet, dass eine *reale* Duplizierung, d. h. eine Duplizierung mit Supplement vom Kapitalmarkt, vorliegt und dieses Supplement noch in der zulässigen Supplementmenge $\check{T}$ liegt. Somit wird die elementweise eindeutige additive Zerlegung der Ebene $\mathbb{R}^2$ mittels der Minkowski-Summe

$$\mathbb{R}^2 = \check{T} + \mathbf{V}(J)$$

gefordert. Für die Duplizierung (additive Zerlegung) von $\boldsymbol{\zeta}$ sind also der Beurteilungskurvenanteil $\mathbf{V}(\mu)$ und der als indifferent angesehene reale Kapitalmarktanteil $\mathbf{S}$ zu bestimmen:

$$\mathbf{S} = \mathbf{I}(\alpha) \;=\; \alpha\cdot(-1,q_H)^\mathsf{T},\ \alpha \geq 0, \text{ oder}$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{F}(\kappa) \;= -\,\kappa\cdot(-1,q_S)^\mathsf{T},\ \kappa > 0,$$

also

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\lambda,q) = \lambda\cdot\mathbf{T}(q) := \lambda\cdot(-1,q)^\mathsf{T} \quad \text{mit}$$
$$q = q_H,\ \lambda = \alpha \geq 0 \text{ oder}$$
$$q = q_S,\ \lambda = -\,\kappa < 0.$$

Bei der Parameterdarstellung der Supplemente $\mathbf{S}$ mit Hilfe der Transformationsvektoren $\mathbf{T}(q) = (-1,q)^\mathsf{T}$, $q = q_H, q_S$, werden die realen Investitionen durch die nichtnegativen Parameter λ erfasst und die realen Finanzierungen durch die negativen Parameter λ.

Durch geeignete Voraussetzungen über die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ und die Zinsfaktoren q_H und q_S ist als Erstes zu sichern, dass das im Allgemeinen bezüglich μ nichtlineare Gleichungssystem

$$\lambda\cdot\mathbf{T}(q) + \mathbf{V}(\mu) = \boldsymbol{\zeta}$$

sowohl für den Parameter $q = q_H$ als auch für den Parameter $q = q_S$ jeweils eindeutig lösbar ist. Bezeichnet man die Lösungen dieser beiden Gleichungssysteme mit $(\lambda_H,\mu_H)^\mathsf{T}$ und $(\lambda_S,\mu_S)^\mathsf{T}$,

$$\lambda_H\cdot\mathbf{T}(q_H) \quad + \mathbf{V}(\mu_H) = \boldsymbol{\zeta},$$
$$\lambda_S\cdot\mathbf{T}(q_S) \quad + \mathbf{V}(\mu_S) = \boldsymbol{\zeta},$$

so ist als Zweites zu sichern, dass als reales Supplement entweder nur eine echte reale Investition $\mathbf{S} = \lambda_H\mathbf{T}(q_H) = \mathbf{I}(\lambda_H)$, $\lambda_H > 0$, oder nur eine echte reale Finanzierung

$\mathbf{S} = \lambda_S \cdot \mathbf{T}(q_S) = \mathbf{F}(-\lambda_S)$, $\lambda_S < 0$, oder nur das neutrale Supplement $\mathbf{S} = \mathbf{O}$ ($\lambda_H = \lambda_S = 0$) in Frage kommt. Es ist also zu sichern, dass nur eines der beiden Gleichungssysteme ($q = q_H$, q_S) mit einem realen Supplement zu lösen ist.

Hinsichtlich des **ersten Problems** kann gezeigt werden (der Beweis ist hier weggelassen), dass die jeweilige eindeutige Lösbarkeit der zu den Parametern $q = q_H$ und $q = q_S$ gehörigen Gleichungssysteme

$$\lambda \cdot \mathbf{T}(q) + \mathbf{V}(\mu) = \boldsymbol{\zeta}$$

für alle rechten Seiten $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^2$ gleichbedeutend dazu ist, dass die beiden reellwertigen Funktionen

$$\mu \in J \mapsto \alpha_H(\mu) := \mathbf{P}_H^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu) \quad = q_H V_0(\mu) + V_1(\mu) \in \mathbb{R},$$
$$\mu \in J \mapsto \alpha_S(\mu) := \mathbf{P}_S^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu) \quad = q_S V_0(\mu) + V_1(\mu) \in \mathbb{R}$$

($\mathbf{P}_{H,S} = (q_{H,S},1)^{\mathsf{T}} \perp \mathbf{T}(q_{H,S}) = (-1,q_{H,S})^{\mathsf{T}}$) als **Funktionen** $\alpha_{H,S}(\mu) : J \longrightarrow \mathbb{R}$ **bijektiv**, also injektiv und surjektiv, sind. Zum Nachweis der Surjektivität der Funktionen wird dabei die Unbeschränktheit dieser Funktionen nach oben und nach unten gezeigt und dann die Stetigkeit der Abbildungen $\mathbf{V}(\mu)$ und $\alpha_{H,S}(\mu)$ und der Zwischenwertsatz[1] von Bolzano (1781–1848) verwendet. Nach einem weiteren mathematischen Satz[2] der Analysis (Erwe, Bd. 1 (1967), S. 117) sind dann die „Abstandsfunktionen" $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$ jeweils auch streng monoton (steigend oder fallend). Für die Marktzinsfaktoren $q = q_H$, q_S ist jeweils der Vektor $\mathbf{P} = \mathbf{P}(q) = (q,1)^{\mathsf{T}}$ ein zum Richtungsvektor $\mathbf{T} = \mathbf{T}(q) = (-1,q)^{\mathsf{T}}$ der Geraden

$$T = \{\mathbf{C} = \lambda\mathbf{T} : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{C} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{C} = 0\}$$

orthogonaler Normalenvektor (Stellungsvektor). Aus der Hesseschen Normalform der Geradendarstellung (benannt nach dem deutschen Mathematiker L.O. Hesse (1811–1874); zur ausführlicheren Darstellung siehe etwa Arens et al. (2010), S. 646) ergibt sich, dass der Funktionswert $\alpha(\mu) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu)$ bis auf den Faktor $1/\|\mathbf{P}\|$ ($\|\mathbf{P}\| = \|\mathbf{P}\|_2 = \left(P_0^2 + P_1^2\right)^{1/2}$) die mit Vorzeichen versehene Entfernung (den orientierten Abstand) des Kurvenpunktes $\mathbf{V}(\mu)$ von der Geraden T beschreibt. Die zum Zinsfaktor q_H gehörigen Parameter λ_H und μ_H und die zum Zinsfaktor q_S gehörigen Parameter λ_S

---

1 Der Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz wurde zuerst im Jahr 1817 von dem böhmischen Mathematiker, Philosophen und Theologen Bernardus Placidus Gonzal Nepomuk Bolzano (1781–1848) und später noch von dem deutschen Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897) bewiesen. Er ist einer der wichtigsten Sätze über reellwertige stetige Funktionen und präzisiert die Aussage, dass der Graph einer stetigen Funktion ohne Absetzen gezeichnet werden kann. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist die Aussage, dass bei einer stetigen Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen den metrischen Räumen X und Y das Bild (der Wertebereich) einer bogenweise (kurvenweise, weg-) zusammenhängenden Menge $M \subseteq X$ ebenfalls bogenweise zusammenhängend ist. Bolzano betrieb Grundlagenforschung in der Analysis, interessierte sich für die Theorie mathematisch korrekter Beweise und schrieb ein Werk über reelle Funktionen. Weierstraß war ein deutscher Mathematiker, der die Analysis reformierte und einen logisch fundierten Aufbau gab.

2 Nach dem betreffenden Satz der Analysis ist eine stetige reellwertige Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) genau dann umkehrbar (injektiv), wenn sie streng monoton ist. Friedhelm Erwe (1922–2021) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit Funktionentheorie und Limitierungstheorie befasste. Er schrieb Bücher über Analysis und Differentialgleichungen und lehrte an der Universität Bonn und der RWTH Aachen.

und μ_S sind jeweils krummlinige Koordinaten des Punktes $\boldsymbol{\zeta}$ im affinen Raum $\mathbb{R}^2$. Speziell bei positiven Marktzinsfaktoren q_H und q_S bzw. positiven Normalenvektoren $\mathbf{P}_{H,S} = (q_{H,S},1)^\mathsf{T}$ ist die Unbeschränktheit der Funktionen $\alpha_{H,S}(\mu)$ gleichbedeutend zur Unbeschränktheit von $\|\mathbf{V}(\mu)\|$ bzw. $\mathbf{V}(\mu)$ an den Intervallgrenzen a und b.

Hinsichtlich des **zweiten Problems**, also der Einzigkeit einer realen Lösung für die beiden Gleichungssysteme ($q = q_H$, q_S) zusammen, ist die Vorzeichenverteilung der Transformationsparameter λ_H und λ_S zu betrachten. Es können die folgenden Fälle auftreten, wobei der Fall o) von besonderem Interesse ist:

o) sgn λ_H = sgn λ_S: Diese Bedingung der Vorzeichengleichheit der Transformationsparameter für jedes beliebige $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^2$ wird mit (VGT) bezeichnet.
Im Unterfall α) $\lambda_H, \lambda_S > 0$ liefert nur die Investition $\mathbf{S}(\lambda_H,q_H) = \lambda_H\mathbf{T}(q_H) = \mathbf{I}(\lambda_H)$ ein reales Supplement vom Kapitalmarkt, während $\mathbf{S}(\lambda_S,q_S) = \lambda_S\mathbf{T}(q_S) = \mathbf{F}(-\lambda_S)$ wegen $\kappa = -\lambda_S < 0$ keine reale Finanzierung, also bei $q_S \neq q_H$ kein reales Supplement ist.
Im Unterfall β) $\lambda_H, \lambda_S < 0$ liefert nur die Finanzierung $\mathbf{S}(\lambda_S,q_S) = \mathbf{F}(-\lambda_S)$ ein reales Supplement vom Kapitalmarkt und $\mathbf{S}(\lambda_H,q_H) = \mathbf{I}(\lambda_H)$ bei $q_H \neq q_S$ keines.
Im Unterfall γ) $\lambda_H = \lambda_S = 0$ liefert nur das das neutrale Supplement $\mathbf{S} = \mathbf{O}$ ein reales Supplement. In allen drei Unterfällen existiert also genau ein reales Supplement.

i) $\lambda_H < 0$ und $\lambda_S > 0$: Weder $\mathbf{I}(\lambda_H) = (-\lambda_H,\lambda_H q_H)^\mathsf{T}$ noch $\mathbf{F}(-\lambda_S) = (\lambda_S,-\lambda_S q_S)^\mathsf{T}$ ist ein reales Supplement vom Kapitalmarkt. Daher existiert kein reales Supplement.

ii) $\lambda_H > 0$ und $\lambda_S < 0$: $\mathbf{I}(\lambda_H)$ und $\mathbf{F}(-\lambda_S)$ liefern wegen $\lambda_H \neq \lambda_S$ zwei verschiedene reale Supplemente vom Kapitalmarkt. Das reale Supplement ist also nicht eindeutig bestimmt.

iii) $\lambda_H = 0$ und $\lambda_S \neq 0$: $\mathbf{I}(\lambda_H) = \mathbf{O}$ ist eine reale Investition.
Im Unterfall α) $\lambda_S > 0$ ist $\mathbf{F}(-\lambda_S)$ keine reale Finanzierung und bei $q_S \neq q_H$ auch keine Investition, sodass genau ein reales Supplement existiert.
Im Unterfall β) $\lambda_S < 0$ ist $\mathbf{F}(-\lambda_S)$ eine reale Finanzierung, sodass zwei reale Supplemente existieren.

iv) $\lambda_S = 0$ und $\lambda_H \neq 0$: $\mathbf{F}(-\lambda_S) = \mathbf{O}$ ist eine reale Finanzierung.
Im Unterfall α) $\lambda_H > 0$ ist $\mathbf{I}(\lambda_H)$ eine reale Investition, sodass zwei reale Supplemente existieren.
Im Unterfall β) $\lambda_H < 0$ ist $\mathbf{I}(\lambda_H)$ keine reale Investition und bei $q_H \neq q_S$ auch keine Finanzierung, sodass genau ein reales Supplement existiert.

Die im Fall o) angegebene Bedingung (VGT) der **Vorzeichengleichheit der Transformationsparameter** λ_H und λ_S für beliebige zu duplizierende Vektoren $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^2$ ist also eine **hinreichende Bedingung** für die Existenz von genau einem realen Supplement für die additive Zerlegung des Vektors $\boldsymbol{\zeta}$. Es gibt dann nur eine reale Duplizierung des Zahlungsstroms $\boldsymbol{\zeta}$. Setzt man diese Bedingung mit voraus, so kann also in Abhängigkeit vom Vorzeichen sgn λ_H = sgn λ_S der Transformationsparameter λ_H und λ_S das Supplement als eindeutig bestimmtes reales Geschäft vom Kapitalmarkt folgendermaßen festgelegt werden:

$$\mathbf{S} = \begin{cases} \mathbf{S}(\lambda_H, q_H) &= \lambda_H \mathbf{T}(q_H) &= \lambda_H \mathbf{I}(1) &= \mathbf{I}(\lambda_H) \quad \text{im Falle } \lambda_H \geq 0, \\ \mathbf{S}(\lambda_S, q_S) &= \lambda_S \mathbf{T}(q_S) &= -\lambda_S \mathbf{F}(1) &= \mathbf{F}(-\lambda_S) \quad \text{im Falle } \lambda_S < 0. \end{cases}$$

Die Festlegung des Supplements beinhaltet die Entscheidung für eines der beiden Lösungspaare $(\lambda_H,\mu_H)^\mathsf{T}$ oder $(\lambda_S,\mu_S)^\mathsf{T}$. Die Bedingung (VGT) der Vorzeichengleichheit ist jedoch keine notwendige Bedingung für die Existenz von genau einer realen Duplizierung von $\boldsymbol{\zeta}$. Dies kann durch Beispiele belegt werden, in denen einer der beiden oben angegebenen Fälle iii.α) oder iv.β) auftritt. Die Bedingung

(VGT) $\qquad \operatorname{sgn} \lambda_H = \operatorname{sgn} \lambda_S$

kann durch eine Eigenschaft der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ und der Marktzinsfaktoren q_H und q_S charakterisiert werden. Es kann nämlich gezeigt werden, dass die Bedingung (VGT) der Vorzeichengleichheit der Transformationsparameter λ_H und λ_S bei der Duplizierung

$$\mathbf{S} + \mathbf{V}(\mu) = \boldsymbol{\zeta}, \quad \mathbf{S} \in \check{T},$$

eines jeden Vektors $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^2$ mit Ausgangspunkt $\mathbf{O}$ gleichbedeutend ist zur Bedingung (GMA) der **gleichen Monotonieart der „Abstandsfunktionen“** $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$:

(GMA) $\qquad \alpha_{H,S}(\mu) \nearrow \ \vee \ \alpha_{H,S}(\mu) \searrow.$

Der ausführliche Beweis wird hier weggelassen, es werden nur einige Anmerkungen dazu angegeben.

Anmerkungen zum Beweis für „(VGT) $\Leftrightarrow$ (GMA)“: Entscheidend wird im Beweis verwendet, dass bei vorausgesetzter strenger Monotonie der Funktionen $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$ deren gleiche Monotonieart schon durch eine der beiden folgenden Vorzeichenbedingungen charakterisiert ist:

I) $\quad \exists\, \mu_0 \in J \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{sgn} \alpha_H(\mu_0) = \operatorname{sgn} \alpha_S(\mu_0)$;

II) $\quad \exists\, \mu_1, \mu_2 \in J, \mu_1 \neq \mu_2$, mit $\operatorname{sgn} [\alpha_H(\mu_1) - \alpha_H(\mu_2)] = \operatorname{sgn} [\alpha_S(\mu_1) - \alpha_S(\mu_2)]$.

Falls die gleiche Monotonieart vorliegt, gelten die hier angegebenen Vorzeichenbedingungen dann auch für alle beliebigen Parameter $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in J$. Unter Verwendung des zum Beurteilungsvektor $\mathbf{V}(\mu_{H,S})$ orthogonalen Vektors $\mathbf{V}^\perp(\mu_{H,S})^\mathsf{T} := (V_1(\mu_{H,S}), -V_0(\mu_{H,S}))$ und mit Hilfe der Umformung

$$\mathbf{V}^{\perp\mathsf{T}}\mathbf{T} = -\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V} \qquad (\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mu_{H,S}),\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(q_{H,S}) = (q_{H,S},-1)^\mathsf{T},\ \mathbf{T} = \mathbf{T}(q_{H,S}) = (-1,q_{H,S})^\mathsf{T})$$

kann aus dem Gleichungssystem

$$\lambda_{H,S} \cdot \mathbf{T}(q_{H,S}) + \mathbf{V}(\mu_{H,S}) = \boldsymbol{\zeta}$$

die folgende reellwertige Gleichung hergeleitet werden:

$$\lambda_{H,S} \cdot \alpha_{H,S}(\mu_{H,S}) = -\mathbf{V}^\perp(\mu_{H,S})^\mathsf{T}\boldsymbol{\xi}.$$

Für die Beweisrichtung „(VGT) $\Rightarrow$ (GMA)“ genügt es zu zeigen, dass aus der Vorzeichengleichheit der Transformationsparameter eines speziellen Punktes $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{O}$, beispielsweise $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{I}(1)$, die Vorzeichenbedingung I) folgt. Für die Beweisrichtung „(GMA) $\Rightarrow$ (VGT)“ wird eine Fallunterscheidung durchgeführt, ob der Punkt $\boldsymbol{\zeta}$ auf einer der beiden zu den Richtungsvektoren $\mathbf{I}(1)$ und $\mathbf{F}(1)$ gehörigen Transformationsgeraden I und F liegt oder neben diesen liegt. Im aufwendigeren Fall $\boldsymbol{\zeta} \notin I \cup F$ erhält man mit der Koordinatendarstellung $\boldsymbol{\zeta} = \gamma_H \mathbf{T}_H + \gamma_S \mathbf{T}_S$, $\mathbf{T}_H = \mathbf{T}(q_H)$, $\mathbf{T}_S = \mathbf{T}(q_S)$, $\gamma_H = -\alpha_S(\mu_S)/\Delta q$, $\gamma_S = \alpha_H(\mu_H)/\Delta q$, $\Delta q = q_S - q_H$, für die Transformationsparameter die Darstellung

$$\lambda_H = [\alpha_S(\mu_H) - \alpha_S(\mu_H)]/\Delta q,$$
$$\lambda_S = [\alpha_H(\mu_H) - \alpha_H(\mu_S)]/\Delta q,$$

mit welcher deren Vorzeichengleichheit mittels der Vorzeichenbedingung II) gefolgert werden kann.

□

Spezialfälle für das Vorliegen von (GMA):

1) Beispielsweise sind die beiden Funktionen $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$ streng monoton steigend, wenn die Marktzinsfaktoren q_H und q_S positiv sind. Dies entspricht in Ab-

schnitt 5.1.9 bei der Behandlung einer beliebigen Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ der Voraussetzung der Positivität der 2^n Normalenvektoren $\mathbf{P_E}$ der Supplementmengen $L_\mathbf{E}$.
2) Unter der Voraussetzung der Bijektivität und damit der strengen Monotonie der Abstandsfunktionen $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$ ist im Falle $q_H = 0$ die Funktion $\alpha_H(\mu) = V_1(\mu)$ auf Grund der Voraussetzung über die homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ streng monoton steigend. Setzt man noch (GMA) voraus, so sind $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$ streng monoton steigend. Analoges gilt für den Fall $q_S = 0$.
3) Aus 1) und 2) folgt, dass bei Bijektivität und gleicher Monotonieart der Funktionen $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$ der Fall, dass beide Funktionen streng monoton fallend sind, nur bei negativen Marktzinsfaktoren q_H und q_S auftreten kann.
4) Unter der Voraussetzung der Bijektivität und der gleichen Monotonieart von $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$ und unter der zusätzlichen Voraussetzung der Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts K,

(AF) $\qquad K \cap \mathbb{R}^2_{+0} = O,$

welche nach Beispiel 5.1 im Fall $n = 1$ durch die Marktzinsfaktorbedingungen

$$q_S \geq q_H,\ q_S > 0$$

charakterisiert wird, kann dann nur der Fall auftreten, dass $\alpha_H(\mu)$ und $\alpha_S(\mu)$ streng monoton steigend sind.
5) Unabhängig von den Marktzinsfaktoren q_H und q_S sind für eine spezielle Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ mit $V_0(\mu) \equiv 0$ die Abstandsfunktionen $\alpha_H(\mu) = \alpha_S(\mu) = V_1(\mu)$ beide streng monoton steigend.

Mit Hilfe dieses Instrumentariums, nämlich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ als eine bezüglich der Halbordnung $\gtrdot$ streng monoton steigende stetige Kurve und der Voraussetzung, dass die mit dem Haben- und Soll-Zinsfaktor q_H und q_S des Kapitalmarkts gebildeten reellwertigen Funktionen $\alpha_H(\mu) = \mathbf{P}_H^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu)$ und $\alpha_S(\mu) = \mathbf{P}_S^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu)$ bijektiv sind und die gleiche Monotonieart (als hinreichende Bedingung) aufweisen, kann jeder Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig real unter Beachtung der Supplementbedingung (SB) dupliziert werden. Dabei ist auch der Supplementtyp eindeutig bestimmt. Für die Berechnung der **eindeutigen realen Duplizierung** können zum Differenzvektor $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{X} - \mathbf{U}$ zuerst die Beurteilungsparameter μ_H und μ_S jeweils als einzige Lösung der Gleichung

$$\alpha_{H,S}(\mu_{H,S}) = \mathbf{P}_{H,S}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}$$

bestimmt werden. Auf Grund der Bijektivität der Funktionen $\alpha_{H,S}(\mu)$ sind die Parameter $\mu_{H,S}$ und damit auch die Vektoren $\mathbf{V}(\mu_{H,S})$ eindeutig bestimmt. Die für die Beurteilung von $\mathbf{X}$ interessierenden Vorzeichen (Quadrantenlagen) der Beurteilungsvektoren $\mathbf{V}(\mu_{H,S})$ ($\gtrdot$, =, $\lessdot$ $\mathbf{O}$) bzw. der Vorzeichen der Beurteilungsparameter $\mu_{H,S}$ sind zwar schon durch das jeweilige Vorzeichen sgn $\mathbf{P}_{H,S}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}$ und die Monotonieart 1) $\alpha_{H,S}(\mu_1) > 0$ oder 2) $\alpha_{H,S}(\mu_1) < 0$ ($\mu_1 \in\ ]0,b[$ fest fixiert) der Funktionen $\alpha_{H,S}(\mu)$ und bestimmt, sie können aber für die Indizes H und S voneinander verschieden sein:

$$\operatorname{sgn} \mathbf{V}(\mu_{H,S}) := \operatorname{sgn} \mu_{H,S} = (\operatorname{sgn} \mathbf{P}_{H,S}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta})(\operatorname{sgn} \alpha_{H,S}(\mu_1)).$$

Anschließend können die Transformationsparameter λ_H und λ_S jeweils aus der ersten Zeile der Vektorgleichung

$$\lambda_{H,S}\cdot\mathbf{T}_{H,S} = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{V}(\mu_{H,S})$$

bestimmt werden: $\lambda_{H,S} = \zeta_0 - V_0(\mu_{H,S})$. In Abhängigkeit von dem gleichen Vorzeichen der Transformationsparameter λ_H und λ_S erfolgt nun die Festlegung des realen Supplements $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\lambda,q) = \lambda\mathbf{T}(q)$ und des Beurteilungsvektors $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mu)$ für die additive Zerlegung $\mathbf{S} + \mathbf{V} = \boldsymbol{\zeta}$ von $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{X} - \mathbf{U}$ folgendermaßen:

Im Falle $\lambda_{H,S} \geq 0$ ist

$$\mathbf{S} = \lambda_H\mathbf{T}_H = \lambda(\mathbf{X})\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}(\lambda_H) \quad \text{mit } \lambda(\mathbf{X}) = \lambda_H,\ \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}_H,$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mu_H) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \quad \text{mit } \mu(\mathbf{X}) = \mu_H$$

und im Falle $\lambda_{H,S} < 0$ ist

$$\mathbf{S} = \lambda_S\mathbf{T}_S = \lambda(\mathbf{X})\mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(-\lambda_S) \quad \text{mit } \lambda(\mathbf{X}) = \lambda_S,\ \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}_S,$$
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mu_S) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \quad \text{mit } \mu(\mathbf{X}) = \mu_S.$$

In beiden Fällen hat man für das Supplement **S** die Darstellung

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \check{\mathbf{T}}(\lambda(\mathbf{X}))$$

mit

$$\check{\mathbf{T}}(\lambda) = \begin{cases} \lambda\mathbf{T}_H = \lambda\mathbf{I}(1) = \mathbf{I}(\lambda) & \text{für } \lambda \geq 0, \\ \lambda\mathbf{T}_S = -\lambda\mathbf{F}(1) = \mathbf{F}(-\lambda) & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

Durch die Fixierung des Ausgangspunktes **U** ist jedem $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig ein nur von **X** abhängiges, als indifferent anzusehendes, reales Supplement

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in \check{T}$$

auf der geknickten Transformationsgeraden

$$\begin{aligned} \check{T} &:= \{\check{\mathbf{T}}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathbf{C} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{C} = \mathbf{I}(\alpha),\ \alpha \geq 0, \text{ oder } \mathbf{C} = \mathbf{F}(\kappa),\ \kappa \geq 0\} \\ &= \text{ray } \{\mathbf{I}(1)\} \cup \text{ray } \{\mathbf{F}(1)\} \end{aligned}$$

des Kapitalmarkts, damit der zu **U** äquivalente (indifferente) Zahlungsstrom

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) := \mathbf{U} + \mathbf{S}(\mathbf{X}),$$

der nur von **X** abhängige Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$, der Beurteilungsvektor

$$\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X})$$

und der Beurteilungskurvenpunkt

$$\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$$

zugeordnet. Der Index D steht für das verwendete Konzept der Duplizierung und der Index W für die verwendete Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$. Die Parameter $\lambda(\mathbf{X})$ und $\mu(\mathbf{X})$ sind krummlinige Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{X} - \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich des Koordinatensystems, dessen Koordinatenlinien durch die geknickte Transformationsgerade $\check{T}$ und die Beurteilungskurve $G = \mathbf{V}(J)$ gegeben sind. Für positive $\lambda(\mathbf{X})$ liegt $\boldsymbol{\zeta}$ links der Kurve G und für negative $\lambda(\mathbf{X})$ rechts der Kurve G.

Definition der Präferenzordnung

Jeder Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich eindeutig real unter Beachtung der Supplementbedingung (SB) duplizieren durch ein reales Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ und einen Zahlungsstrom $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X})$ auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$. Mittels der Beurteilungsvektoren kann nun Robinson je zwei Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ vergleichen. Er kann mit Hilfe der zweidimensionalen Bewertungsfunktion (Präferenzfunktion)

$$\mathbf{w}_{\mathrm{D}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) \in \mathbf{W}(J) \subset \mathbb{R}^2$$

aus der Totalordnung $\geq$ auf $\mathbf{W}(J)$ eine neue Präferenzordnung (eine totale, reflexive und transitive Relation) $\trianglerighteq_{DW}$ auf $\mathbb{R}^2$ erzeugen:

$$\mathbf{X} \trianglerighteq_{DW} \mathbf{Y} \qquad (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so günstig wie } \mathbf{Y})$$
$$:\Leftrightarrow \ \mathbf{w}_{DW}(\mathbf{X}) \geq \mathbf{w}_{DW}(\mathbf{Y}).$$

Für diese Präferenzordnung könnten noch die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion, die Indifferenzkurven, die Monotonie bei Vorliegen von positiven Marktzinsfaktoren q_H und q_S, der Spezialfall mit einheitlichem Marktzinsfaktor $q_H = q_S = q$ für Investitionen und Finanzierungen, die Bessermengen und die Abhängigkeit der Präferenzordnung von den Marktzinsfaktorpaaren (q_H, q_S) und von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ beschrieben werden. Hinsichtlich dieser Themen wird jedoch auf das Kapitel 5 mit der Behandlung einer beliebigen Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ verwiesen.
Zum Spezialfall $q_H = q_S = q$ sei hier nur angemerkt, dass sich für alle möglichen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ in Abhängigkeit von der Monotonieart der Abstandsfunktion $\alpha(\mu) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu)$ als D-Präferenzordnungen nur zwei Präferenzordnungen ergeben. Bei streng monoton steigender Abstandsfunktion erhält man die Barwert-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ (siehe Abschnitte 1.2, 4.3.3, 5.3.3 Satz 5.5 a), 6.2 und 6.3.2) und bei streng monoton fallender Abstandsfunktion die dazu inverse Präferenzordnung $\trianglelefteq$. Ist der Kapitalmarkt noch arbitragefrei ($q_H = q_S = q > 0$), so tritt nur die Barwert-Präferenzordnung auf.

2.2.2 Replizierung der Zahlungsströme auf einen festen Bezugspunkt

Konzept der Replizierung
Robinson behandelt jetzt das Entscheidungsproblem von Abschnitt 2.2.1 noch mit dem Konzept der Replizierung (Glattstellung, additiven Ergänzung) des zu beurteilenden Zahlungsstroms. Er will entscheiden, welcher der Konsumpläne

$$\mathbf{X} = (60,32)^\mathsf{T} \text{ und } \mathbf{Y} = (40,54)^\mathsf{T}$$

für ihn vorteilhafter ist. Es soll wieder in einem heuristischen Vorgehen von versuchsweise gestellten Annahmen auf eine Präferenzordnung geschlossen werden. Das Konzept der Replizierung besteht darin, den zu beurteilenden oder zu vergleichenden Konsumplan $\mathbf{X}$ durch Hinzunahme einer akzeptierten Transformation $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{S}'$, die jetzt vom Kapitalmarkt genommen wird, zunächst bis auf einen vergleichbaren und beurteilbaren Margenzahlungsstrom $\mathbf{V}$ auf einer homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ glattzustellen, also in den Nullkonsumplan $\mathbf{O} = (0,0)^\mathsf{T}$ überzuführen:

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}' = \mathbf{O} + \mathbf{V}.$$

Diese Replizierung von $\mathbf{X}$ ist gleichbedeutend dazu, dass ausgehend vom Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ mittels eines Supplements (Ergänzungsgeschäfts) $\mathbf{S}'$ vom Kapitalmarkt und eines Beurteilungsvektors $\mathbf{V}$ der Konsumplan $\mathbf{O}$ dupliziert wird:

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}' - \mathbf{V} = \mathbf{O}.$$

Für einen allgemeineren Ansatz wird als Endpunkt der Duplizierung statt des Nullkonsumplans $\mathbf{O}$ ein beliebig fixierter Zahlungsstrom $\mathbf{U}$ als Bezugspunkt (Glattstellungspunkt) für die Festlegung der Nulllinie der Glattstellung verwendet. Die Replizierung von $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}' = \mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{W},$$

mittels der Hinzunahme eines Supplements $\mathbf{S}' = \mathbf{S}'(\mathbf{X})$ soll jetzt also bis auf einen beurteilbaren (mit **O** vergleichbaren) Zahlungsstrom **V** mit vorgegebener Struktur $\mathbf{V}(\mu)$ auf den Bezugspunkt **U** führen, der als Ziel der Glattstellung vorgegeben ist. Alternativ kann man formulieren, dass der Zahlungsstrom **X** durch Ergänzung mit dem Supplement **S'** auf den vergleichbaren Beurteilungspunkt **W** auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ glattgestellt wird oder der Zahlungsstrom **X** durch $-\mathbf{S}' + \mathbf{W}$ dupliziert wird:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{S}' + \mathbf{W}.$$

Soll nun eine Beurteilung oder ein Vergleich für **W** mittels der natürlichen Halbordnung bei monoton vorausgesetzter Präferenzordnung $\succcurlyeq$ auch eine Beurteilung bzw. einen Vergleich für **X** liefern, so ist der Zahlungsstrom $\mathbf{X} = -\mathbf{S}' + \mathbf{W}$ als indifferent zum Beurteilungspunkt **W** anzusehen und das Negative $-\mathbf{S}'$ des Supplement **S'** als indifferent (zu **O**). Diese Bewertung von $-\mathbf{S}'$ als indifferent anstelle der in Abschnitt 2.2.1 bei der Duplizierung verwendeten Bewertung des Supplements **S** selbst als indifferent zeigt sich nämlich bei der Darstellung der speziellen Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}V}(\mathbf{O}) = -C_{M^n}$ von **O** in Abschnitt 5.2.2.

Anforderungen an die Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$

Um die zu verschiedenen Zahlungsströmen **X** berechneten Beurteilungspunkte **W** vergleichen zu können, sollen diese Punkte wie im vorigen Abschnitt auf einer inhomogenen stetigen Beurteilungskurve

$$\mu \in J =]a,b[\mapsto \mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu),$$

$-\infty \le b < 0 < a \le \infty$, $\mathbf{W}(0) = \mathbf{U}$, liegen, die bezüglich der strengen Halbordnung $\dot{>}$ des $\mathbb{R}^2$ streng monoton steigend ist. Zur Sicherung einer eindeutigen realen Duplizierung wurde oben noch vorausgesetzt, dass die Abstandsfunktionen $\alpha_{H,S}(\mu) = \mathbf{P}_{H,S}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}(\mu)$ als Funktionen $\alpha_{H,S} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ bijektiv sind und beide die gleiche Monotonieart aufweisen.

Da die Beurteilungskurve genau die Punkte enthält, auf die glattgestellt werden soll, kann sie hier auch als Glattstellungskurve bezeichnet werden. Der zu **X** bestimmte Glattstellungspunkt $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) = (W_0, W_1)^{\mathrm{T}}$ ist geometrisch der Schnittpunkt der Glattstellungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ mit der Indifferenzkurve $\mathrm{Ind}(\mathbf{X})$ von **X**. Finanzmathematisch ist er ein Margenzahlungsstrom, der sich bei der kombinierten Durchführung von **X** und dem Kapitalmarktgeschäft **S'** ergibt. Gemäß der durch die Kurvenstruktur festgelegten zeitlichen Präferenz sind die Margen W_j auf die Zeitpunkte $j = 0$ und $j = 1$ verteilt. Dabei stellt eine Komponente $W_j > 0$ einen entnahmefähigen Betrag und eine Komponente $W_j < 0$ eine Zuzahlung für den Entscheider dar, den er im Vergleich zur Nichtdurchführung (Nichtannahme) des Zahlungsstroms **X** erhält bzw. leisten muss. Nicht weiter untersucht wird hier, wozu der Entscheider den Überschuss verwendet (für Konsum, Wiederanlage, Kreditrückzahlung, Schenkung oder, wenn er nicht gerade auf Robinsons Insel ist, auch für eine Steuerzahlung, etc.) bzw. wie er die Zuzahlung finanziert (durch Eigenkapital, Kreditaufnahme).

Berücksichtigung des Basiszahlungsstroms

Bei realitätsbezogener Berücksichtigung der situativen Liquidität kann auch noch ein Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^2$ als finanzieller Hintergrund des Entscheiders mit in die Rechnung einbezogen werden:

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}' = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})).$$

Bei den von Robinson zu vergleichenden Zahlungsströmen **X** und **Y** wurde der Basiszahlungsstrom **B** schon mit verrechnet, sodass bei deren Replizierung der Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ anzusetzen ist. Grundsätzlich beeinflusst der Basiszahlungsstrom dann auch die Bestimmung des Supplements **S'** und des Beurteilungsvektors **W**. Da hier im Ansatz der Replizierung ein beliebiger Glattstellungspunkt **U** auftreten kann, könnte ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch der Basiszahlungsstrom weggelassen werden ($\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$) und der modifizierte Glattstellungspunkt $\mathbf{U}^* = \mathbf{U} - \mathbf{B}$ verwendet werden. Zur leichteren Beschreibung der in der Literatur auftretenden Varianten (siehe Kapitel 3) werden hier aber sowohl der Basiszahlungsstrom **B** als auch der Bezugspunkt **U** in den Ansatz der Replizierung aufgenommen.

Beispielsweise verwendet Kruschwitz (1998), S. 44–60, einen Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = (M_t)$, bei seiner Zielsetzung „Vermögensstreben" die Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ mit

$$\mathbf{U} = (U_0,\ldots,U_n)^{\mathsf{T}},\ \mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\ldots,0,\mu)^{\mathsf{T}}$$

und bei seiner Zielsetzung „Einkommensstreben"

$$\mathbf{U} = (0,\ldots,0,U_n)^{\mathsf{T}},\ \mathbf{V}(\mu) = \tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{A} \text{ mit } \mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O}.$$

Grob (1999) verwendet den Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = (B_0,0,0,0,0,0)^{\mathsf{T}}$ und auf S. 93 die Beurteilungskurve der Endentnahme

$$\mathbf{W}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,0,0,0,0,\mu)^{\mathsf{T}},$$

auf S. 103 die Beurteilungskurve der Sofortentnahme

$$\mathbf{W}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0,0,0,0,0)^{\mathsf{T}}$$

und auf S. 106 die Beurteilungskurve der Annuitätenmethode

$$\mathbf{W}(\mu) = \tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot(0,1,1,1,1,1)^{\mathsf{T}}.$$

Eindeutige Festlegung der realen Replizierung durch eine hinreichende Bedingung

Wie beim Konzept der Duplizierung wird auch hier bei der Replizierung gefordert, dass der zu verwendende Supplementtyp noch eindeutig entweder als reale Investition oder als reale Finanzierung festzulegen ist (Verbot der gleichzeitigen Durchführung einer Ergänzungsinvestition und einer Ergänzungsfinanzierung nach Kruschwitz (1998), S. 57). Es werden also bei der Replizierung nicht alle beliebigen Supplemente **S'** des hier für Robinson vorliegenden Kapitalmarkts

$$C := \text{cone}\ \{\mathbf{I}(1), \mathbf{F}(1)\} := \{\alpha\mathbf{I}(1) + \kappa\mathbf{F}(1) : \alpha, \kappa \geq 0\}$$

zugelassen, sondern nur die Supplemente $\mathbf{S}' \in C$ mit $\kappa = 0$ oder $\alpha = 0$, die also auf der geknickten Transformationsgeraden $\check{T}$ liegen:

(SB) $\quad \mathbf{S}' \in \check{T} = \text{ray}\ \{\mathbf{I}(1)\} \cup \text{ray}\ \{\mathbf{F}(1)\}.$

Die Existenz und Einzigkeit der (realen) Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})),$$

mit Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$, festem Bezugspunkt $\mathbf{U}$, der homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$, einem speziellen indifferenten Kapitalmarktanteil $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in \check{T}$ (Beachtung der Supplementbedingung (SB)) und dem Beurteilungsvektor $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J)$ ist nun gleichbedeutend zur Existenz und Einzigkeit der (realen) Replizierung des Differenzvektors

$$\xi := \mathbf{B} + \mathbf{X} - \mathbf{U}$$

mit Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$, Bezugspunkt $\mathbf{U}^* = \mathbf{O}$, derselben homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$, einem speziellen indifferenten Kapitalmarktanteil $\mathbf{S}^*(\xi) \in \check{T}$ und dem Beurteilungsvektor $\mathbf{V}(\nu^*(\xi))$:

$$\xi + \mathbf{S}^*(\xi) = \mathbf{V}(\nu^*(\xi))$$

mit

$$\mathbf{S}^*(\xi) = \mathbf{S}'(\mathbf{X}),\ \mathbf{V}(\nu^*(\xi)) = \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})).$$

Somit wird eine elementweise eindeutige additive Zerlegung der Ebene $\mathbb{R}^2$ mittels der Minkowski-Summe

$$\mathbb{R}^2 = -\check{T} + \mathbf{V}(J) \text{ bzw. } \mathbb{R}^2 = \check{T} - \mathbf{V}(J)$$

gefordert. Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 2.2.1 über die Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$, die Marktzinsfaktoren q_H und q_S und die damit gebildeten Abstandsfunktionen $\alpha_{H,S}(\mu) = \mathbf{P}_{H,S}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}(\mu)$ könnte nun analog die eindeutige reale Replizierung eines jeden Zahlungsstroms $\xi \in \mathbb{R}^2$ bewiesen werden. Es kann jedoch auch eine andere Begründung durch die Rückführung der Replizierung auf eine entsprechende Duplizierung erfolgen. Dazu beachtet man, dass die Replizierung von ξ mittels Bezugspunkt $\mathbf{O}$ und homogener Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ identisch ist mit der Duplizierung von $\xi' := -\xi$ mit Ausgangspunkt $\mathbf{O}$ und der modifizierten homogenen Beurteilungskurve

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mu) := -\mathbf{V}(f(\mu)),$$

wobei $f: J \longrightarrow J$ eine streng monoton fallende, surjektive und stetige Parametertransformation des Intervalls mit $f(0) = 0$ ist. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \xi' &= \mathbf{S}^*(\xi) - \mathbf{V}(\nu^*(\xi)) \\ &= \tilde{\mathbf{S}}(\xi') + \tilde{\mathbf{V}}(f^{-1}(\nu^*(\xi))) \\ &= \tilde{\mathbf{S}}(\xi') + \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\mu}(\xi')) \end{aligned}$$

mit $\tilde{\mathbf{S}}(\xi') = \mathbf{S}^*(\xi) = \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in \check{T}$. Außerdem erfüllen die modifizierte Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu)$ und die damit gebildeten Abstandsfunktionen

$$\tilde{\alpha}_{\mathrm{H,S}}(\mu) = \mathbf{P}_{H,S}{}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = -\mathbf{P}_{H,S}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}(f(\mu))$$

alle in Abschnitt 2.2.1 geforderten Voraussetzungen, welche die eindeutige reale Duplizierung von $\xi' \in \mathbb{R}^2$ unter Beachtung der Supplementbedingung (SB) gewährleisten. Damit ist die Existenz und Einzigkeit der Replizierung eines jeden Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ unter Beachtung der Supplementbedingung bewiesen. Im Spezialfall einer linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$, ist mit der Transformation $f(\mu) = -\mu$ die modifizierte Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu)$ gleich der vorgegebenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$.

Anmerkung zur Parametertransformation
Beispielsweise kann man bei $a = -\infty$, $b = +\infty$, also $J = \mathbb{R}$, die Transformation

$$f(\mu) = -\mu$$

wählen, bei $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $b = +\infty$ und $J =]a,+\infty[$ die Transformation

$$f(\mu) = a\mu/(\mu - a),$$

bei $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ und $J =]-\infty,b[$

$$f(\mu) = b\mu/(\mu - b)$$

und bei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$, $J =]a,b[$

$$f(\mu) = \begin{cases} b\mu / a & \text{für } a < \mu < 0, \\ a\mu / b & \text{für } 0 \le \mu < b. \end{cases}$$

Definition der Präferenzordnung

Für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine einzige reale Replizierung unter Beachtung der Supplementbedingung (SB) mit einem realen Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in \check{T}$ und dem Beurteilungsvektor

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J).$$

Mittels der zweidimensionalen Bewertungsfunktion (Präferenzfunktion)

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \quad \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) \in \mathbf{W}(J) \subset \mathbb{R}^2$$

kann man aus der Totalordnung $\geq$ auf $\mathbf{W}(J)$ eine neue Präferenzordnung (eine totale, reflexive und transitive Relation) $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ auf $\mathbb{R}^2$ erzeugen:

$$\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y} \qquad (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so günstig wie } \mathbf{Y})$$
$$:\Leftrightarrow \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) \geq \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}).$$

Der Index R steht für das Konzept der Replizierung und der Index W für die verwendete Beurteilungskurve. Auf einen Index B für den Basiszahlungsstrom **B** des Entscheiders wird hier verzichtet. Wie bei der D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ könnten auch hier bei der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ noch die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion, die Indifferenzkurven, die Monotonie bei Vorliegen von positiven Marktzinsfaktoren q_H und q_S, der Spezialfall mit einheitlichem Marktzinsfaktor $q_H = q_S = q$ für Investitionen und Finanzierungen, die Bessermengen und die Abhängigkeit der Präferenzordnung von den Marktzinsfaktorpaaren (q_H,q_S) und von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ beschrieben werden. Außerdem könnte man die R-Präferenzordnung mit der D-Präferenzordnung vergleichen. Hinsichtlich dieser Themen wird wieder auf das Kapitel 5 mit der Behandlung einer beliebigen Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ verwiesen. Zum Spezialfall $q_H = q_S = q$ sei hier angemerkt, dass bei Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts alle D- und R-Präferenzordnungen mit der Barwert-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ übereinstimmen.

Beispiel 2.3 – Fortsetzung 2: Vergleich der Konsumpläne mittels der Replizierung

Robinson verwendet nun für die Glattstellung der Konsumpläne

$$\mathbf{X} = (60,32)^{\mathsf{T}} \text{ und } \mathbf{Y} = (40,54)^{\mathsf{T}}$$

den Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$, den fest fixierten Bezugspunkt

$$\mathbf{U} = (45,40)^{\mathsf{T}}$$

und die spezielle Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\mu)^{\mathsf{T}}.$$

Die damit durchgeführte Replizierung von **X**,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})),\ \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in \check{T},$$

ist gleichbedeutend zur Replizierung

$$\boldsymbol{\xi} + \mathbf{S}' = \mathbf{V}(\nu)$$

des Differenzvektors $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{X} - \mathbf{U} = (15,-8)^{\mathsf{T}}$ mit Bezugspunkt $\mathbf{O}$ und homogener Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$. Der Ansatz mit einer Supplementinvestition $\mathbf{S}' = \lambda_H \mathbf{T}_H = \lambda_H(-1;0{,}9)^{\mathsf{T}}$ vom Kartoffelmarkt ergibt das Gleichungssystem in der Vektorschreibweise

$$\lambda_H \mathbf{T}_H - \mathbf{V}(\nu_H) \quad = \boldsymbol{\xi}' = -\boldsymbol{\xi}$$

bzw. komponentenweise geschrieben

$$\begin{aligned} -\lambda_H \qquad\qquad &= -15, \\ 0{,}9\cdot\lambda_H \quad - \nu_H &= 8. \end{aligned}$$

Die Lösung $(\lambda_H,\nu_H)^{\mathsf{T}} = (15;\,5{,}5)^{\mathsf{T}}$ liefert die reale Supplementinvestition

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \lambda_H \mathbf{T}_H = \mathbf{I}(\lambda_H) = (-15;13{,}5)^{\mathsf{T}}$$

und den Beurteilungsvektor

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{V}(\nu_H) = (0;5{,}5)^{\mathsf{T}}.$$

Der entsprechende Ansatz mit einer Supplementfinanzierung $\mathbf{S}' = \lambda_S \mathbf{T}_S = \lambda_S(-1;1{,}5)^{\mathsf{T}}$ liefert für die Parameter λ_S und μ_S die Lösung $(\lambda_S,\mu_S)^{\mathsf{T}} = (15;-14{,}5)^{\mathsf{T}}$ und als zugehöriges Supplement $\mathbf{S}' = (-15;22{,}5)^{\mathsf{T}}$ keine reale Finanzierung. Dies zeigt, dass hier das reale Supplement eindeutig als Investition bestimmt ist.
Die Glattstellung des Zahlungsstroms **X** auf die durch den Bezugspunkt **U** gegebene Nulllinie erfolgt also durch Hinzunahme der realen Supplementinvestition $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = (-15;13{,}5)^{\mathsf{T}}$ und liefert als Abweichung von der Nulllinie **U** den realen Margenzahlungsstrom $\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = (0;5{,}5)^{\mathsf{T}}$.

Analog erhält man für $\mathbf{Y} = (40,54)^{\mathsf{T}}$ die Replizierung

$$\mathbf{Y} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\nu(\mathbf{Y}))$$

bzw.

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) - \mathbf{V}(\nu(\mathbf{Y})) = \boldsymbol{\eta}' = \mathbf{U} - \mathbf{Y} = (5;-14)^{\mathsf{T}}$$

mit der realen Supplementfinanzierung

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \lambda_S \mathbf{T}_S = \mathbf{F}(-\lambda_S) = (5;-7{,}5)^{\mathsf{T}}$$

und dem Beurteilungsvektor

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(\nu(\mathbf{Y})) = (0;6{,}5)^{\mathsf{T}}.$$

Eine grafische Darstellung der Replizierung der Zahlungsströme **X** und **Y** wird in Abbildung 2.14 gegeben.

Speziell für den Zahlungsstrom **U** erhält man, da $\mathbf{S}' = \mathbf{O}$ ein reales Supplement und $\mathbf{V}(0) = \mathbf{O}$ ist, auf Grund der Einzigkeit der realen Replizierung das zugehörige Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{U}) = \mathbf{O}$ und den zugehörigen Beurteilungsvektor

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{U}) = \mathbf{O}.$$

Für die beiden Konsumpläne **X** und **Y** gilt daher

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) \;\dot{>}\; \mathbf{O} = \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{U}) \quad \text{und}$$

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) \;\dot{>}\; \mathbf{O} = \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{U})\,.$$

Sie sind also besser als die durch **U** gegebene Nulllinie und können jeweils als gut bezeichnet werden. Für den Vergleich der Beurteilungsvektoren von **X** und **Y** ergibt sich die Ungleichung

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = (0;5{,}5)^{\mathsf{T}} \;\dot{<}\; (0;6{,}5)^{\mathsf{T}} = \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})\,,$$

sodass nach der oben definierten Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ der Konsumplan **Y** besser als der Konsumplan **X** ist:

$$\mathbf{Y} \vartriangleright_{\mathrm{R}W} \mathbf{X}.$$

Man erhält somit für die speziellen Zahlungsströme **X** und **Y** hier mit der Replizierung ein anderes Vergleichsergebnis als oben mit der Duplizierung. Der allgemeine Vergleich der beiden Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D},W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R},W}$ wird in Abschnitt 5.4.3 unter Verwendung der Bessermengen behandelt. △

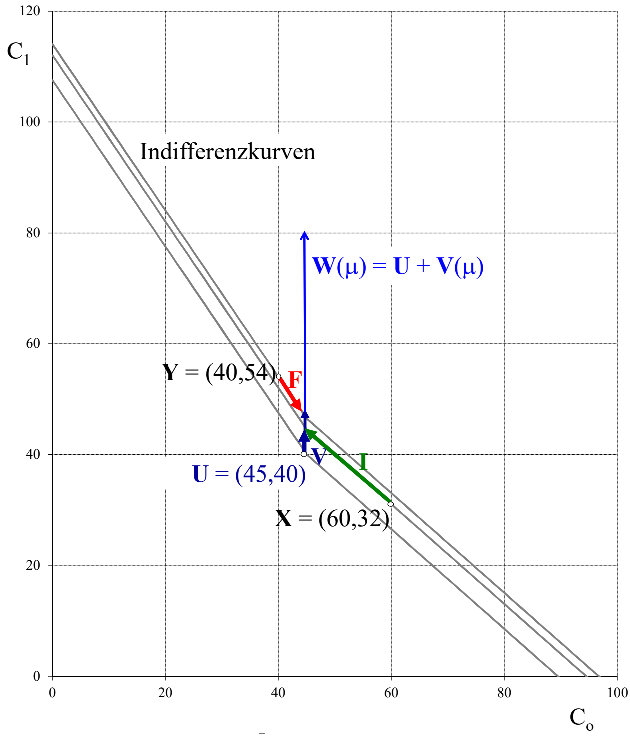


Abb. 2.14 Der Vergleich der Konsumpläne **X** und **Y** mittels Replizierung mit der Indifferenzkurve Ind(**U**), Supplementen des Kapitalmarkts und der Beurteilungskurve $\hat{\mathbf{V}}(\mu)$

3 Bewertungskonzepte in der Literatur

In diesem Kapitel werden Literaturstellen aus der Zeit von 1932 bis 1999 beschrieben, in denen die Konzepte der Duplizierung und Replizierung eines sicheren Zahlungsstroms für dessen Bewertung oder dessen Vergleich mit anderen Zahlungsströmen verwendet werden. Die Konzepte treten dort jeweils mit speziellen Beurteilungskurven auf. Statt der in dieser Literatur in der Komponentenschreibweise oder Tabellenkalkulation verwendeten unterschiedlichen Bezeichnungen werden für eine bessere Vergleichbarkeit der Literaturstellen hier nun einheitliche Bezeichnungen in der Vektorschreibweise genommen. Der nachfolgend in Abschnitt 3.3 dargestellte Ansatz der Replizierung von Kruschwitz (1998) wird dann in Kapitel 5 für eine ziemlich allgemein definierte Klasse von Beurteilungskurven verallgemeinert.

3.1 Duplizierung bei Fisher mit der Annuitätenentnahme

Irving Fisher[1] (1932), S. 109ff, vergleicht die drei in seinem Buch auf Seite 112 angegebenen unendlichen Zahlungsströme $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2, \ldots)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$:
A $= (0; 450; 450; 450; \ldots)^\mathsf{T}$,
B $= (0; 0; 0; 300; 400; 500; 500; 500; \ldots)^\mathsf{T}$,
C $= (0; 2000; 1800; 1600; 1400; 1200; 1000; 800; 600; 400; 200; 0; 0; 0; \ldots)^\mathsf{T}$,
die jeweils aus dem alternativ auf einem Stück Land betriebenen Ackerbau, Waldbau bzw. Bergbau resultieren. Die Zahlungen der Zahlungsströme sollen jeweils am Ende jedes Jahres erfolgen und zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, \ldots$. Fisher setzt voraus, dass innerhalb einer Gemeinschaft jeder bis zu jedem gewünschten Betrag zu einem einheitlichen Marktzinssatz $i_S = i_H = i$, beispielsweise $i = 5\%$, Geld leihen oder verleihen kann.

Vergleich mittels Barwert
Als Erstes berechnet er für jeden Zahlungsstrom **X** = **A**, **B**, **C** mit dem jährlichen Abzinsfaktor v seinen zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörigen Zeitwert (Gegenwartswert, Barwert)

$$B(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j v^j \qquad (q = 1 + i = 1{,}05;\ v = 1/q = 0{,}95238)$$

und erhält

$$B(\mathbf{A}) = 9.000{,}00;$$
$$B(\mathbf{B}) = 8.814{,}26;$$
$$B(\mathbf{C}) = 9.113{,}06.$$

Mit dem Barwert als Maßzahl der Bewertung schließt er, dass **C** vorteilhafter als **A** und **A** vorteilhafter als **B** ist:

$$\mathbf{C} \rhd \mathbf{A} \rhd \mathbf{B}.$$

[1] Irving Fisher (1867–1947) war ein US-amerikanischer Ökonom. Er arbeitete auf dem Gebiet der mathematischen Volkswirtschaftslehre und war Professor an der Yale University.

Hierbei gibt aber Fisher nicht explizit an, dass auch der Barwert $B(\mathbf{X})$ als spezieller Zahlungsstrom $\mathbf{X}' = (B(\mathbf{X}),0,0,0,\ldots)^{\mathsf{T}}$ aus dem Zahlungsstrom **X** mittels eines Ergänzungsgeschäfts (Supplements) $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ des Kapitalmarkts erzielt werden kann. Mit Hilfe der Finanzierung

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (B(\mathbf{X}) - X_0,-X_1,-X_2,\ldots)^{\mathsf{T}}$$

mit dem Sollzinssatz $i_S = i$ und dem Barwert $B(\mathbf{F}) = 0$ könnte man nämlich durch Kombination aus dem Zahlungsstrom **X** den transformierten Zahlungsstrom

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) = (B(\mathbf{X}),0,0,0,\ldots)^{\mathsf{T}},$$

erzeugen, der zum Vergleich mit anderen Zahlungsströmen verwendet werden kann. Diese Bewertung mit dem Barwert entspricht der Replizierung (Glattstellung)

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(v(\mathbf{X}))$$

von **X**, wenn das Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ und die spezielle Beurteilungskurve $\mathbf{V}(v) = \bar{\mathbf{V}}(v) = (v,0,0,\ldots)^{\mathsf{T}}$ zur Zielsetzung der Sofortentnahme genommen wird.

Vergleich mittels Duplizierung

Als Zweites gibt Fisher einen Vergleich zwischen jeweils zwei Zahlungsströmen **X** und **Y**, indem er vom Zahlungsstrom **X** ausgeht und durch Hinzunahme eines Supplements $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ vom Kapitalmarkt den Zahlungsstrom **X** in einen Zahlungsstrom

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X})$$

transformiert, der sich vom Zahlungsstrom **Y** nur durch einen direkt beurteilbaren (d. h. mit **O** vergleichbaren) Margenzahlungsstrom $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ unterscheidet und somit direkt mit **Y** vergleichbar ist:

$$\mathbf{Y} - \mathbf{X}' = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{O} \text{ oder } \leq \mathbf{O} \quad (\mathbf{O} = (0,0,0,\ldots.)^{\mathsf{T}}).$$

Er dupliziert also **Y** durch die Kombination von **X**, dem Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = (S_0,S_1,S_2,\ldots)^{\mathsf{T}}$ vom Kapitalmarkt (mit Barwert $B(\mathbf{S}(\mathbf{X})) = 0$) und einem Margenzahlungsstrom $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$:

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{Y}.$$

Bei der Duplizierung des oben angegebenen Zahlungsstroms **A**,

$$\mathbf{C} + \mathbf{S}(\mathbf{C}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{C})) = \mathbf{A},$$

erhält Fisher auf S. 115, Tabelle 3, unter Verwendung des Bezugszahlungsstroms **C** und der speziellen Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{A}$$

der Annuitätenmethode den transformierten Zahlungsstrom

$$\mathbf{C}' := \mathbf{C} + \mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{A} - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{C})) = (1 - \mu(\mathbf{C}))\mathbf{A} = \mu'\mathbf{A},$$

und die Supplementinvestition

$$\mathbf{S} := \mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}' - \mathbf{C} = \mu'\mathbf{A} - \mathbf{C}$$

mit

$$S_j = \mu' A_j - C_j \qquad \text{für } j = 0,1,\ldots,10,$$
$$S_j = \mu' A_j = \mu' A_{11} \qquad \text{für } j \geq 11.$$

Die Zahlungsströme **C**' und **S** sind hier zunächst in Abhängigkeit vom Parameter $\mu' = 1 - \mu(\mathbf{C})$ angegeben. Die für das Supplement **S** gültige Barwertgleichung

$$0 = B(\mathbf{S}) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j v^j$$

$$= \sum_{j=0}^{10}(\mu' A_j - C_j)v^j + \frac{\mu' A_{11}}{i}v^{10} \qquad (\sum_{k=0}^{\infty} v^k = 1/(1-v) = 1/(vi))$$

liefert jedoch für den Parameter μ‘ eine lineare Gleichung und nach Auflösung den eindeutigen Wert

$$\mu' = \left(\sum_{j=0}^{10} C_j v^j\right) \Big/ \left(\sum_{j=0}^{10} A_j v^j + \frac{A_{11}}{i}v^{10}\right) = 1{,}0126.$$

Damit erhält er den transformierten Zahlungsstrom

$$\mathbf{C}' = \mu'\mathbf{A} = (0;\ 455{,}65;\ 455{,}65;\ 455{,}65;\ \ldots)^{\mathsf{T}}$$

und den Margenzahlungsstrom

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mu(\mathbf{C})) &= \mathbf{A} - \mathbf{C}' = (1 - \mu')\mathbf{A} = -\,0{,}0126\cdot\mathbf{A} \\ &= -\,(0;\ 5{,}65;\ 5{,}65;\ 5{,}65;\ldots)^{\mathsf{T}} \lessdot \mathbf{O},\end{aligned}$$

der den Vergleich der Zahlungsströme **C**‘ und **A** beschreibt. Der transformierte Zahlungsstrom **C**’ ist also größer ($\gtrdot$) als der Zahlungsstrom **A**. Somit wird **C**‘ und auch **C** als vorteilhafter als der Zahlungsstrom **A** angesehen. Das bei der Duplizierung verwendete Supplement

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}' - \mathbf{C}$$

vom Kapitalmarkt ist eine Anlage in eine ewige Rente mit Auszahlungen zu den Zeitpunkten $j = 1,\ldots,8$ und Einzahlungen zu den Zeitpunkten $j \geq 9$.

Für die Duplizierung von **B**,

$$\mathbf{C} + \mathbf{S}(\mathbf{C}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{C})) = \mathbf{B},$$

bei Verwendung des Ausgangszahlungsstroms **C** und der jetzt anders gewählten speziellen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{B}$ erhält Fisher auf S. 116, Tabelle 4, den transformierten Zahlungsstrom

$$\mathbf{C}'' := \mathbf{C} + \mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{B} - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{C})) = (1 - \mu(\mathbf{C}))\mathbf{B} = \mu''\mathbf{B},$$

und die Supplementinvestition

$$\mathbf{S} := \mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}'' - \mathbf{C} = \mu''\mathbf{B} - \mathbf{C}$$

mit

$$\begin{aligned} S_j &= \mu'' B_j - C_j && \text{für } j = 0,1,\ldots,10, \\ S_j &= \mu'' B_j = \mu'' B_{11} && \text{für } j \geq 11 \end{aligned}$$

und der Barwertgleichung

$$0 = B(\mathbf{S}) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j v^j = \sum_{j=0}^{10}(\mu'' B_j - C_j)v^j + \frac{\mu'' B_{11}}{i}v^{10}.$$

Durch Auflösung dieser linearen Gleichung erhält man den Parameter μ“ = 1,0338. Damit ergibt sich für den Vergleich des transformierten Zahlungsstroms **C**“ mit dem Zahlungsstrom **B** der Margenzahlungsstrom

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mu(\mathbf{C})) &= \mathbf{B} - \mathbf{C}'' = (1 - \mu'')\mathbf{B} = -\,0{,}338\cdot\mathbf{B} \\ &= -\,(0;\ 0;\ 0;\ 10{,}31;\ 13{,}51;\ 16{,}89;\ 16{,}89;\ 16{,}89;\ \ldots)^{\mathsf{T}} \\ &\lessdot \mathbf{O}.\end{aligned}$$

Der transformierte Zahlungsstrom **C**“ und auch der Zahlungsstrom **C** werden also als vorteilhafter als der Zahlungsstrom **B** angesehen.

Anzumerken ist, dass bei den von Fisher angegebenen Duplizierungen für die verschiedenen Zahlungsströme jeweils verschiedene Beurteilungskurven $\mathbf{V}(\mu)$ verwendet werden. In seinen Rechenbeispielen zeigt er, dass bei einheitlichem Marktzinssatz $i_H = i_S = i$ (> 0) für Investitionen und Finanzierungen das mit dem Barwertvergleich erhaltene Vergleichsergebnis sich auch im Vorzeichen des bei der Duplizierung erhaltenen Margenzahlungsstroms widerspiegelt. Der Vergleich der Zahlungsströme kann somit unter diesen Bedingungen auch mit dem Konzept der Duplizierung bei Verwendung spezieller Supplemente und spezieller Beurteilungskurven durchgeführt werden. Es kommen dabei homogen lineare Beurteilungskurven zur Anwendung. Auf S. 119 zeigt Fisher noch, dass das Vergleichsergebnis für die drei Zahlungsströme **A**, **B** und **C** vom verwendeten Marktzinssatz i abhängt. Diese Ergebnisse stehen im Einklang mit dem in Kapitel 5 bewiesenen Satz über die Vielfalt der Präferenzordnungen, wonach speziell auf einem vollkommenen Kapitalmarkt bei beliebiger Supplementwahl vom Kapitalmarkt alle möglichen Beurteilungskurven die gleiche Präferenzordnung liefern, nämlich die B-Präferenzordnung mit ihrer Beurteilung mittels des Barwerts des Zahlungsstroms.

3.2 Replizierung bei Heister mit der Sofortentnahme und der Endentnahme

In den von Matthias Heister[2] (1962), S. 36–60, angegebenen Beispielen werden endliche Zahlungsströme

$$\mathbf{X} = (X_0,\ldots,X_n)^\top,$$
$$\mathbf{Y} = (Y_0,\ldots,Y_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$$

mit Laufzeiten von $n = 2$ bis zu $n = 10$ betrachtet. Die durchgeführten **Vergleiche** lassen sich mit dem Konzept der Replizierung beschreiben, wobei das zur Glattstellung verwendete Supplement sich auch aus mehreren Kapitalmarktgeschäften zusammensetzen kann und jeweils eine ganz spezielle Glattstellungskurve $\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v)$ verwendet wird:

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})),$$
$$\mathbf{Y} + \mathbf{S}(\mathbf{Y}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})).$$

Die Bezeichnung Supplement kommt vom lateinischen supplementum für Ergänzung und wird von Heister (1962), S. 37, für das Ergänzungsgeschäft verwendet. Als homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(v)$ tritt in den Beispielen auf den Seiten 38, 40, 43 die zur Sofortentnahme gehörige Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(v) = \bar{\mathbf{V}}(v) = (v,0,\ldots,0)^\top$$

auf und in den restlichen Beispielen auf den Seiten 36–37, 39, 41, 42, 44, 46, 47, 49, 51, 57–58, 59–60 die zur Endentnahme gehörige Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(v) = \hat{\mathbf{V}}(v) = (0,\ldots,0,v)^\top.$$

Die beiden Glattstellungspunkte $\mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$ und $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y}))$ haben stets die Struktur

[2] Matthias W. M. Heister (1925–) war Lehrbeauftragter für Wirtschaftsmathematik an der Universität Köln.

$$(W_0,0,\ldots,0,W_n)^\mathsf{T}$$

und stimmen noch entweder in der ersten oder in der letzten Komponente überein. Bei den verwendeten homogenen Beurteilungskurven $\hat{\mathbf{V}}(\mu)$ und $\bar{\mathbf{V}}(\mu)$ kann daher der Bezugspunkt

$$\mathbf{U} = (U_0,0,\ldots,0,U_n)^\mathsf{T}$$

wahlweise als einer der beiden Glattstellungspunkte $\mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$ und $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y}))$ gewählt werden. Wählt man beispielsweise

$$\mathbf{U} = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \text{ und } \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{O},$$

so ist

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = (U_0,0,\ldots,0,U_n+v(\mathbf{Y}))^\mathsf{T} \quad \text{im Falle } \mathbf{V}(v) = \hat{\mathbf{V}}(v) \text{ bzw.}$$
$$\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = (U_0+v(\mathbf{Y}),0,\ldots,0,U_n)^\mathsf{T} \quad \text{im Falle } \mathbf{V}(v) = \bar{\mathbf{V}}(v).$$

Im Beispiel auf den Seiten 59–60 wird für die beiden Zahlungsströme **X** und **Y** eine klassische Glattstellung auf die zur Endentnahme gehörigen Glattstellungskurve $\mathbf{W}(v) = \hat{\mathbf{V}}(v)$ mit Bezugspunkt $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ durchgeführt.

Für den Vergleich von zwei Zahlungsströmen soll hier das Beispiel auf Seite 41 dargestellt werden. Für den Vergleich der Zahlungsströme

$$\mathbf{X} = (0,-6.000,0,+8.000,0)^\mathsf{T},$$
$$\mathbf{Y} = (-5.000,0,0,0,+8.800)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^5$$

wählt Heister die Supplemente (Ergänzungsgeschäfte)

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = (-5.670;+6.000;0;0;0) + (0;0;0;-8.000;+8.800)^\mathsf{T}$$
$$= (-5.670;+6.000;0;-8.000;+8.800)^\mathsf{T},$$
$$\mathbf{S}(\mathbf{Y}) = (-670;0;0;0;+844)^\mathsf{T}$$

und erhält die transformierten Zahlungsströme

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = (-5.670;0;0;0;+8.800)^\mathsf{T},$$
$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} + \mathbf{S}(\mathbf{Y}) = (-5.670;0;0;0;+8.444)^\mathsf{T}$$

auf der Glattstellungskurve $\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{V}}(v)$. Mit der Wahl $\mathbf{U} = \mathbf{X}'$ ist

$$\mathbf{X}' = \mathbf{W}(0) \underset{\cdot}{>} \mathbf{W}(-356) = \mathbf{Y}',$$

so dass der Zahlungsstrom **X** vorteilhafter als der Zahlungsstrom **Y** angesehen wird.

In den Beispielen auf den Seiten 36–37, 38, 39, 40, 42, 51 kann die durchgeführte Replizierung auch als Duplizierung interpretiert werden, da einer der Zahlungsströme gleich seinem Glattstellungspunkt ist. Im Beispiel auf den Seiten 36–37 ist $\mathbf{S}(\mathbf{Y}) = \mathbf{O}$ und $\mathbf{Y} = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}))$, so dass mit der Wahl von $\mathbf{U} = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{Y}$ die Replizierung von **X**,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{Y} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})),$$

auch als Duplizierung

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) - \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{Y}$$

von **Y** mit Ausgangspunkt **X** angesehen werden kann. Wie in Kapitel 2 schon allgemeiner behandelt wurde, ist nämlich insbesondere für die bei Heister verwendeten Beurteilungskurven $\hat{\mathbf{V}}(v)$ und $\bar{\mathbf{V}}(v)$ die modifizierte Kurve $\mathbf{V}'(v) = -\mathbf{V}(-v)$ auch wieder eine streng monoton wachsende Beurteilungskurve.

Neben den Vergleichen von zwei Zahlungsströmen führt Heister in den Beispielen auf den Seiten 52, 53, 54, 55, 56–57 mit dem Konzept der Replizierung (jeweils mit $\mathbf{V}(v) = \hat{\mathbf{V}}(v)$) auch die **Beurteilung** von Zahlungsströmen, nämlich deren Vergleich mit dem speziellen Bezugspunkt $\mathbf{U} = \mathbf{O} = (0,0,\dots,0)^{\mathsf{T}}$, durch. Bei der Glattstellung des Zahlungsstroms **X** auf den Glattstellungspunkt

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{X})) = \hat{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X})) = (0,\dots,0,v(\mathbf{X}))^{\mathsf{T}}$$

wird in den Beispielen auf den Seiten 52, 55 kein Eigenkapital verwendet. In den Beispielen auf den Seiten 53, 54, 56–57 dagegen ist noch der **Einsatz von Eigenkapital** nötig, da der aus **X** zunächst ohne Eigenkapital erhaltene transformierte Zahlungsstrom zum Zeitpunkt $j = 0$ noch eine negative Komponente aufweist. Die Verwendung von Eigenkapital kann nun auf zwei Arten in die Rechnung einbezogen werden. Einmal kann das Eigenkapital K_0 als positive Basiszahlung $B_0 = K_0$ zum Zeitpunkt $j = 0$ verrechnet werden, ohne dass eine entsprechende Auszahlung von Eigenkapital zu einem späteren Zeitpunkt erfolgt. Das andere Mal kann das Eigenkapital, das sonst zu dem Habenzinssatz i_H angelegt ist, für eine Supplementfinanzierung

$$\mathbf{F} = (K_0,0,\dots,0,-K_0q_H{}^n)^{\mathsf{T}} \qquad (q_H = 1 + i_H)$$

verwendet werden, bei der zum Endzeitpunkt $j = n$ das aufgezinste Eigenkapital wieder ausgezahlt wird. Bei einem Eigenkapital aus der Kassenhaltung ist der Zinssatz $i_H = 0$.

Im Beispiel auf Seite 53 errechnet sich für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (-150.000;0;0;0;0;+220000)^{\mathsf{T}}$$

mit dem Supplement

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = (+100.000;0;0;0;0;-140.250)^{\mathsf{T}}$$

der transformierte Zahlungsstrom

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = (-50.000;0;0;0;0;+79.750)^{\mathsf{T}}.$$

Dieser kann nicht unmittelbar mit dem Nullzahlungsstrom **O** verglichen werden. Wird nun ein Eigenkapital $K_0 = 50.000$ als Basiszahlungsstrom

$$\mathbf{B} = (K_0,0,\dots,0)^{\mathsf{T}}$$

mit einbezogen, so erhält man den mit $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ vergleichbaren Margenzahlungsstrom

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = (0;0;0;0;0;+79.750)^{\mathsf{T}} = \hat{\mathbf{V}}(79.750)$$

mit der Endentnahme von 79.750 als Beurteilungsgröße für **X**.
Andernfalls kann das Eigenkapital $K_0 = 50.000$ aus der Kassenhaltung ($i_H = 0\%$) als Supplementfinanzierung

$$\mathbf{F} = (+50.000;0;0;0;0;-50.000)^{\mathsf{T}}$$

mit eingesetzt werden, d. h. es wird zum Zeitpunkt $j = 0$ der Betrag K_0 aus der Kasse entnommen und zum Zeitpunkt $j = n$ derselbe Betrag wieder in der Kasse abgelegt. In diesem Fall erhält man den mit **O** vergleichbaren Margenzahlungsstrom

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{F} = (0;0;0;0;0;+29.750)^{\mathsf{T}} = \hat{\mathbf{V}}(29.750)$$

mit der Endentnahme von 29.750 als Beurteilungsgröße für **X**.

3.3 Replizierung bei Kruschwitz mit dem Vermögensstreben und dem Einkommensstreben

Die erste Auflage des Buches ‚Investitionsrechnung' von Lutz Kruschwitz[3] erschien schon im Jahr 1978, die bisher neueste Auflage, nämlich die 15. Auflage, im Jahr 2019. Die im Folgenden angegebenen Seitenzahlen beziehen sich auf die 7. Auflage von 1998. Für die Beurteilung und den Vergleich von Zahlungsströmen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ verwendet Kruschwitz das Konzept der Glattstellung (Replizierung) mit zwei speziellen Glattstellungskurven (Beurteilungskurven). Bei der zeitlichen Strukturierung des damit erzielten Einkommenszahlungsstroms (Margenzahlungsstroms) $\mathbf{W}(v)$ des Beurteilers zieht er nur zwei spezielle Zielsetzungen in Betracht, nämlich das sogenannte Vermögensstreben und das sogenannte Einkommensstreben.

Beim **Vermögensstreben** mit dem Ziel der Maximierung des Vermögensendwerts v zum Zeitpunkt $t = n$ verwendet er den Zahlungsstrom

$$\mathbf{U} = (U_0,\ldots,U_{n-1},U_n)^\mathsf{T}$$

als die Mindestmarge, die bei der Glattstellung zu den verschiedenen Zeitpunkten erzielt werden soll. Er gibt diesen noch speziell als ein festes Vielfaches eines Einkommenszeitstrukturvektors vor ($U_j = y \cdot A_j$). Die konstanten Mindestmargen U_j werden als laufende Einnahmen und die variable Marge $\hat{V}_n(v) = v$ des Endzeitpunkts $t = n$ als das darüber hinaus erzielbare Endvermögen angesehen. Es wird also die homogene lineare Beurteilungskurve

$$\hat{\mathbf{V}}(v) = (0,\ldots,0,v)^\mathsf{T} = v \cdot \hat{\mathbf{A}}, \qquad \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_{n+1} = (0,\ldots,0,1)^\mathsf{T},$$

und die inhomogene lineare Beurteilungskurve (Glattstellungskurve)

$$\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{V}}(v) = (U_0,\ldots,U_{n-1},U_n + v)^\mathsf{T}$$

genommen.

Beim **Einkommensstreben** mit dem Ziel der Maximierung des Entnahmeniveaus v wird bei der vorgegebenen Mindestmarge

$$\mathbf{U} = (0,\ldots,0,U_n)^\mathsf{T}$$

die Mindestmarge U_n des Zeitpunkts $t = n$ als das gewünschte Endvermögen bezeichnet, das neben den laufenden Einnahmen $\tilde{V}_j(v) = vA_j$ noch erzielt werden soll. Es wird also die homogene lineare Beurteilungskurve

$$\tilde{\mathbf{V}}(v) = v \cdot \mathbf{A}$$

mit der Einkommenszeitstruktur $\mathbf{A} = (A_0,\ldots,A_n)^\mathsf{T} \gtrdot \mathbf{O}$ und die inhomogene lineare Glattstellungskurve

$$\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{V}}(v) = (vA_0,\ldots,vA_{n-1},vA_n + U_n)^\mathsf{T}$$

[3] Lutz Kruschwitz (1943–) ist ein deutscher emeritierter Professor für Bank- und Finanzwirtschaft mit vormaligen Lehrtätigkeiten an der Technischen Universität Berlin, der Universität Lüneburg und der Freien Universität Berlin.

verwendet.

Des Weiteren wird in beiden Fällen ein **Basiszahlungsstrom B** = $(B_0,\ldots,B_n)^\mathsf{T}$ berücksichtigt, der dem Entscheider auf jeden Fall zur Verfügung steht und unabhängig von den zu beurteilenden Zahlungsströmen **X** und **Y** ist. Für die Replizierung des Zahlungsstroms **B** + **X** auf den Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(v)$ verwendet Kruschwitz (1998), S. 48–49, spezielle (reale oder fiktive) einperiodische **Ergänzungsgeschäfte**. Dies sind einmal die einperiodischen Investitionen

$$\mathbf{I}^j(\alpha) = \alpha\cdot(0,\ldots,-1,+q_{jH},0,\ldots,0)^\mathsf{T} = \alpha\cdot\mathbf{T}^j{}_H$$

des Zeitintervalls $[j\text{-}1,j]$, bei denen zum Zeitpunkt $t = j\text{-}1$ der Betrag $\alpha \geq 0$ zum Habenzinssatz i_{jH} bzw. Habenzinsfaktor $q_{jH} = 1 + i_{jH}$ angelegt wird und zum nachfolgenden Zeitpunkt $t = j$ der aufgezinste Betrag $\alpha\cdot q_{jH}$ zurückerhalten wird ($j = 1,\ldots,n$). Das andere Mal sind es die einperiodischen Finanzierungen

$$\mathbf{F}^j(\kappa) = \kappa\cdot(0,\ldots,+1,-q_{jS},0,\ldots,0)^\mathsf{T} = -\,\kappa\cdot\mathbf{T}^j{}_S$$

des Zeitintervalls $[j\text{-}1,j]$, bei denen zum Zeitpunkt $t = j\text{-}1$ der Betrag $\kappa \geq 0$ zum Sollzinssatz i_{jS} bzw. Sollzinsfaktor $q_{jS} = 1 + i_{jS}$ aufgenommen wird und zum nachfolgenden Zeitpunkt $t = j$ der aufgezinste Betrag $\kappa\cdot q_{jS}$ zurückgezahlt wird. Für $j = 1$ sind die beiden Zinssätze $i_{1H,S}$ sogenannte Kassazinssätze, für $j = 2,\ldots,n$ sind die Zinssätze $i_{jH,S}$ sogenannte Termin- oder Forwardzinssätze. Gemäß seiner auf Seite 58 angegebenen Rekursionsformel zur Berechnung des Finanzmittelbestands C_j im Zeitpunkt $t = j$ setzt er diese Supplementgeschäfte ein, um eine von Null verschiedene Zahlung $C_{j\text{-}1}$ des Zeitpunkts $t = j\text{-}1$ auf den Zeitpunkt $t = j$ zu verschieben (transponieren). Bei einer positiven Zahlung $C_{j\text{-}1} = \alpha$ verwendet er die Investition

$$\mathbf{I}^j(\alpha) = \alpha\cdot\mathbf{T}_H^j \quad = C_{j\text{-}1}\cdot\mathbf{T}_H^j = C_{j\text{-}1}\cdot(0,\ldots,0,-1,+q_{jH},0,\ldots,0)^\mathsf{T}$$

($C_{j\text{-}1} > 0$) und bei einer negativen Zahlung $C_{j\text{-}1} = -\,\kappa$ die Finanzierung

$$\mathbf{F}^j(\kappa) = -\,\kappa\cdot\mathbf{T}_S^j \quad = C_{j\text{-}1}\cdot\mathbf{T}_S^j = C_{j\text{-}1}\cdot(0,\ldots,0,-1,+q_{jS},0,\ldots,0)^\mathsf{T}$$

($C_{j\text{-}1} < 0$) zur Transposition (Verschiebung auf andere Zeitpunkte) oder etwas genauer zur Postposition (Verschiebung auf spätere Zeitpunkte) auf den nachfolgenden Zeitpunkt.

Für die **Replizierung** von **X** bei Berücksichtigung des Basiszahlungsstroms **B** als finanziellen Hintergrund der Beurteilung erhält man die Gleichung

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X}))$$

bzw.

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) - \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X} =: \boldsymbol{\xi}$$

mit einem speziellen Ansatz für das Supplement (Ergänzungsgeschäft) $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ als Konuskombination (konische Kombination, nichtnegative Linearkombination) der elementaren Ergänzungsgeschäfte

$$\mathbf{I}^j(1) = \mathbf{T}_H^j \quad = (0,\ldots,0,-1,+q_{jH},0,\ldots,0)^\mathsf{T} \text{ und}$$

$$\mathbf{F}^j(1) = -\,\mathbf{T}_S^j \quad = (0,\ldots,0,+1,-q_{jS},0,\ldots,0)^\mathsf{T} \qquad (j = 1,\ldots,n),$$

bei dem aber zu keinem Zeitpunkt $j = 1,\ldots,n$ gleichzeitig eine Investition und eine Finanzierung durchgeführt wird:

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{I}^j(1) + \sum_{j=1}^{n} \kappa_j \mathbf{F}^j(1),$$

$\alpha_j \geq 0$, $\kappa_j \geq 0$, $[\alpha_j > 0 \Rightarrow \kappa_j = 0]$, $[\kappa_j > 0 \Rightarrow \alpha_j = 0]$ (**Verbot der gleichzeitigen Ausführung** einer Ergänzungsinvestition und einer Ergänzungsfinanzierung; Kruschwitz (1998), S. 57). Dieser Ansatz für das Supplement entspricht einer Linearkombination

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{T}^j$$

der elementaren Zahlungsströme

$$\mathbf{T}^j = (0,\ldots,0,-1,+q_j,0,\ldots,0)^\top = \mathbf{T}_H^j,\ \mathbf{T}_S^j$$

mit der Nebenbedingung (**Supplementbedingung**)

$$\text{(SB)} \qquad q_j = \begin{cases} q_{jH} & \text{für } \lambda_j = \lambda_{jH} \geq 0, \\ q_{jS} & \text{für } \lambda_j = \lambda_{jS} < 0 \end{cases}$$

und

$$\mathbf{S}^j = \lambda_j \mathbf{T}^j = \begin{cases} \lambda_{jH} \mathbf{T}_H^j & \text{für } \lambda_j = \lambda_{jH} \geq 0, \\ \lambda_{jS} \mathbf{T}_S^j & \text{für } \lambda_j = \lambda_{jS} < 0. \end{cases}$$

Jeder einzelne Summand $\mathbf{S}^j = \lambda_j \mathbf{T}^j \in \text{ray}\,\{\mathbf{T}_H^j, -\mathbf{T}_S^j\}$ von $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ soll also eine einperiodische Investition oder Finanzierung vom vorausgesetzten Kapitalmarkt sein. Damit stellt die Replizierungsgleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{T}_{H/S}^j - \mathbf{V}(v) = \boldsymbol{\xi},$$

für die Parameter $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{X})$, $j = 1,\ldots,n$, und $v = v(\mathbf{X})$ ein Gleichungssystem dar, das auf jeden Fall bezüglich der Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ linear ist und bei dem aber die Elemente $q_{jH,S}$ in der Matrix $(\mathbf{T}_{H,S}^1, \ldots, \mathbf{T}_{H,S}^n)$ noch die Nebenbedingung (SB) zu erfüllen haben:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ q_{1H,S} & -1 & 0 & & & . \\ 0 & q_{2H,S} & -1 & . & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & & 0 \\ . & & & . & q_{n-1\,H,S} & -1 \\ 0 & . & . & . & 0 & q_{n\,H,S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_0(v) \\ V_1(v) \\ . \\ . \\ . \\ V_{n-1}(v) \\ V_n(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Es ist zu untersuchen, ob für die beiden von Kruschwitz verwendeten inhomogen linearen (affin-linearen) Glattstellungskurven $\mathbf{W}(v)$ auch für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine eindeutige Lösung $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,v)^\top$ existiert.

3.3.1 Vermögensstreben

Beim Vermögensstreben ($\hat{\mathbf{V}}(v) = (0,\ldots,0,v)^{\mathsf{T}}$) erhält man für die Bestimmung des Vermögensendwerts v und der übrigen Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Vektorgleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{T}_{H,S}^{j} - \hat{\mathbf{V}}(v) = \boldsymbol{\xi}$$

bzw. das für alle Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, v$ lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ q_{1H,S} & -1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & q_{2H,S} & -1 & 0 & & & 0 \\ . & & . & . & . & & . \\ . & & & . & -1 & 0 & . \\ . & & & & q_{n\text{-}1\,H,S} & -1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & q_{nH,S} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

wobei im Allgemeinen zunächst für die Zinsfaktoren $q_{jH,S}$ ($j = 1,\ldots,n$) jeweils der Habenzinsfaktor q_{jH} oder der Sollzinsfaktor q_{jS} eingesetzt werden kann, also 2^n Gleichungssysteme möglich sind. Die Elemente der Matrix hängen also noch von der Lösung $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,v)^{\mathsf{T}}$ ab und sind noch geeignet zu bestimmen. Bei der zur Endentnahme gehörigen speziellen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(v) = \hat{\mathbf{V}}(v)$ ist jedoch die auftretende Matrix eine untere Bidiagonalmatrix und damit eine untere Dreiecksmatrix. Somit ist das Gleichungssystem ein gestaffeltes Gleichungssystem, das auf einfache Weise inklusive Bestimmung der Zinsfaktoren $q_{jH,S}$ sukzessive nach $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, v$ aufgelöst werden kann.

Man erhält für λ_1 die Gleichung

$$\lambda_1 = -\xi_0$$

und bestimmt nach dem Vorzeichen von λ_1 gemäß der Supplementbedingung (SB) den ersten Zinsfaktor q_1 bzw. den ersten elementaren Zahlungsstrom $\mathbf{T}^1 = (-1,+q_1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$ und damit das erste Supplement $\mathbf{S}^1 = \lambda_1\mathbf{T}^1$:

$$q_1 = \begin{cases} q_{1H} & \text{für } \lambda_1 \geq 0, \\ q_{1S} & \text{für } \lambda_1 < 0, \end{cases} \qquad \mathbf{T}^1 = \begin{cases} \mathbf{T}_H^1 & \text{für } \lambda_1 \geq 0, \\ \mathbf{T}_S^1 & \text{für } \lambda_1 < 0. \end{cases}$$

Nachdem der erste Zinsfaktor $q_1 = q_{1H,S}$ auf q_{1H} oder q_{1S} und damit der erste Supplementtyp $E_1 = H, S$ festgelegt ist, erhält man für λ_2 die Gleichung

$$q_1\lambda_1 - \lambda_2 = \xi_1$$

und daraus seinen Wert

$$\lambda_2 = -\xi_1 + q_1\lambda_1.$$

Aus dem Vorzeichen von λ_2 ergibt sich der zweite elementare Zahlungsstrom $\mathbf{T}^2$ zu $\mathbf{T}_H^2$ oder $\mathbf{T}_S^2$ und entsprechend das zweite Supplement $\mathbf{S}^2 = \lambda_2\mathbf{T}^2$. Sukzessive erhält man so für die Indizes $j = 2,\ldots,n$ die Parameter

$$\lambda_j = -\xi_{j-1} + q_{j-1}\lambda_{j-1},$$
die zugehörigen Zinsfaktoren q_j und die Supplemente $\mathbf{S}^j = \lambda_j\mathbf{T}^j$. Aus der letzten Gleichung
$$q_n\lambda_n - v = \xi_n$$
ergibt sich schließlich schon explizit das Endvermögen
$$v = -\xi_n + q_n\lambda_n,$$
das zur Beurteilung von **X** oder zum Vergleich von **X** mit anderen Zahlungsströmen verwendet wird.

Die hier auftretenden Parameter λ_j,

$$\begin{array}{llllllllll}
\lambda_1 & = -\xi_0 & & & = B_0 & + X_0 & - U_0 & & & (j = 1), \\
\lambda_j & = -\xi_{j-1} & + q_{j-1}\lambda_{j-1} & & = B_{j-1} & + X_{j-1} & - U_{j-1} & + q_{j-1}\lambda_{j-1} & & (j = 2,\ldots,n), \\
\lambda_{n+1} & := -\xi_n & + q_n\lambda_n & - v & = B_n & + X_n & - U_n & + q_n\lambda_n & - v & (j = n+1),
\end{array}$$

sind für die Indizes $j = 1,\ldots,n$ die bei Kruschwitz mit C_{j-1} bezeichneten Finanzmittelbestände, die jeweils im Zeitpunkt $t = j$-1 durch Aufsummierung der Basiszahlung B_{j-1}, der Zahlung X_{j-1} und des aufgezinsten vorhergehenden Finanzmittelbestands λ_{j-1} (= C_{j-2} des Zeitpunkts $t = j$-2) und nach der Entnahme der Marge $W_{j-1}(v) = U_{j-1}$ ($V_{j-1}(v) = 0$) vorhanden sind und erst durch die Ergänzungsgeschäfte $\mathbf{S}^j = \lambda_j\mathbf{T}^j_{E_j}$ $= (0,\ldots,0,-\lambda_j,+q_{jH}\cdot\lambda_j,0,\ldots,0)^\mathrm{T}$ ($E_j = H, S$) im Zeitpunkt $t = j$-1 auf den Wert Null glattgestellt bzw. auf den nachfolgenden Zeitpunkt $t = j$ mit dem Wert $q_{jH}\cdot\lambda_j$ transponiert werden. Für den Index $j = n$+1 gilt aber
$$\lambda_{n+1} = C_n - v,$$
da λ_{n+1} der Finanzmittelbestand nach der Entnahme der gesamten Marge $W_n(v) = U_n + v$ ist und der bei Kruschwitz verwendete Term
$$C_n = B_n + X_n - U_n + q_nC_{n-1}$$
der Finanzmittelbestand nach der Entnahme nur des Margenanteils U_n ist.

Die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, v$ lösen das Gleichungssystem der Replizierung beim Vermögensstreben genau dann, wenn
$$\lambda_{n+1} = 0$$
ist bzw. wenn C_n gleich dem Endvermögensanteil $V_n(v) = v$ ist, der zum Zeitpunkt $t = n$ neben der bereits entnommenen Mindestmarge U_n noch für eine weitere Entnahme zur Verfügung steht. Die Aufgabe der Replizierung des Zahlungsstroms **X** mit Bestimmung des Endvermögensanteils v bzw. die Nullstellenbestimmung für die affin-lineare Funktion
$$\lambda_{n+1}(v) = -\xi_n + q_n\lambda_n - v$$
kann hier ganz einfach mit expliziter Angabe der einzigen Nullstelle
$$v = -\xi_n + q_n\lambda_n$$
gelöst werden.

Da hier eine lineare Beurteilungskurve $\mathbf{V}(v) = \hat{\mathbf{V}}(v) = v\cdot\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_{n+1} = (0,\ldots,0,1)^\mathrm{T}$, vorliegt, sind die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, v$ auch die Koordinaten des Differenzvektors $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{U}^* - \mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$ bezüglich der Basis $\mathbf{T}^1, \ldots, \mathbf{T}^n, \hat{\mathbf{A}}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^{n+1}$. Zu beachten ist hierbei, dass für jeden Zahlungsstrom **X** diese Basis erst individuell aus dem Satz von 2^n Basen $\mathbf{T}_{H,S}^1$, …, $\mathbf{T}_{H,S}^n$, $\hat{\mathbf{A}}$ zu bestimmen ist.

Beim Vermögensstreben ist also für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ das Gleichungssystem eindeutig und inklusive passender Festlegung der Zinsfaktoren q_j bzw. der Supplementtypen $E_j = H$, S gemäß der Bedingung (SB) zu lösen und somit eine eindeutige Replizierung möglich.

Beispiel 3.1 Zahlenbeispiel von Kruschwitz für das Vermögensstreben

Hier verwendet Kruschwitz (1998), S. 59–61, die Laufzeit $n = 3$, den Basiszahlungsstrom

$$\mathbf{B} = (600;100;-200;800)^\mathsf{T},$$

die konstante Mindestmarge

$$\mathbf{U} = (20;22;24;26)^\mathsf{T},$$

die Habenzinsfaktoren

$$q_{1H} = 1{,}05; \qquad q_{jH} = 1{,}07 \text{ für } j = 2, 3$$

und die Sollzinsfaktoren

$$q_{1S} = 1{,}12; \qquad q_{jS} = 1{,}10 \text{ für } j = 2, 3.$$

Nach den entwickelten Rechenregeln wird beispielsweise für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (-500;-400;800;400)^\mathsf{T}$$

das zu erzielende Endvermögen v des Margenzahlungsstroms

$$\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{V}}(v) = (U_0, U_1, U_2, U_3 + v)^\mathsf{T}.$$

bestimmt: Sukzessive erhält man

$$\begin{array}{llll}
\lambda_1 = B_0 + X_0 - U_0 & = 600 - 500 - 20 & = 80 > 0; & E_1 = H; \\
\lambda_2 = B_1 + X_1 - U_1 + q_{1H}\lambda_1 & = 100 - 400 - 22 + 1{,}05 \cdot 80 & = -238 < 0; & E_2 = S; \\
\lambda_3 = B_2 + X_2 - U_2 + q_{2S}\lambda_2 & = -200 + 800 - 24 - 1{,}10 \cdot 238 & = 314{,}20 > 0; & E_3 = H; \\
v = B_3 + X_3 - U_3 + q_{3H}\lambda_3 & = 800 + 400 - 26 - 1{,}07 \cdot 314{,}2 & = 1510{,}29. &
\end{array}$$

Dieses Endvermögen $v = v(\mathbf{X}) = 1510{,}29$ dient als Maßzahl beim Vergleich des Zahlungsstroms **X** mit anderen Zahlungsströmen **Y** und insbesondere mit der Unterlassungsalternative **O**. △

3.3.2 Einkommensstreben

Beim Einkommensstreben ($\tilde{\mathbf{V}}(v) = v \cdot \mathbf{A}$) erhält man für die Bestimmung des Entnahmeniveaus v die Vektorgleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{T}_{H,S}^j - \tilde{\mathbf{V}}(v) = \boldsymbol{\xi}$$

bzw. für die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, v$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & . & -A_0 \\ q_{1H,S} & -1 & 0 & & & & -A_1 \\ 0 & q_{2H,S} & -1 & 0 & & & . \\ . & & . & . & . & & . \\ . & & & . & -1 & 0 & . \\ . & & & & q_{n-1\,H,S} & -1 & -A_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & q_{nH,S} & -A_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

wobei wieder die Zinsfaktoren $q_j = q_{jH,S}$ ($j = 1,\ldots,n$) gemäß der Bedingung (SB) jeweils noch auf den Habenzinsfaktor q_{jH} oder den Sollzinsfaktor q_{jS} und entsprechend die elementaren Zahlungsströme $\mathbf{T}^j = \mathbf{T}^j_{E_j}$ auf $\mathbf{T}^j_H$ oder $\mathbf{T}^j_S$ festzulegen sind, so dass jeder Zahlungsstrom $\mathbf{S}^j = \lambda_j \mathbf{T}^j$ ein Supplement vom Kapitalmarkt ist. Das Gleichungssystem hat jetzt aber keine Dreiecksmatrix, ist also kein gestaffeltes Gleichungssystem und kann somit nicht einfach sukzessive aufgelöst werden. Zu einem fest vorgegebenen Entnahmeniveau $\nu = \nu_1$ liefert aber die Vektorgleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{T}^j_{H,S} = \boldsymbol{\xi} + \tilde{\mathbf{V}}(\nu)$$

für die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in den ersten n Zeilen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ q_{1H,S} & -1 & 0 & & & . \\ 0 & q_{2H,S} & -1 & . & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & -1 & 0 \\ . & & & . & q_{n-1\,H,S} & -1 \\ 0 & . & . & . & 0 & q_{nH,S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 + A_0\nu \\ \xi_1 + A_1\nu \\ . \\ . \\ . \\ \xi_{n-1} + A_{n-1}\nu \\ \xi_n + A_n\nu \end{pmatrix}$$

ein gestaffeltes Gleichungssystem, bei dem sukzessive die Parameter λ_j berechnet werden können und jeweils nach dem Vorzeichen von λ_j gemäß der Supplementbedingung (SB) der zugehörige Supplementtyp $E_j = H, S$ und der zugehörige Zinsfaktor

$$q_j = q_j(\nu) = q_{jH,S} \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

für die nächste Gleichung bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\xi_0 && - A_0\nu \\ &= B_0 + X_0 - U_0 && - A_0\nu && (U_0 = 0), \\ \lambda_2 &= -\xi_1 + q_1\lambda_1 && - A_1\nu \\ &= B_1 + X_1 - U_1 + q_1\lambda_1 && - A_1\nu && (U_1 = 0), \\ &\ldots \\ \lambda_j &= -\xi_{j-1} + q_{j-1}\lambda_{j-1} && - A_{j-1}\nu \\ &= B_{j-1} + X_{j-1} - U_{j-1} + q_{j-1}\lambda_{j-1} && - A_{j-1}\nu && (U_{j-1} = 0,\ j = 2,\ldots,n). \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem v erhält man aus der ersten Gleichung den Wert für

$$\lambda_1 = - \xi_0 - A_0 v,$$

nach dem Vorzeichen von λ_1 gemäß der Supplementbedingung (SB) den Zinsfaktortyp H oder S von $q_{1H,S}$ und damit den ersten Zinsfaktor q_1:

$$q_1 = \begin{cases} q_{1H} & \text{für } \lambda_1 \geq 0, \\ q_{1S} & \text{für } \lambda_1 < 0. \end{cases}$$

Nach der Festlegung des ersten Zinsfaktors $q_1 = q_{1H,S}$ auf q_{1H} oder q_{1S} für die zweite Gleichung erhält man dann für λ_2 aus der zweiten Gleichung den Wert

$$\lambda_2 = - \xi_1 + q_1\lambda_1 - A_1 v.$$

Aus dem Vorzeichen von λ_2 ergibt sich gemäß (SB) der zweite Zinsfaktortyp H oder S von $q_{2H,S}$ und damit der zweite Zinsfaktor q_2 zu q_{2H} oder q_{2S} für die dritte Gleichung. Sukzessive ergeben sich so für die Indizes $j = 2,\ldots,n$ die Parameterwerte

$$\lambda_j = - \xi_{j-1} + q_{j-1}\lambda_{j-1} - A_{j-1} v,$$

die zugehörigen Zinsfaktortypen H oder S von $q_{j,H,S}$ und die Zinsfaktoren q_j zu q_{jH} oder q_{jS}.

Die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ liefern nun zusammen mit v eine Lösung des *gesamten* Gleichungssystems, wenn auch noch die letzte $(n+1)$-te Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &:= - \xi_n && + q_n\lambda_n && - A_n v \\ &= B_n + X_n - U_n && + q_n\lambda_n && - A_n v && = 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist, also v eine Nullstelle der rekursiv definierten Funktion

$$\lambda_{n+1}(v) := - \xi_n + q_n(v)\lambda_n(v) - A_n v$$

ist. Die Funktion $\lambda_{n+1}(v)$ wird mit der gleichen Rekursionsformel wie die vorherigen Finanzmittelbestände $\lambda_j(v)$ $(j = 2,\ldots,n)$ gebildet. In seinem Zahlenbeispiel für das Einkommensstreben auf S. 74–75 bestimmt Kruschwitz die Lösung des Gleichungssystems bzw. die Nullstelle von $\lambda_{n+1}(v)$ mit Hilfe eines Iterationsverfahrens und linearer Interpolation.

Die Parameter λ_j entsprechen auch hier für die Indizes $j = 1,\ldots,n$ den bei Kruschwitz mit C_{j-1} bezeichneten Finanzmittelbeständen zu den Zeitpunkten j-1: Der Parameter λ_j ergibt sich als Summe der Basiszahlung B_{j-1}, der Zahlung X_{j-1} und des aufgezinsten früheren Finanzmittelbestands λ_{j-1} (des Zeitpunkts j-2) und nach der Entnahme der Marge $W_{j-1}(v) = A_{j-1}v$ $(U_{j-1} = 0)$ und wird erst durch das im Zeitpunkt j durchgeführte Ergänzungsgeschäft $\mathbf{S}^j = \lambda_j \mathbf{T}^j_{E_j}$ $(E_j = H, \mathrm{S})$ auf den Wert Null glattgestellt bzw. auf den nachfolgenden Zeitpunkt $t = j$ transponiert. Da aber der letzte Parameter λ_{n+1} der Finanzmittelbestand nach der Entnahme der gesamten Marge $W_n(v) = U_n + A_n v$ ist und der bei Kruschwitz verwendete Term

$$C_n = B_n + X_n + q_n C_{n-1} - A_n v$$

der Finanzmittelbestand nach der Entnahme nur des Margenanteils $V_n(v) = A_n v$ ist, gilt für λ_{n+1} und C_n die Beziehung

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= B_n + X_n - U_n + q_n\lambda_n - A_n v \\ &= C_n - U_n. \end{aligned}$$

Die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, v$ lösen das Gleichungssystem der Replizierung beim Einkommensstreben also genau dann, wenn der Finanzmittelbestand C_n gleich dem gewünschten Endvermögensanteil U_n bzw. wenn der zum Einkommensniveau v aus den ersten n Gleichungen errechnete Parameter $\lambda_{n+1}(v)$ gleich Null ist:

$$\lambda_{n+1}(v) = 0.$$

Die Aufgabe der Replizierung des Zahlungsstroms **X** mit Bestimmung des Einkommensniveaus v ist somit in das Problem der Nullstellenbestimmung für die Funktion $\lambda_{n+1}(v)$ übergeführt.

Beispiel 3.2 Zahlenbeispiel von Kruschwitz für das Einkommensstreben

In diesem Beispiel verwendet Kruschwitz (1998), S. 74–75, die Laufzeit $n = 5$, den Basiszahlungsstrom

$$\mathbf{B} = (500;100;100;100;100;100)^{\mathsf{T}},$$

die konstante Mindestmarge

$$\mathbf{U} = (0;0;0;0;0;1500)^{\mathsf{T}}$$

mit dem Endvermögensanteil $U_5 = 1500$, die Einkommenszeitstruktur

$$\mathbf{A} = (1,0;1,2;1,0;1,2;1,4;1,6)^{\mathsf{T}},$$

die Habenzinsfaktoren

$$q_{jH} = 1{,}07 \text{ für } j = 1, 2, 3, \qquad q_{jH} = 1{,}08 \text{ für } j = 4, 5$$

und die Sollzinsfaktoren

$$q_{jS} = 1{,}11 \text{ für } j = 1, 2, \qquad q_{jS} = 1{,}12 \text{ für } j = 3, 4, 5.$$

Es soll für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (-1000;200;400;600;700;800)^{\mathsf{T}}$$

das zu erzielende Einkommensniveaus v des Margenzahlungsstroms

$$\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \tilde{\mathbf{V}}(v) = \mathbf{U} + v\mathbf{A}$$

bestimmt werden.

Zur Berechnung von v wählt Kruschwitz die zwei Niveaus $v_1 = 100$ und $v_2 = 200$ mit den Parameterwerten $\lambda_6(v_1) = 647{,}13 > 0$ und $\lambda_6(v_2) = -273{,}76 < 0$ und bestimmt mit diesen Niveau-Startwerten mittels linearer Interpolation die weiteren Niveaus $v_3 = 170{,}27$ mit $\lambda_6(v_3) = 2{,}91$ und $v_4 = 170{,}58$ mit $\lambda_6(v_4) = 0{,}07 \approx 0$, also $C_5(v_4) \approx U_5$. Gibt man sich mit der Genauigkeit von einer Nachkommastelle zufrieden, so kann man als Ergebnis für das Einkommensniveau den Wert $v = v_4 = 170{,}58$ nehmen.

Berechnet man mit einer Excel-Tabelle zu einem vorgegebenen Einkommensniveau v den Wert $\lambda_6(v)$, so kann man umgekehrt mit der Zielwertsuche (im Menüpunkt ‚Was-wäre-wenn-Analyse' des Menüs ‚Daten' beim Programm Excel von Microsoft Office) für $\lambda_6(v)$ den Wert 0 vorgeben und dazu das Niveau zu $v = 170{,}5876$ bestimmen. Als Zielzelle wählt man die Zelle mit der Berechnung des Funktionswerts $\lambda_6(v)$, als Zielwert die Zahl 0 und als veränderbare Zelle die Zelle mit dem Wert für v. △

Anmerkungen zum Beweis von Kruschwitz: Einen Beweis dafür, dass auch beim Einkommensstreben für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ stets eine eindeutige Replizierung möglich ist, findet man bei Kruschwitz (1976), S. 18–20. Der Beweis liefert nicht nur die theoretische Begründung für die Existenz und Einzigkeit einer Replizierung, sondern auch ein praktisches Rechenverfahren zur Bestimmung dieser Replizierung, nämlich mittels der Nullstellenbestimmung der Funktion $\lambda_{n+1}(v)$. Er verwendet dabei, dass die Replizierung beim Einkommensstreben gleichbedeutend dazu ist, ein Einkommensniveau v zu finden, für welches der zu v errechnete letzte Finanzmittelbestand $C_n(v)$ gleich einem vorgegeben Wert U_n ist bzw. der oben definierte modifizierte Finanzmittelbestand $\lambda_{n+1}(v) = C_n(v) - U_n$ gleich Null ist. Zum Beweis der Existenz von genau einer Nullstelle $v^* \in \mathbb{R}$ von $\lambda_{n+1}(v)$ zeigt er mit dem Prinzip der vollständigen Induktion nach dem Index j der Finanzmittelbestände $\lambda_j(v) = C_{j-1}(v)$ $(j = 1,\ldots,n+1)$, dass schließlich $C_n(v)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, streng monoton fallende, surjektive und stetige Funktion $C_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Es kann auch ein etwas modifizierter Beweis angegeben werden, bei dem explizit auch verwendet wird, dass die Finanzmittelbestände $\lambda_j(v)$ stetige und stückweise affin-lineare (inhomogen lineare) Funktionen sind und zumindest der letzte Finanzmittelbestand $\lambda_{n+1}(v)$ eine auf $\mathbb{R}$ stückweise affin-lineare, stetige und streng monoton fallende Funktion ist, die daher genau eine Nullstelle v^* besitzt. Der Beweis wird hier aber aus Platzgründen weggelassen.[4] Unter stückweise affin-linearer Funktion wird hier eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion verstanden, für die $\mathbb{R}$ in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann, so dass auf jedem Teilintervall die Funktion mit einer affin-linearen Funktion übereinstimmt. □

Alternative Lösungsmöglichkeit: Eine andere aufwendigere Möglichkeit zur Bestimmung einer Replizierung besteht darin, jedes der bei der Festlegung der n Zinsfaktoren $q_j = q_{jH,S}$ möglichen 2^n Gleichungssysteme explizit zu lösen und die jeweilige Lösung $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\nu)^\top$ auf die Supplementbedingung (SB) des speziellen Supplementansatzes hin zu überprüfen:

(SB') $\lambda_j \geq 0$ bei $q_j = q_{jH}$,
$\lambda_j < 0$ bei $q_j = q_{jS}$ $(j = 1,\dots,n)$.

Falls diese Bedingung für einen Index j nicht erfüllt ist, scheidet diese Kombination $(q_1,\dots,q_n) = (q_{1H,S},\dots,q_{nH,S})$ der Zinsfaktoren zur Bestimmung der Lösung $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\nu)^\top$ der Replizierung aus.

Die Festlegung des n-Tupels $(q_1,\dots,q_n)$ der n Zinsfaktoren $q_j = q_{jH,S}$ kann präziser durch 2^n Indexvektoren $\mathbf{E} = (E_1,\dots,E_n) \in \{S,H\}^n$, $E_j = H$ oder $E_j = S$, beschrieben werden. Zu jeder Wahl von $\mathbf{E}$ gehören also n Zinsfaktoren $q_j = q_{jE_j}$, die ersten n Spaltenvektoren $\mathbf{T}^j_{E_j}$ $(j = 1,\dots,n)$ der Matrix des Gleichungssystems und dazu der spezielle Normalenvektor (Stellungsvektor)

$$\mathbf{P_E} \in \left[\mathbf{T}^1_{E_1},\dots,\mathbf{T}^n_{E_n}\right]^\perp$$

der von den Spaltenvektoren $\mathbf{T}^1_{E_1}$, …, $\mathbf{T}^n_{E_n}$ aufgespannten Hyperebene

$$\left[\mathbf{T}^1_{E_1},\dots,\mathbf{T}^n_{E_n}\right] = [\mathbf{P_E}]^\perp$$

des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\mathbf{P_E} := (q_{1E_1} \cdot\ldots\cdot q_{nE_n} , q_{2E_2} \cdot\ldots\cdot q_{nE_n} ,\dots, q_{nE_n} ,1)^\top.$$

Der Normalenvektor $\mathbf{P_E}$ ist orthogonal zu allen n Spaltenvektoren $\mathbf{T}^j_{E_j}$:

$$\mathbf{P_E}^\top \mathbf{T}^j_{E_j} = 0 \qquad (j = 1,\dots,n).$$

Jedes einzelne lineare Gleichungssystem

$$(\mathrm{LG_E}) \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j\mathbf{E}} \mathbf{T}^j_{E_j} - \nu_{\mathbf{E}}\mathbf{A} = \boldsymbol{\xi}$$

ist dabei genau dann eindeutig lösbar, wenn der Rang der von den Spaltenvektoren $\mathbf{T}^1_{E_1}$, …, $\mathbf{T}^n_{E_n}$, $-\mathbf{A}$ gebildeten Matrix gleich $n + 1$ ist, wenn also der Einkommensstrukturvektor $\mathbf{A}$ linear unabhängig von den anderen n Spaltenvektoren $\mathbf{T}^1_{E_1}$, …, $\mathbf{T}^n_{E_n}$ der Matrix ist. Dies ist tatsächlich der Fall, da nach Voraussetzung $\mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O}$ gilt und die Zinsfaktoren $q_j = q_{jH,S}$ positiv vorausgesetzt sind, also

$$\mathbf{P_E}^\top\mathbf{A} = A_0 q_{1E_1} \cdot\ldots\cdot q_{nE_n} + A_1 q_{2E_2} \cdot\ldots\cdot q_{nE_n} + \ldots + A_{n-1} q_{nE_n} + A_n > 0$$

ist und somit $\mathbf{A}$ nicht in der von den Spaltenvektoren $\mathbf{T}^1_{E_1}$, …, $\mathbf{T}^n_{E_n}$ aufgespanten Hyperebene liegt.

Die theoretische Lösung $(\lambda_{1\mathbf{E}},\dots,\lambda_{n\mathbf{E}},\nu_{\mathbf{E}})^\top$ des linearen Gleichungssystems $(\mathrm{LG_E})$ kann explizit mit der Cramerschen Regel[5] angegeben werden. Eine praktische Berechnung erfolgt besser mit dem Gaußschen

4 Der modifizierte Beweis wird auf der Autoren-Website www.pleier-r.de angegeben. Dort wird auch noch mit demselben Beweisschema die Existenz und Einzigkeit der Replizierung mit den allgemeineren Supplementen des Abschnitts 8.4 gezeigt.

5 Die Cramersche Regel wurde 1750 von dem Genfer Mathematiker G. Cramer (1704–1752) in seinem Buch über die Analyse algebraischer Kurven veröffentlicht, war aber vorher schon 1678 in einem Manuskript von dem deutschen Philosophen, Mathematiker, Historiker und Diplomaten G. W. Leibniz (1646–1716) zu finden.

Eliminationsverfahren[6] (Gauß-Verfahren). Für die nachfolgende Darstellung werden aber statt Determinanten jetzt Normalenvektoren verwendet. Durch Linksmultiplikation der Replizierungsgleichung (LG_E) mit dem Zeilenvektor $\mathbf{P_E}^{\mathsf{T}}$ erhält man auf Grund der Linearität der vorliegenden Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\nu) = \nu\mathbf{A}$ eine explizite Formel für den Beurteilungsparameter $\nu_{\mathbf{E}}$:

$$\nu_{\mathbf{E}} = - \mathbf{P_E}^{\mathsf{T}}\xi/\mathbf{P_E}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}.$$

Entsprechend erhält man explizite Formeln für die Transformationsparameter $\lambda_{j\mathbf{E}}$ unter Verwendung von Normalenvektoren $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{j} \neq \mathbf{O}$, die jeweils orthogonal zu den Spaltenvektoren

$$\mathbf{T}_{E_1}^{1}, \ldots, \mathbf{T}_{E_{j-1}}^{j-1}, \mathbf{T}_{E_{j+1}}^{j+1}, \ldots, \mathbf{T}_{E_n}^{n}, \mathbf{A}$$

der Matrix sind und bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt sind:

$$\lambda_{j\mathbf{E}} = \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{j\mathsf{T}}\xi \Big/ \mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{j\mathsf{T}}\mathbf{T}_{E_j}^{j}.$$

Allgemein ist aber bei der zum Einkommensstreben gehörigen Replizierung noch zu klären, ob für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ stets zumindest bei einem dieser 2^n Gleichungssysteme (LG_E), $\mathbf{E} \in \{S,H\}^n$, die Lösung $(\lambda_{1\mathbf{E}},\ldots,\lambda_{n\mathbf{E}},\nu_{\mathbf{E}})^{\mathsf{T}}$ auch die obige Supplementbedingung (SB‘) erfüllt und ob diese Lösung die einzige derartige Lösung ist.

3.4 Weitere Literaturstellen zu den beiden Bewertungskonzepten

3.4.1 Replizierung bei Marusev mit der Sofortentnahme

Alfred W. Marusev (1988), S. 59–68, will den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (-96.000;25.000;25.000;25.000;25.000;24.304,49)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^6$$

eines Aktivgeschäfts einer Bank mit einem Bankkunden (Kreditvergabe an einen Bankkunden) beurteilen. Dazu will er $\mathbf{X}$ mit fiktiven Nullkuponanleihen (englisch: Zero Coupon Bond, Zero-Bond) refinanzieren. Bei Aktivgeschäften der Bank wird die Replizierung (Glattstellung) auch als Refinanzierung bezeichnet. Nullkuponanleihen besitzen keinen Kupon (Zinsschein), so dass hierfür während der Laufzeit von m Jahren keine Zinszahlungen geleistet werden. Sie sind gesamtfällige, also hinsichtlich Tilgung und Zinszahlung endfällige Anleihen. In seinem Beispiel für die Laufzeit $n = 5$ geht er von fünf auf dem Geld- und Kapitalmarkt gehandelten m-Jahresgeldern ($m = 1,\ldots,5$) aus und nimmt an, dass diese beim Kauf und Verkauf die gleiche Zahlungsstromstruktur aufweisen. Für jede Laufzeit $m = 1,\ldots,5$ bildet er jeweils durch Linearkombination der Jahresgelder einen fiktiven Zero-Bond

$$\mathbf{S}_S^m = (+v_m{}^m,0,\ldots,0,-1,0,..,0)^{\mathsf{T}}$$

(Abzinsungsfaktor $v_m{}^m = 1/q_m{}^m$, $S_{S,0}^m = +v_m{}^m$, $S_{S,m}^m = - 1$, $S_{S,j}^m = 0$ für $j \neq 0, m$), den er als Finanzierung verwenden will. Mit den Zero-Bonds als Ergänzungsgeschäften stellt er den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ des Bankgeschäfts glatt,

[6] Das Gaußsche Elininationsverfahren ist nach dem deutschen Mathematiker, Astronomen, Geodäten und Physiker C. F. Gauß (1777–1855) benannt. Die Gauß-Elimination und die Cramersche Regel sind beispielsweise beschrieben bei Bröcker (2004), S. 56ff, 95.

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})),\ \ \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{5} X_j \cdot \mathbf{S}_S^j\ ,$$

bis auf einen Margenzahlungsstrom

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0,0,0,0)^{\mathsf{T}}$$

der Sofortentnahme und berechnet somit zu **X** die Marge

$$\nu(\mathbf{X}) = V_0(\nu(\mathbf{X})) = X_0 + \sum_{j=1}^{5} X_j \cdot v_j^{\,j} = B_5(\mathbf{X}) = 8.863{,}05,$$

also den Kapitalwert oder Barwert $B_5(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms **X**, den er zum Zeitpunkt $t = 0$ entnehmen kann. Es kommt hier für die Beurteilung des Zahlungsstroms also das Konzept der Replizierung zum Einsatz, wobei die konstruierten fiktiven Zero-Bonds als Ergänzungsgeschäfte und die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ der Sofortentnahme verwendet werden.

3.4.2 Replizierung bei Locarek mit der Endentnahme

Hermann Locarek[7] (1992), S. 79–81, vergleicht für die Laufzeit $n = 3$ den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (-30.000;6.000;21.000;7.000)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^4$$

einer Realinvestition mit der Unterlassungsalternative $\mathbf{O} = (0;0;0;0)^{\mathsf{T}}$ nach dem Konzept der Replizierung. Als Ergänzungsgeschäfte stehen die Geldanlage zum Habenzinssatz $i_{jH} = i_H = 4{,}5\%$ und die Kreditaufnahme zum Sollzinssatz $i_{jS} = i_S = 7{,}5\%$ zur Verfügung ($j = 1,2,3$). Die Ergänzungsgeschäfte sind also einperiodische Termingeschäfte und beschreiben beispielsweise die Situation, bei der die Geldanlagen auf einem im Plus (Haben) befindlichen Girokonto durchgeführt werden oder bei der die Kreditaufnahmen mittels eines im Minus (Soll) befindlichen Girokontos möglich sind. Mit der Endwertmaximierung (Endentnahme) als individuelle Zielsetzung wählt er die Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,0,0,\mu)^{\mathsf{T}}.$$

Bei dem Vergleich berücksichtigt er auch einen im Hintergrund zur Verfügung stehenden Basiszahlungsstrom **B**. Er behandelt die zwei Fälle, dass entweder ausreichend Eigenkapital zur Verfügung steht oder dass kein Eigenkapital vorhanden ist und die Investition ganz mit Fremdkapital finanziert werden muss.

Im ersten Fall wird also der Basiszahlungsstrom

$$\mathbf{B} = (30.000;0;0;0)^{\mathsf{T}}$$

mit in die Rechnung einbezogen. Die Replizierung von **X**,

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{X}))\,,$$

erhält man mit dem Supplement

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{X}) \;=\; &(0;\ -6.000;\ \ 0;\ +6.000\cdot 1{,}045^2)^{\mathsf{T}} \;+\\ &(0;\ \ 0;\ -21.000;\ +21.000\cdot 1{,}045)^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

---

[7] Hermann Locarek-Junge (1957–) ist ein deutscher Ökonom und Wirtschaftsinformatiker und Professor an der Universität Essen und später an der TU Dresden.

$$= \quad (0;\ \ -6.000;\ \ -21.000;\qquad 28.497{,}15)^{\mathsf{T}}$$

und dem Endwert

$$v(\mathbf{X}) = 7.000 + 28.497{,}15 = 35.497{,}15.$$

Die Replizierung von **O**,

$$\mathbf{B} + \mathbf{O} + \mathbf{S}(\mathbf{O}) \ = \ \hat{\mathbf{V}}(v(\mathbf{O})),$$

ist die Anlage von **B** bei der Bank und wird beschrieben mit dem Supplement

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{O}) \ &= \ (-30.000;\ \ 0;\ \ \ 0;\ \ \ +30.000\cdot 1{,}045^3)^{\mathsf{T}}\\ &= \ (-30.000;\ \ 0;\ \ \ 0;\qquad 34.234{,}98)^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

und dem Endwert

$$v(\mathbf{O}) = 34.234{,}98 < v(\mathbf{X}).$$

Bei möglicher Eigenfinanzierung ist also die Realinvestition **X** der Geldanlage von **B** bei der Bank vorzuziehen.

Im zweiten Fall ist der Basiszahlungsstrom **B** = **O**. Die Replizierung der Unterlassungsalternative **O** ist gegeben durch **S**(**O**) = **O** und v(**O**) = 0. Die Replizierung von **X**,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \ \hat{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X})),$$

erhält man mit dem Supplement

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{X}) = {} & (30.000;\ \ -30.000\cdot 1{,}075;\qquad 0;\qquad 0)^{\mathsf{T}} + \\ & (0;\qquad -26.250;\ \ +26.250\cdot 1{,}075;\qquad 0)^{\mathsf{T}} + \\ & (0;\qquad 0;\qquad -7.218{,}75;\ \ 7218{,}75\cdot 1{,}075)^{\mathsf{T}} \\ = {} & (30.000;\qquad -6.000;\qquad -21.000;\qquad -7.760{,}16)^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

und dem Endwert

$$v(\mathbf{X}) = 7.000 - 7.760{,}16 = -\,760{,}16 < 0 = v(\mathbf{O}).$$

Bei einer benötigten vollen Fremdfinanzierung ist also die Unterlassungsalternative **O** gegenüber der Realinvestition **X** vorzuziehen.

3.4.3 Replizierung bei Kober, Knöll und Rometsch mit der Sofortentnahme und der kapitaleinsatzidentischen Refinanzierung

Joachim Kober, Heinz-Dieter Knöll[8] und Ute Rometsch (1992), S. 129–140, 142–149, möchten den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (-94.000;3.500;3.500;3.500;103.500)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^5$$

eines Aktivgeschäfts einer Bank mit halbjährlichen Zahlungen und der Laufzeit von n = 4 Halbjahren mit dem Konzept der Replizierung beurteilen. Für die Replizierung werden sowohl zur Finanzierung als auch zur Investition als Ergänzungsgeschäfte endfällige Wertpapiere vom Interbankenmarkt mit jährlichen Zinszahlungen verwendet:

$$\mathbf{S}_S^1 \ = \ (\ 103;\ -108;\qquad 0;\qquad 0;\qquad 0)^{\mathsf{T}},$$

$$\mathbf{S}_H^2 \ = (-100;\qquad 0;\ \ 108{,}5;\qquad 0;\qquad 0)^{\mathsf{T}},$$

[8] Heinz-Dieter Knöll (1947–) ist Betriebswirtschaftler und Mineraloge und war Professor für Wirtschaftsinformatik an der Universität Lüneburg.

$$\mathbf{S}_S^3 = (\ 104;\quad -9;\quad 0;\quad -109;\quad 0)^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{S}_S^4 = (\ 100;\quad 0;\quad -9{,}3;\quad 0;\quad -109{,}3)^{\mathrm{T}}.$$

In einer **ersten Margenkalkulation** verwenden sie die sogenannte „zahlungsstrukturkongruente Refinanzierung in der strengeren Form“ nach Sievi mit der Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$$

der Sofortentnahme (Barwertmethode, Sievis Südseemodell). Für **X** errechnet sich die Refinanzierung

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{X}))$$

mit dem sukzessive in den Zeitpunkten j = 4, 3, 2, 1 zusammengesetzten Gegengeschäft

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{X}) &= \sum_{j=4}^{1} \lambda_j \cdot \mathbf{S}_{H/S}^j \\ &= \mathbf{S}_S^4 \cdot 103.500{,}00/109{,}39 + \\ &\quad\ \mathbf{S}_S^3 \cdot 3.500{,}00/109{,}00 + \\ &\quad\ \mathbf{S}_H^2 \cdot (-(3.500{,}00 - 8.806{,}49))/108{,}50 + \\ &\quad\ \mathbf{S}_S^1 \cdot (3.500{,}00 - 288{,}99)/108{,}00 \\ &= (94.693{,}50;0;-8.806{,}49;0;-103.500{,}00)^{\mathrm{T}} + \\ &\quad\ (3.339{,}45;-288{,}99;0;-3.500{,}00;0)^{\mathrm{T}} + \\ &\quad\ (-4.890{,}78;0;5.306{,}49;0;0)^{\mathrm{T}} + \\ &\quad\ (3.062{,}35;-3.211{,}01;0;0;0)^{\mathrm{T}} \\ &= (96.204{,}53;-3.500;-3.500;-3.500;103.500)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

und dem zum Zeitpunkt j = 0 entnehmbaren „Margenbarwert“ („Barwert des Konditionsbeitrags“, der durch die speziellen Konditionen des Bankgeschäfts bedingt ist)

$$V_0(\nu(\mathbf{X})) = \nu(\mathbf{X}) = 2.204{,}53.$$

In einer **zweiten Margenkalkulation** wird die sogenannte „kapitaleinsatzkongruente Refinanzierung“ nach Schierenbeck und Rolfes durchgeführt. Eine Diskussion der Margenkalkulation mit verschiedenen Ansätzen wie z. B. der kostenproportionalen, der zeitlich konstanten, der rückflussproportionalen Margenverteilung und insbesondere mit der Kapitaleinsatzkongruenz bzw. Kapitaleinsatzidentität findet man bei Schierenbeck (1994), S. 475–482. Der Kapitaleinsatz C_j zum Zeitpunkt j aus der Sicht des Kreditgebers ist die Restschuld R_j aus der Sicht des Kreditnehmers. Für die Aufstellung der Bedingungen für die Replizierung

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{V},\ \ \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \cdot \mathbf{S}_{H/S}^j\ ,\ \lambda_j \ge 0,$$

also für die rechnerische Bestimmung der unbekannten Höhen λ_j der Gegengeschäfte $\mathbf{S}_{H,S}^j$, wird hier nicht wie oben bei der ersten Margenkalkulation als Rechnungsziel die Struktur des Margenzahlungsstroms $\mathbf{V}(\mu)$ verwendet, sondern die Kapitaleinsatzidentität von Aktiv- und Refinanzierungsgeschäft. Dazu bestimmt man den Effektivzinssatz i_{eff} der Finanzierung

$$\mathbf{D} = -\mathbf{X} = (94.000;-3.500;-3.500;-3.500;-103.500)^{\mathsf{T}}$$

des Bankkunden und bei der Verrechnung von **D** auf dem Vergleichskonto (Verrechnungskonto, Kreditkonto des Bankkunden mit dem Effektivzinssatz statt des Nominalzinssatzes) mit diesem Effektivzinssatz i_{eff} die Kontostände C_{j-1} bzw. Restschulden $R_{j-1} = -C_{j-1}$ ($j = 1,\ldots,n+1$) und die Tilgungsraten $T_j = R_{j-1} - R_j$ ($j = 1,\ldots,n$). Die Definition des Effektivzinssatzes i_{eff} besteht in der Forderung, dass der letzte Kontostand C_n auf diesem Vergleichskonto gleich Null ist.

Zur Berechnung des Effektivzinssatzes wird in einer ersten Rechnung die Methode der **PAngV** (Preisangabenverordnung) von **1985** gewählt. Eine zweite Rechnung verwendet anschließend die AIBD-Methode (PAngV 2000). Analog zur Verrechnung der Finanzierung $\mathbf{D} = -\mathbf{X}$ mit Effektivzinssatz i_{eff} auf dem Vergleichskonto wird auch der Zahlungsstrom $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X})$ der Refinanzierung auf einem Vergleichskonto mit seinem Effektivzinssatz $i := i_{\text{eff,Refi}}$ nach derselben Methode verrechnet. Dieses Verrechnungskonto der Finanzierung **S** für die Bank wird ebenfalls als Kreditkonto, nämlich als fiktives Gesamtkreditkonto der Bank auf dem Interbankenmarkt geführt. Bei der Kapitaleinsatzidentität wird nun gefordert, dass die Verrechnungskonten von **D** und **S** die gleiche Kontostandsentwicklung, also den gleichen Kontostandsvektor

$$\mathbf{C} = (C_0,C_1,\ldots,C_n)^{\mathsf{T}}$$

aufweisen. Setzt man noch rein formal zum Zeitpunkt $j = -1$ den Kontostand $C_{-1} = 0$ und verwendet man den zeitlich verschobenen Kontostandsvektor

$$\tilde{\mathbf{C}} = (0,C_0,\ldots,C_{n-1})^{\mathsf{T}},$$

den Restschuldenvektor $\mathbf{R} = -\mathbf{C}$ und den verschobenen Restschuldenvektor $\tilde{\mathbf{R}} = -\tilde{\mathbf{C}}$, so erhält man den Tilgungsratenvektor zu

$$\mathbf{T} = (T_0,T_1,\ldots,T_n)^{\mathsf{T}} = \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R} = \mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}.$$

Bei der Kapitaleinsatzidentität besitzen die beiden Konten (Kreditkonto des Bankkunden und fiktives Gesamtkreditkonto der Bank) also auch den gleichen Tilgungsratenvektor **T**. Da der Kreditzahlungsstrom **D** zu Lasten des Kreditkontos gebucht wird, ist $-\mathbf{D} = \mathbf{X}$ der Annuitätenzahlungsstrom, der auf das Konto eingezahlt wird. Daher hat man für den Annuitätenvektor $-\mathbf{D}$ die additive Zerlegung

$$-\mathbf{D} = \mathbf{Z} + \mathbf{T}$$

in den Tilgungsanteil $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ und den Zinsanteil $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(i_{\text{eff}},\tilde{\mathbf{R}})$. Analog erhält man für die Refinanzierung **S** die additive Zerlegung

$$-\mathbf{S} = \mathbf{Z}_{\text{Refi}} + \mathbf{T}$$

in Zinsanteil $\mathbf{Z}_{\text{Refi}} = \mathbf{Z}(i_{\text{eff,Refi}},\tilde{\mathbf{R}})$ und den gleichen Tilgungsanteil **T**. Da die beiden Zahlungsströme $-\mathbf{D}$ und $-\mathbf{S}$ sich hier nur im Zinsanteil unterscheiden, ist der Margenzahlungsstrom nur von den Zinsanteilen abhängig:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mathbf{X} + \mathbf{S} \\ &= \mathbf{Z} + \mathbf{T} - \mathbf{Z}_{\text{Refi}} - \mathbf{T} \\ &= \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{\text{Refi}}.\end{aligned}$$

Bei der im Anschluss noch behandelten AIBD-Methode erhält man den Zinsenvektor mit der schönen einfachen Formel $\mathbf{Z} = i^* \cdot \tilde{\mathbf{R}}$, wobei $i^* = \sqrt{1+i_{\text{eff}}} - 1$ der zum jährlichen Effektivzinssatz i_{eff} von **X** gehörige konforme halbjährliche Zinssatz ist. Bei der zunächst aber besprochenen Methode PAngV 1985 ist darauf zu achten, ob der Zahlungszeitpunkt j auch ein Zinsverrechnungszeitpunkt ist oder nicht. Zinsverrechnungszeitpunkte t_m liegen nämlich nach dem Zahlungsbeginn $j = 0$ nur im jährlichen Abstand und noch zum Zahlungsende vor. Im unterjährigen Zeitraum wird mit einer linearen Zinssatzfunktion $i(t) = i \cdot t$ bzw. linearen Zinsfaktorfunktion $q(t) = 1 + i \cdot t$ ($t \in [0,1[$) aufgezinst. Bei den halbjährlichen Zahlungen $X_j = -D_j$ des Beispiels ergibt sich der konforme halbjährliche Zinssatz $i^* = i_{\text{eff}}/2$ und für die Zinsen die etwas aufwendigere Formel

$$Z_j = 0 \qquad \text{für } j = 0, 1, 3,$$
$$Z_j = (R_{j-2} + R_{j-1}) \cdot i_{\text{eff}}/2 \qquad \text{für } j = 2, 4.$$

Im Zahlenbeispiel errechnen sich für die Finanzierung $\mathbf{D} = -\mathbf{X}$ auf dem Kreditkonto bei gegebenen halbjährlichen „Annuitäten“ (Rückzahlungsraten des Kreditnehmers)

$$A_j = -D_j = X_j$$

und einem Startwert für den Effektivzinssatz i_{eff} die weiteren Tilgungsrechnungsgrößen:

$$T_j = A_j - Z_j \qquad \text{für } j = 0, \ldots, 4,$$
$$R_j = R_{j-1} - T_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, 4.$$

Den tatsächlichen Effektivzinssatz i_{eff} erhält man als Lösung der Gleichung $R_n(i_{\text{eff}}) = 0$. Die Bestimmung dieser Lösung kann beispielsweise mit der Zielwertsuche (im Menüpunkt ‚Was-wäre-wenn-Analyse‘ des Menüs ‚Daten‘) des Programms Excel von Microsoft Office erfolgen. Die Rechnung ergibt den Effektivzinssatz $i_{\text{eff}} = 10{,}675\%$, den Tilgungsvektor

$$\mathbf{T} = (-94.000;3.500;-6.347{,}98;3.500;93.347{,}98)^{\mathsf{T}}$$

und den Restschuldenvektor

$$\mathbf{R} = (94.000;90.500;96.847{,}98;93.347{,}98;0)^{\mathsf{T}}.$$

Bei Kenntnis des Tilgungsratenvektors **T** erhält man für die unbekannten Parameter λ_j und den unbekannten Effektivzinssatz $i := i_{\text{eff,Refi}}$ der Refinanzierung **S** die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{S}_S^1 + \lambda_2 \mathbf{S}_H^2 + \lambda_3 \mathbf{S}_S^3 + \lambda_4 \mathbf{S}_S^4 + \mathbf{Z}(i, \tilde{\mathbf{R}}) = -\mathbf{T}.$$

Für die Zahlungszeitpunkte $j = 0,1,\ldots,4$ ergeben sich die linearen Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{llllll}
+\lambda_1 \cdot 103 & -\lambda_2 \cdot 100 & +\lambda_3 \cdot 104 & +\lambda_4 \cdot 100 & & = +94.000{,}00; \\
-\lambda_1 \cdot 108 & +\lambda_2 \cdot 0 & -\lambda_3 \cdot 9 & +\lambda_4 \cdot 0 & & = -3.500{,}00; \\
+\lambda_1 \cdot 0 & +\lambda_2 \cdot 108{,}5 & +\lambda_3 \cdot 0 & -\lambda_4 \cdot 9{,}3 & +(94.000 + 90.500) \cdot i/2 & = +6.347{,}98; \\
+\lambda_1 \cdot 0 & +\lambda_2 \cdot 0 & -\lambda_3 \cdot 109 & +\lambda_4 \cdot 0 & & = -3.500{,}00; \\
+\lambda_1 \cdot 0 & +\lambda_2 \cdot 0 & +\lambda_3 \cdot 0 & -\lambda_4 \cdot 109{,}3 & +(96.847{,}98+93.347{,}98) \cdot i/2 & = -93.347{,}98.
\end{array}$$

Durch Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man einen Effektivzinssatz

$$i_{\text{eff,Refi}} = i = 9{,}336\%$$

und die Parameter

$$\lambda_1 = 29{,}732;\ \lambda_2 = 59{,}298;\ \lambda_3 = 32{,}110;\ \lambda_4 = 935{,}28;$$

die Refinanzierung

$$\mathbf{S} = (94.000;-3.500;-2.264{,}27;-3.5009;-102.226{,}10)^{\mathrm{T}}$$

und einen Margenzahlungsstrom

$$\mathbf{V} = \mathbf{X} + \mathbf{S} = (0;0;1.235{,}73;0;1.273{,}90)^{\mathrm{T}}.$$

Bei der Methode PAngV 1985 treten also von Null verschiedene Margen (Konditionsbeiträge) nur zu den Zinsverrechnungszeitpunkten $j = 2$ und $j = 4$ (Halbjahre) auf.

In einer zweiten Rechnung kommt die AIBD-Methode zum Einsatz. Diese Methode ist benannt nach der 1969 gegründeten internationalen Rentenhändlervereinigung (AIBD = Association of international bond dealers, ab Januar 1992 umbenannt in ISMA = International Securities Market Association und ab Juli 2005 in ICMA = International Capital Market Association) und wird ab 1. September 2000 auch in der **PAngV 2000** verwendet. Eine ausführliche Darstellung der Methoden PAngV 1985 und PAngV 2000 mit Beispielen findet man bei Kruschwitz (2006), S. 202–207, 216f.
Es wird jetzt jeder Zahlungszeitpunkt auch als Zinsverrechnungszeitpunkt genommen. Für jeden Zinszeitraum wird zur Aufzinsung die exponentielle Zinsfaktorfunktion $q(t) = q^t = (1 + i)^t$ verwendet. Da der Effektivzinssatz $i = i_{\mathrm{eff}}$ sich auf ein Zinsjahr bezieht, ist im unterjährigen Bereich das Zeitintervall als Jahresanteil zu berechnen: Bei der anzuwendenden Berechnungsmethode wird dabei das Jahr zu 365 Tagen angesetzt. Ein Monat wird als 1/12 Jahr (= 30,416 Tage) und innerhalb eines Monats werden x Tage als x/365 Jahr gerechnet. Für das Zahlenbeispiel werden als Ergebnisse der kapitaleinsatzkongruenten Refinanzierung mit der AIBD-Methode für das Aktivgeschäft **X** der Effektivzinssatz $i_{\mathrm{eff}} = 10{,}670\%$ und für die Refinanzierung $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X})$ der Effektivzinssatz $i_{\mathrm{eff,Refi}} = 9{,}329\%$ angegeben.
Bei Verwendung der AIBD-Methode kann nun noch eine einfache Darstellung des Margenzahlungsstroms **V** mittels einer Zinsmarge angegeben werden. Dazu verwendet man bei den halbjährlichen Zahlungen des Beispiels den zum jährlichen Effektivzinssatz i_{eff} von **X** gehörigen konformen halbjährlichen Zinssatz $i^* = \sqrt{1+i_{\mathrm{eff}}} - 1$. Analog sei i^*_{Refi} der zum Effektivzinssatz $i_{\mathrm{eff,Refi}}$ gehörige konforme halbjährliche Zinssatz der Refinanzierung **S**. Für den Margenzahlungsstrom erhält man dann die Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \mathbf{X} + \mathbf{S}\\ &= i^* \cdot \tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{T} - i^*_{\mathrm{Refi}} \cdot \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{T}\\ &= (i^* - i^*_{\mathrm{Refi}}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}\\ &= v(\mathbf{X}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{X})\end{aligned}$$

mit der Zinsmarge $v(\mathbf{X}) = i^* - i^*_{\mathrm{Refi}}$ als Unterschied des halbjährlichen Zinssatzes i^* des Kundengeschäfts **X** zum halbjährlichen Zinssatz i^*_{Refi} der Refinanzierung $\mathbf{S}(\mathbf{X})$. Für das Zahlenbeispiel ergeben sich $i^* = 5{,}200\%$, $i^*_{\mathrm{Refi}} = 4{,}561\%$ und die halbjährliche Zinsmarge $v(\mathbf{X}) = 0{,}639\%$. Da hier neben der Zinsmarge $v(\mathbf{X})$ aber auch der Restschuldenvektor $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{X})$ von **X** abhängt, lässt sich die kapitaleinsatzkongruente Margenkalkulation nicht als Replizierung mit einer der in Kapitel 5 beschriebenen und von **X** unabhängigen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ beschreiben.

Beim Einsatz der AIBD-Methode lässt sich auch noch eine einfache Bedingung für die Existenz einer *eindeutigen* kapitaleinsatzkongruenten Refinanzierung $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ angeben. Das für die Berechnung der Refinanzierung zu lösende lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \mathbf{S}_{H/S}^{j} + i^* \tilde{\mathbf{R}} = -\mathbf{T}$$

für die unbekannten Variablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und i^* besitzt genau dann eine einzige Lösung, wenn die Matrix

$$(\mathbf{S}_{H,S}^{1}, \ldots, \mathbf{S}_{H,S}^{n}, \tilde{\mathbf{R}}) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

regulär ist, also den Rang n+1 besitzt. Dies bedeutet, dass die n auszuwählenden Gegengeschäfte $\mathbf{S}_{H,S}^{j}$ (j = 1,…,n) linear unabhängig sein müssen und auch noch der Restschuldenvektor $\tilde{\mathbf{R}}$ von diesen Gegengeschäften linear unabhängig sein muss.

3.4.4 Replizierung bei Eisenführ mit der Endentnahme

Franz Eisenführ[9] (1993), S. 118, beurteilt den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (-1.000;500;700;500;300)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^5$$

einer Investition unter Berücksichtigung eines Liquiditätsvektors

$$\mathbf{G} = (300;-200;-200;-100;0)^{\mathsf{T}},$$

nach dem Konzept der Replizierung mit der individuellen Zielsetzung der Endwertmaximierung (Endentnahme) und damit mit der Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,0,0,0,\mu)^{\mathsf{T}}.$$

Ein mit zu verrechnender Basiszahlungsstrom **B** wird nicht berücksichtigt: **B** = **O**. Als Ergänzungsgeschäfte wählt er einperiodische Kredite und Anlagen mit den Sollzinssätzen i_{jS} und den Habenzinssätzen i_{jH} für die Zeitintervalle [j-1,j]:

j	1	2	3	4
i_{jS}	12%	13%	13%	13%
i_{jH}	7%	8%	8%	8%

Im Beispiel wird auch der Fall miterfasst, dass Ergänzungsgeschäfte nicht immer unbeschränkt zur Verfügung stehen. Dazu wird als Hintergrund eine „Liquiditätsposition G_j im Basisfall“ angegeben, die man als Kontostand eines Girokontos mit den oben angegebenen Soll- und Habenzinssätzen ansehen kann. Auf diese Weise sind im begrenzten Umfang auch Kreditaufnahmen zum niedrigeren Habenzinssatz und Geldanlagen zum höheren Sollzinssatz möglich. So ist beispielsweise im Zeitpunkt j = 0 mit der Liquiditätsposition G_0 = 300 als Ergänzungsfinanzierung auch die Auf-

9 Franz Eisenführ (1936–) war Professor der Betriebswirtschaftslehre an den Universitäten Aachen und Köln.

lösung einer Finanzanlage zum Habenzinssatz i_{1H} = 7% in der maximalen Höhe von 300 möglich. Diese muss aber zum Zeitpunkt j = 1 samt Habenzinsen wieder auf das Anlagekonto zurückgezahlt werden und steht für die weiteren Zeitpunkte nicht mehr zur Verfügung. Zum Zeitpunkt j = 2 kommt auch eine Finanzanlage in Höhe von 16,35 (≤ 200) zum Sollzinssatz i_{3S} = 13% zum Einsatz, die zum Zeitpunkt j = 3 verzinst wieder aufzulösen ist.

Die Replizierung von **X**,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{X})),$$

(**B** = **U** = **O**) erhält man mit dem Ergänzungsgeschäft

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{X}) &= (300;-300\cdot 1{,}07;0;0{,}0)^{\mathsf{T}} + (700;-700\cdot 1{,}12;0;0{,}0)^{\mathsf{T}}\\ &\quad + (0;605;-605\cdot 1{,}13;0;0)^{\mathsf{T}}\\ &\quad + (0;0;-16{,}35;16{,}35\cdot 1{,}13;0)^{\mathsf{T}}\\ &\quad + (0;0;0;-100;100\cdot 1{,}13)^{\mathsf{T}}\\ &\quad + (0;0;0;-418{,}48;418{,}48\cdot 1{,}08)^{\mathsf{T}}\\ &= (1.000;-500;-700;-500;564{,}96)^{\mathsf{T}},\end{aligned}$$

dem Margenzahlungsstrom

$$\hat{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = (0;0;0;0;864{,}96)^{\mathsf{T}}$$

und dem Endwert

$$\nu(\mathbf{X}) = 300 + 564{,}96 = 864{,}96.$$

Zu beachten ist, dass das hier zum Einsatz kommende System von Ergänzungsgeschäften komplizierter ist als die in den Kapiteln 5 und 8 beschriebenen Supplementsysteme, bei denen zu jedem Zeitpunkt nur ein Supplement vom Supplementsystem verwendet werden darf und für welche die Existenz und Einzigkeit der Replizierung gesichert ist.

3.4.5 Duplizierung bei Uhlir und Steiner mit der Sofortentnahme

Helmut Uhlir und Peter Steiner[10] (1994), S. 34–37, wollen die beiden zweijährigen Kuponanleihen

$$\mathbf{X} = (-102{,}50;11{,}00;111{,}00)^{\mathsf{T}},$$
$$\mathbf{Y} = (-96{,}00;7{,}00;107{,}00)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3,$$

die nicht direkt vergleichbar sind, mit dem Konzept der Duplizierung und der Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0,0)^{\mathsf{T}}$$

der Sofortentnahme vergleichen. Für die Duplizierung von **X**,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \text{ bzw.}$$
$$\mathbf{X} - \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})),$$

wird als Ergänzungsgeschäft eine Konuskombination (nichtnegative Linearkombination) der zweijährigen Anleihe **Y** und der einjährigen Anleihe

$$\mathbf{Z} = (-100{,}00;109{,}00;0{,}00)^{\mathsf{T}}$$

10 Helmut Uhlir war Professor an den Universitäten Wien und Graz, Peter Steiner (1937–) Professor an der Universität Graz.

verwendet. Damit erhält man das Kapitalmarktgeschäft

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{X}) &= \mathbf{Y}\cdot 111/107 + \mathbf{Z}\cdot 3{,}7383/109\\ &= (-99{,}5888;7{,}2617;111{,}0000)^{\mathsf{T}} +\\ &\quad\ (-3{,}4296;3{,}7383;0{,}0000)^{\mathsf{T}}\\ &= (-103{,}0184;11{,}0000;111{,}0000)^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

und den Margenzahlungsstrom

$$\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \mathbf{S}(\mathbf{X}) = (+0{,}5184;0{,}00;0{,}00)^{\mathsf{T}} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}.$$

Damit erweist sich die Anleihe **X** vorteilhafter als das Portfolio (der Wertpapierbestand) **S**(**X**) aus **Y** und **Z**.

In einer zweiten Rechnung erfolgt die Duplizierung von **Y**,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{Y} - \mathbf{S}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})),$$

wobei als Ergänzungsgeschäft **S**(**Y**) jetzt eine Konuskombination der Kapitalmarktgeschäfte **X** und **- Z** genommen wird. Hier wird vorausgesetzt, dass die Anleihe **Z** zum gleichen Preis gekauft und verkauft werden kann und somit neben der Anleihe **Z** auch **- Z** als Finanzierung auf dem Kapitalmarkt zur Verfügung steht. Die Rechnung liefert das Kapitalmarktgeschäft

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{X}\cdot 107/111 + (-\mathbf{Z})\cdot(-3{,}6036)/(-109)\\ &= (-95{,}5002;7{,}0000;107{,}0000)^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

und den Margenzahlungsstrom

$$\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{Y} - \mathbf{S}(\mathbf{Y}) = (-0{,}4997;0{,}0000;0{,}0000)^{\mathsf{T}} \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}.$$

Damit ist die Anleihe **Y** unvorteilhafter als das Portfolio **S**(**Y**) aus **X** und **-Z**. Es ist hier aber noch kein Vergleich der beiden Anleihen **X** und **Y** gelungen. Es fehlt noch der in Kapitel 5 dargestellte Schritt zur Auswahl eines für **X** und **Y** gleichen Supplementsystems *L*, mit dem eine eindeutige Duplizierung möglich ist.

3.4.6 Replizierung bei Sievi mit der Sofortentnahme

Christian Sievi[11] (1995), S. 77–85, rechnet ein Beispiel, in dem die Bank an einen Bankkunden ein Darlehen mit der Laufzeit von $n = 4$ Halbjahren und halbjährlicher Tilgungs- und Zinsverrechnung vergibt. Der Zahlungsstrom des Aktivgeschäfts ist

$$\mathbf{X} = (0;-95.000{,}00;8.000{,}00;8.000{,}00;92.545{,}50)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^5.$$

Die Refinanzierung erfolgt mit Kassageschäften vom Interbankenmarkt, nämlich für unterjährige Fristen mit Termingeldern und für Fristen über einem Jahr mit Wertpapieren mit jährlicher Zinszahlung:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_H^1 &= (-100;102{,}7;0;0;0)^{\mathsf{T}},\\ \mathbf{S}_S^2 &= (100;0;-106;0;0)^{\mathsf{T}},\\ \mathbf{S}_S^3 &= (103{,}225;-6{,}45;0;-106{,}45;0)^{\mathsf{T}},\\ \mathbf{S}_S^4 &= (100;0;-7;0;-107)^{\mathsf{T}}.\end{aligned}$$

[11] Christian Sievi (1948–) ist ein deutscher freiberuflich tätiger Wirtschaftsmathematiker.

Als Zielsetzung der Beurteilung wird ein Margenzahlungsstrom

$$\mathbf{W}(v) = \bar{\mathbf{V}}(v) = (v,0,0,0,0)^\mathsf{T}$$

mit der Sofortentnahme $\bar{V}_0 = v$ bei $t = 0$ gewählt. Die Verwendung des Margenzahlungsstrom der Sofortentnahme wird bei Sievi (1995), S. 78, als „Südseemodell" bezeichnet, da im Zeitraum $[1,n]$ die Zahlungen der beiden Geschäftspartner ausgeglichen sind, die gesamte Marge sofort zum Zeitpunkt $t = 0$ entnommen und beispielsweise für eine Reise in die Südsee verwendet werden kann.
Für die Replizierung

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X})),$$

($\mathbf{B} = \mathbf{U} = \mathbf{O}$) des Kundengeschäfts $\mathbf{X}$ berechnet er das Gegengeschäft

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{X}) \;=\;& (100;0;7;0;-107)^\mathsf{T}\cdot 92.545{,}50/107\ + \\ & (103{,}225;-6{,}45;0;-106{,}45)^\mathsf{T}\cdot 8.000{,}00/106{,}45\ + \\ & (100;0;-106;0;0)^\mathsf{T}\cdot 1.945{,}62/106\ + \\ & (-100;102{,}7;0;0;0)^\mathsf{T}\cdot 95.484{,}73/102{,}7 \\ =\;& (3.109{,}82;95.000{,}00;-8.000{,}00;-8.000{,}00;-92.545{,}59)^\mathsf{T},\end{aligned}$$

den Margenzahlungsstrom

$$\bar{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = (3.109{,}82;0;0;0;0)^\mathsf{T}$$

und für die Sofortentnahme den „Margenbarwert"

$$v(\mathbf{X}) = 3.109{,}82 > 0.$$

Dieser Margenbarwert wird zur Bewertung des Aktivgeschäfts $\mathbf{X}$ der Bank verwendet.

3.4.7 Replizierung bei Grob mit der Endentnahme, der Sofortentnahme und der Annuitätenmethode

Heinz Lothar Grob[12] (1999) verwendet bei der VOFI-Methode, der „expliziten bzw. sogenannten vollständigen Finanzplanung" bzw. „finanzplanorientierten Investitionsrechnung" das Konzept der Replizierung. Mit Ausnahme von drei Rechenbeispielen (in seinem Buch auf S. 132, 139, 147) bezieht er das zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Verfügung stehende Eigenkapital $B_0 = 9.000$ und damit den Basiszahlungsstrom

$$\mathbf{B} = (B_0,0,0,0,0,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^6$$

mit in die Glattstellung ein:

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})).$$

Für die Zielsetzung des Entscheiders verwendet er verschiedene Beurteilungskurven, beispielsweise auf S. 93 die Beurteilungskurve der Endentnahme

$$\mathbf{W}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,0,0,0,0,\mu)^\mathsf{T},$$

auf S. 103 die Beurteilungskurve der Sofortentnahme

[12] Heinz Lothar Grob (1943–) ist ein deutscher Wirtschaftsinformatiker und war Professor für Wirtschaftsinformatik und Controlling an der Universität Münster.

$$\mathbf{W}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0,0,0,0,0)^{\mathsf{T}}$$

und auf S. 106 die Beurteilungskurve der Annuitätenmethode

$$\mathbf{W}(\mu) = \tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot(0,1,1,1,1,1)^{\mathsf{T}}.$$

Für die Replizierung des Zahlungsstroms

$$\mathbf{X} = (-18.000;-4.000;3.200;19.040;5.972;3.785)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^6,$$

einer Investition mit der Laufzeit von $n = 5$ Jahren, und des Zahlungsstroms

$$\mathbf{O} = (0;0;0;0;0;0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^6$$

der konkurrierenden Unterlassungsalternative jeweils unter Berücksichtigung des Basiszahlungsstroms **B** verwendet er auf S. 92f die Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu)$ der Endentnahme und die folgenden Ergänzungsgeschäfte vom Kapitalmarkt:

- Nur zum Zeitpunkt $t = 0$ ist ein Kredit **F** aufnehmbar mit der Laufzeit $m = 2$, einem Disagio von $d = 10\%$ und einem jährlichen Nominalzinssatz $i_F = 6\%$, also mit der Zahlungsstromstruktur
$$\mathbf{F} = (90;-6;-106;0;0;0)^{\mathsf{T}},$$
aber mit der maximalen effektiven Kredithöhe 4.500.
- Zu jedem Zeitpunkt $t = 0,\ldots,4$ steht ein Kontokorrentkredit ohne Kreditlimit zur Verfügung für das Zeitintervall $[t,t+m]$, mit der Laufzeit m, $t + m \leq 5$, dem (Nominal-)Zinssatz $i_S = 13\%$ und jährlicher Zinsverrechnung, also der Zahlungsstromstruktur
$$\mathbf{F}^m = (0;..;0;100;-13;..;-13;-113;0;..;0)^{\mathsf{T}}.$$
- Zu jedem Zeitpunkt $t = 0,\ldots,4$ ist eine Geldanlage in unbegrenzter Höhe möglich für das Zeitintervall $[t,t+m]$, mit der Laufzeit m, $t + m \leq 5$, dem (Nominal-)Zinssatz $i_H = 8\%$ und jährlicher Zinsverrechnung, also der Zahlungsstromstruktur
$$\mathbf{I}^m = (0;..;0;-100;8;..;8;108;0;..;0)^{\mathsf{T}}.$$

Damit errechnet er die Endwerte $v(\mathbf{X}) = 15.697$ und $v(\mathbf{O}) = 13.224$, so dass die Investition **X** günstiger als die Unterlassungsalternative **O** angesehen wird.
Da hierbei zum Zeitpunkt $t = 0$ zwei Ergänzungsgeschäfte zum Einsatz kommen, nämlich ein zweijähriges Darlehen

$$\mathbf{F}' = 50\cdot\mathbf{F} = (4.500;-300;-5.300;0;0;0)^{\mathsf{T}}$$

und ein dreijähriger Kontokorrentkredit

$$\mathbf{F}'' = 45\cdot\mathbf{F}^3 = (4.500;-585;-585;-5.085;0;0)^{\mathsf{T}},$$

ist das hier zum Einsatz kommende System von Ergänzungsgeschäften etwas komplizierter als die in den Kapiteln 5 und 8 beschriebenen Supplementsysteme, bei denen zu jedem Zeitpunkt nur ein Supplement aus der zulässigen Supplementmenge verwendet werden darf.

4 Bewertung sicherer Zahlungsströme auf vollkommenem Kapitalmarkt

Es werden Voraussetzungen für den Kapitalmarkt (Finanzmarkt) und die Beurteilungskurve des Entscheiders gesucht, unter denen der Vergleich und die Bewertung von Zahlungsströmen nach den Konzepten der Duplizierung bzw. der Replizierung möglich ist. Zunächst wird der einfachere Fall mit einem sogenannten vollkommenen Kapitalmarkt und mit sicheren (zufallsunabhängigen, deterministischen) Zahlungsströmen behandelt. Eine allgemeinere und realistischere Bewertung erfolgt dann im Kapitel 5 für sichere Zahlungsströme und einen unvollkommenen Kapitalmarkt und im Buch ‚Diskrete stochastische Finanzmathematik' für zufallsabhängige (unsichere, stochastische) Zahlungsströme und einen vollkommenen Kapitalmarkt. Die Annahmen für einen vollkommenen Kapitalmarkt sind die theoretischen Grundlagen für viele Modelle der Finanzierungstheorie wie zum Beispiel das Capital Asset Pricing Model (CAPM) und die Arbitrage Pricing Theory (APT). Eine ausführlichere Beschreibung der idealisierenden Annahmen findet man beispielsweise bei Kruschwitz (1999), S. 39, 64, 140f, und in Büchern der Stochastischen Finanzmathematik wie z. B. Korn und Korn (1999), S. 66, Hausmann et al. (2002), S. 27f, 39, 73, 132, 198f, 411, Kremer (2006), S. 6, Deck (2006), S. 8f, Trautmann (2007), S. 7–15, Deutsch (2008), S. 59–61, Kallsen (2009), S. 35, Sandmann (2010), S. 20ff, 200, Rudolph und Schäfer (2010), S. 207f, 239, Reitz (2011), S.73f., Hull (2012), S. 144, Korn (2014), S. 103, Bäuerle und Rieder (2017), S. 4f.
Sie sollen hier nur kurz aufgezählt werden. Für die Marktteilnehmer werden homogene Erwartungen und rationales Verhalten vorausgesetzt. Beim Handel mit den Finanztiteln treten keine Friktionen auf, es sind keine Transaktionskosten und Steuern fällig. Die Finanztitel sind beliebig teilbar. Jeder Marktteilnehmer hat freien Zugang zum Handel in unbegrenzter Höhe und ohne Nachweis von Sicherheiten, so dass auch keine Liquiditätsengpässe auftreten. Insbesondere sind auch Leerverkäufe möglich. Durch den Wettbewerb auf dem Markt werden die Preise festgelegt und jeder Marktteilnehmer verhält sich als Mengenanpasser. Der Preis für jeden zukünftigen Zahlungsstrom ist gleich, unabhängig davon, ob er gekauft oder verkauft wird. Es gibt keine Arbitragegelegenheit[1], so dass kein Marktteilnehmer sich aus Finanztiteln einen Zahlungsstrom konstruieren kann, der einer Gelddruckmaschine gleichkommt. Darüber hinaus ist der Kapitalmarkt vollständig in dem Sinne, dass es zu festgelegter Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ auch n linear unabhängige Finanztitel gibt, so dass beliebige Rückflüsse $(X_1,\dots,X_n)^\top$ von Zahlungsströmen $\mathbf{X} = (X_0,X_1,\dots,X_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$ durch diese Kapitalmarktgeschäfte exakt duplizierbar sind.

[1] Das Wort Arbitrage kommt vom französischen arbitrage für Schiedsspruch und vom lateinischen arbitratus für freie Wahl, Belieben, Ermessen und wird als wirtschaftlicher Begriff für das Ausnutzen von Preisunterschieden für gleiche Waren auf verschiedenen Märkten verwendet.

Nachfolgend werden nun zunächst diejenigen mathematischen Eigenschaften der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte eines vollkommenen Kapitalmarkts zusammengestellt, die für den Nachweis der Existenz und der Einzigkeit der Duplizierung bzw. der Replizierung eines beliebigen deterministischen Zahlungsstroms mit Kapitalmarktgeschäften verwendet werden. Im Anschluss daran wird gezeigt, wie aus einer Basis der Hyperebene der Kapitalmarktgeschäfte in Gestalt des Normalenvektors der Preisvektor des vollkommenen Kapitalmarkts und mit diesem die Duplizierung bzw. die Replizierung der Zahlungsströme berechnet werden kann. Weiter wird begründet, dass die mit den Konzepten der Duplizierung bzw. Replizierung definierten Präferenzordnungen auf dem arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkt nur eine einzige Präferenzordnung liefern.

4.1 Mathematische Anforderungen an Kapitalmarkt und Beurteilungskurve

4.1.1 Vektorunterraum-Eigenschaft des Kapitalmarkts

Der Betrachtungs- und Planungshorizont des Entscheiders wird eingeschränkt auf eine Laufzeit von n Jahren ($n \in \mathbb{N}$). Somit werden nur die zeitdiskreten deterministischen Zahlungsströme

$$\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

mit jeweils maximaler Laufzeit m ($0 \le m \le n$, $X_j = 0$ für $j = m+1,\ldots,n$) betrachtet. In diesem Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ der Zahlungsströme soll ein Kapitalmarkt existieren, so dass also mindestens ein nichttriviales Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{S} = (S_0,S_1,\ldots,S_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbf{S} \neq \mathbf{O} = (0,0,\ldots,0)^\mathsf{T}$ existiert. Mit zwei Kapitalmarktgeschäften $\mathbf{S}$ und $\mathbf{R}$ soll auch deren Kombination (Summe) $\mathbf{S} + \mathbf{R}$ zur Menge K der Kapitalmarktgeschäfte gehören. Mit einem $\mathbf{S} \in K$ soll auch jedes nichtnegative reellwertige Vielfache $\lambda\mathbf{S}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \ge 0$) zu K gehören. Obwohl in der Praxis Kredite als Vielfache von Zehn- oder Hunderttausend Euro aufgenommen werden und stets eine kleinste Währungseinheit von z. B. 1 Eurocent auftritt und daher die Zahlungen X_j ganzzahlige Vielfache dieser Einheit sind, werden zur Vereinfachung der Untersuchung für den Faktor λ reelle Zahlen zugelassen. Die Finanztitel $\mathbf{S} \in K$ sind also beliebig teilbar ($0 < \lambda < 1$ beliebig) und von beliebig großem Umfang (λ kann beliebig groß sein). Für die Geldanlagen $\mathbf{S}$ ($S_0 < 0$) und die Kreditaufnahmen $\mathbf{S}$ ($S_0 > 0$) auf dem Kapitalmarkt gibt es keine Einschränkung des Umfangs, also keine Beschränkung (Limitierung) der Anlagesumme $|S_0|$ bzw. der Kredithöhe S_0. Damit sind alle Konuskombinationen (konischen Kombinationen, nichtnegativen linearen Kombinationen) von Kapitalmarktgeschäften ebenfalls Kapitalmarktgeschäfte (cone $K = K$) und die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte ist ein konvexer linearer Kegel. Ausführlichere Betrachtungen zur konvexen Geometrie findet man im Abschnitt 8.2.

Auf einem **vollkommenen Kapitalmarkt** ist darüber hinaus mit einem $\mathbf{S} \in K$ auch der umgekehrte Zahlungsstrom $\mathbf{R} := -\mathbf{S}$ ein Kapitalmarktgeschäft. Die Kapitalmarktgeschäfte **S** sind also in der Menge K aller Kapitalmarktgeschäfte umkehrbar. Beim Kauf der im Zeitraum $[1,n]$ liegenden Rückflüsse $S_1, \ldots, S_n$ des Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S} \in K$ mit $S_0 < 0$ wird auf dem Kapitalmarkt zum Zeitpunkt $j = 0$ der Preis $|S_0|$ gezahlt bzw. ergibt sich für den Erwerber die Zahlung S_0 (< 0) als Auszahlung. Beim Verkauf dieser Rückflüsse S_j bzw. beim Erwerb der umgekehrten Rückflüsse $R_j = - S_j$ ($j = 1,\ldots,n$) wird auf einem vollkommenen Kapitalmarkt der gleiche Preis $R_0 = |S_0|$ wie beim Kauf erzielt, so dass sich für den Verkäufer zum Zeitpunkt $j = 0$ die Zahlung $R_0 = - S_0 > 0$ als Einzahlung und im gesamten Zeitraum $[0,n]$ der Zahlungsstrom $\mathbf{R} = - \mathbf{S}$ ergibt. Falls das Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{S} \in K$ einen internen Zinssatz $i \in \mathbb{R}$ bzw. einen internen Zinsfaktor $q = 1 + i \in \mathbb{R}$ besitzt,

$$S_0q^n + S_1q^{n-1} +\ldots+ S_n = 0,$$

so besitzt auch das umgekehrte Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{R} = - \mathbf{S}$ denselben internen Zinssatz i und dieser ist sowohl ein Habenzinssatz i_H einer Investition **S** ($S_0 < 0$) als auch ein *S*ollzinssatz i_S einer Finanzierung **R** ($R_0 > 0$): $i = i_H = i_S$. Durch die Hinzunahme der umgekehrten Kapitalmarktgeschäfte $- \mathbf{S}$ sind damit insgesamt alle reellwertigen linearen Kombinationen von Kapitalmarktgeschäften ebenfalls Kapitalmarktgeschäfte und die Menge K, $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, hat die Vektorunterraum-Eigenschaft: $K + K \subseteq K$, $\lambda K \subseteq K$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.1.2 Hyperebenenstruktur des Kapitalmarkts

Da als sinnvoll vorausgesetzt werden kann, dass die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Kapitalmarktgeschäfte nicht gleich dem gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ aller betrachteten Zahlungsströme ist, gibt es höchstens n linear unabhängige Kapitalmarktgeschäfte. Andernfalls wäre die Dimension dim K von K gleich $n + 1$ und der Vektorunterraum (lineare Unterraum) K gleich $\mathbb{R}^{n+1}$.

Hinsichtlich der Dimension des Unterraums K wird nun gefordet, dass der Kapitalmarkt ein **vollständiger Kapitalmarkt** gemäß der Definition von Kruschwitz (1999), S. 77, ist. Es soll sich also jeder beliebige auf die Zeitpunkte $t = 1,\ldots,n$ bezogene Zahlungsanspruch $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ durch die Rückflüsse, d. h. die zum Zeitraum $[1,n]$ gehörigen Teilvektoren $\mathbf{s}^j = (S_1^j,\ldots,S_n^j)^\top \in \mathbb{R}^n$, von m Kapitalmarktgeschäften $\mathbf{S}^j = (S_0^j, S_1^j,\ldots,S_n^j)^\top = (S_0^j, \mathbf{s}^j)^\top$ exakt duplizieren, d. h. als Linearkombination darstellen lassen. Demzufolge müssen $m = n$ Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S}^1$, …, $\mathbf{S}^n$ existieren, deren Rückflüsse $\mathbf{s}^j$ linear unabhängig sind. Die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte eines vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkts ist also ein n-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$, somit eine homogene (lineare) Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$, und $S = (\mathbf{S}^1, \ldots, \mathbf{S}^n)$ eine Basis der Hyperebene K. Auch im stochastischen Fall[2] wird die Vollständigkeit bei gültigem Law of One Price dadurch charakterisiert, dass die Menge $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte eine Hyperebene der Menge $\mathcal{W}$ der zu bewertenden Zahlungsströme ist.

---

2 Die Charakterisierung der Vollständigkeit in einem stochastischen Mehrperiodenmodell erfolgt z. B. bei Pleier (2018) in Abschnitt 3.5.

4.1.3 Arbitragefreiheit und Existenz eines positiven Normalenvektors

Für einen vollkommenen Kapitalmarkt wird zusätzlich noch die **Arbitragefreiheit** gefordert. Es gibt auf dem Kapitalmarkt kein Geschäft **S** mit $S_0 > 0$ und $S_j \geq 0$ für $j = 1,\ldots,n$, also kein „free lunch“, kein „Essen ohne anschließende Bezahlung“. Ebenso gibt es kein Geschäft $\mathbf{S} \in K$ mit der Zahlung $S_k > 0$ für einen zukünftigen Zeitpunkt $k \in \{1,\ldots,n\}$ und $S_j \geq 0$ für $j \neq k$, also auch kein „free dinner“, kein „späteres Essen ohne vorherige oder nachfolgende Bezahlung“. Insgesamt gibt es kein Kapitalmarktgeschäft **S** mit $\mathbf{S} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$, d. h. $\mathbf{S} \geq \mathbf{O}$ und $\mathbf{S} \neq \mathbf{O}$. Die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte hat also mit dem nichtnegativen Orthanten

$$\mathbb{R}^{n+1}_{+0} = \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \geq \mathbf{O}\}$$

nur den trivialen Durchschnitt:

(AF) $$K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O = \{\mathbf{O}\}.$$

Beim vollkommenen Kapitalmarkt hat der Vektorunterraum K auch noch mit dem nichtpositiven Orthanten $\mathbb{R}^{n+1}_{-0} = -\, \mathbb{R}^{n+1}_{+0}$ nur den trivialen Durchschnitt. Daher haben alle nichttrivialen Kapitalmarktgeschäfte einen Vorzeichenwechsel im Zahlungsstrom.

Nach dem im Anhang 8.2 bewiesenen Satz 8.2.3 b) bzw. Zusatz 8.2.4 über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel gibt es zur Hyperebene K einen (strikt) **positiven Normalenvektor** $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\exists\, \mathbf{P} \in K^{\perp} \text{ mit } \mathbf{P} > \mathbf{O},$$

d. h. $\mathbf{P} = (P_0,\ldots,P_n)^{\mathsf{T}}$ mit $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} = 0$ für alle $\mathbf{S} \in K$ und $P_j > 0$ für $j = 0,\ldots,n$. Der diesem Satz entsprechende Alternativsatz über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen ist als Satz von Stiemke (1892–1915) bekannt, dessen inhomogene Version im engen Zusammenhang mit dem Minkowski-Farkas-Lemma steht. Der Vergleich der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma wird in Abschnitt 8.2.3.5 dargestellt.

Die Existenz eines positiven Normalenvektors **P** für K spielt eine entscheidende Rolle bei der Untersuchung der Vielfalt der Präferenzordnungen, die nach den Konzepten der Duplizierung und Replizierung konstruiert werden.

Es ist also K das orthogonale Komplement der linearen Hülle

$$[\mathbf{P}] = \operatorname{lin}\{\mathbf{P}\} = \{\mathbf{X} = \lambda\mathbf{P} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

des positiven Vektors **P**,

$$K = [\mathbf{P}]^{\perp} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0\} = H_{\mathbf{P},0},$$

und das orthogonale Komplement $K^{\perp} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} = 0 \;\forall\; \mathbf{S} \in K\}$ von K ist gleich der linearen Hülle von **P**:

$$K^{\perp} = [\mathbf{P}].$$

Eine grafische Darstellung der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte und eines Normalenvektors **P** ist für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ in Abbildung 4.1 angegeben.

Ein Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist genau dann ein Kapitalmarktgeschäft, wenn die lineare Gleichung $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0$ erfüllt ist:

$$\mathbf{X} \in K = H_{\mathbf{P},0} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0.$$

Für die **Berechnung des Normalenvektors** $\mathbf{P} \in K^{\perp}$ können n beliebige linear unabhängige Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S}^1, \ldots, \mathbf{S}^n \in K$ als Spaltenvektoren zur Matrix

$$S = (\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$$

zusammengefasst werden. Da der Rang der Matrix S gleich n ist, kann $\mathbf{P}$ als die nichttriviale Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}} S = \mathbf{O}^{\mathsf{T}} \text{ bzw. } S^{\mathsf{T}}\mathbf{P} = \mathbf{O}$$

mit einem beliebig vorgegebenen $P_0 > 0$ bestimmt werden. Als Rechenverfahren kann das Gaußsche Eliminationsverfahren verwendet werden. Dabei kann einige Rechenarbeit gespart werden, wenn die Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S}^m$ jeweils genau die Laufzeit m aufweisen: $S_j^m = 0$ für $j > m$, $S_0^m \neq 0$, $S_m^m \neq 0$. Die zugehörige Matrix S hat dann nämlich schon eine „obere Dreiecksgestalt“, eine Spaltenstufenform. Die Matrix S hat keine exakte Dreiecksgestalt, da sie keine quadratische Matrix, sondern eine $(n+1)\times n$-Matrix ist. Der Normalenvektor $\mathbf{P}$ kann dann in einfacher Weise nach Vorgabe von $P_0 > 0$ sukzessive für $m = 1,\ldots,n$ aus der m-ten Gleichung $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}^m = 0$ bzw.

$$P_m = -\,(P_0 S_0^m + \ldots + P_{m-1} S_{m-1}^m) / S_0^m$$

bestimmt werden. Mit dem Softwaresystem Mathematica von Wolfram Research kann das Gleichungssystem unter Verwendung der Funktion NSolve gelöst werden. Im nächsten Abschnitt wird begründet, dass der Normalenvektor $\mathbf{P}$ der Hyperebene K bis auf ein positives Vielfaches mit dem Preisvektor $\acute{\mathbf{P}}$ der sogenannten reinen (elementaren, primitiven) Wertpapiere übereinstimmt und daher wie dieser auch als **Preisvektor** des vollkommenen Kapitalmarkts bezeichnet werden kann.

$n = 1$: $n = 2$:

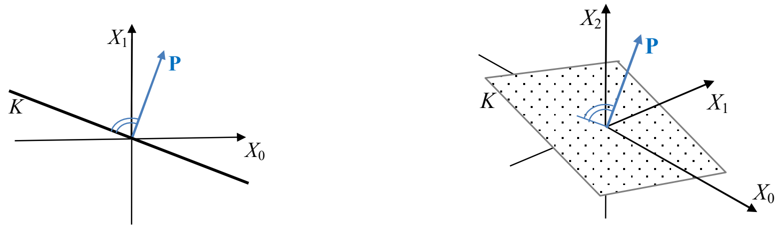


Abb. 4.1 Die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte des vollkommenen Kapitalmarkts als homogene Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit positivem Preisvektor $\mathbf{P}$ für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$

4.1.4 Existenz spezieller Systeme von Kapitalmarktgeschäften

Aus der Existenz eines positiven Normalenvektors der Hyperebene K ergibt sich, dass auf dem vollkommenen Kapitalmarkt auch spezielle Kapitalmarktgeschäfte mit besonders einfacher Zahlungsstromstruktur existieren. Es sind dies einmal die **einperiodischen Termingeschäfte** (Forwardgeschäfte)

$$\mathbf{T}^j = (0,\ldots,0,-1,+q_j,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} = -\,\mathbf{e}_j + q_j\mathbf{e}_{j+1}$$

($T_{j-1}^j = -1$, $T_j^j = q_j$, $T_k^j = 0$ für $k \neq j-1, j$) mit dem j-ten und $(j+1)$-ten Standardbasisvektor $\mathbf{e}_j$ bzw. $\mathbf{e}_{j+1}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ und den eindeutig bestimmten einperiodischen Terminzinsfaktoren (einperiodischen Forwardzinsfaktoren $q_j := q_{j-1,j}$ des Intervalls $[j\text{-}1,j]$, englisch: one-period forward rates)

$$q_j = P_{j-1}/P_j \qquad (j = 1,\ldots,n).$$

Es ist nämlich genau dann $\mathbf{T}^j \in K = [\mathbf{P}]^\perp$, wenn

$$0 = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T}^j = -\,P_{j-1} + q_jP_j$$

bzw. $q_j = P_{j-1}/P_j$ ist. Das zum speziellen Index $j = 1$ gehörige Termingeschäft $\mathbf{T}^1 = (-1,+q_1,0,\ldots,0)^\mathsf{T}$ wird auch als Kassageschäft und der Terminzinsfaktor q_1 auch als Kassazinsfaktor jeweils zur Laufzeit $m = 1$ bezeichnet.
Für die Komponenten des Normalenvektors $\mathbf{P}$ erhält man nach dem Prinzip der vollständigen Induktion

$$P_j = P_{j-1}/q_j = P_0/q_1\cdot\ldots\cdot q_j \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

mit der beliebig festzulegenden Komponente $P_0 > 0$.

Des Weiteren existieren auf dem Kapitalmarkt die zum Erwerb der sogenannten deterministischen reinen Wertpapiere[3] (englisch: pure securities, elementare, primitive oder Arrow-Debreu-Papiere, benannt nach K.J. Arrow und G. Debreu; siehe Kruschwitz (1999), S. 67, 71, 73, 147)

$$\check{\mathbf{D}}^j = (0,\ldots,0,+1,0,\ldots,0)^\mathsf{T} = \mathbf{e}_{j+1}$$

gehörigen j-**periodischen Kassageschäfte** oder Diskontgeschäfte

$$\mathbf{D}^j = (-d_j,0,\ldots,0,+1,0,\ldots,0)^\mathsf{T} = -\,d_j\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{j+1} \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

($D_0^j = -\,d_j$, $D_j^j = 1$, $D_k^j = 0$ für $k \neq 0, j$) des Zeitintervalls $[0,j]$ mit der jeweiligen genauen Laufzeit j und den eindeutig bestimmten deterministischen Diskontierungsfaktoren (Abzinsungsfaktoren)

$$d_j = P_j/P_0 = 1/q_1\cdot\ldots\cdot q_j.$$

Es ist nämlich $\mathbf{D}^j \in K = [\mathbf{P}]^\perp$ genau dann, wenn

$$0 = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{D}^j = -\,d_jP_0 + P_j$$

bzw. $d_j = P_j/P_0$ ist. Die Konstante d_j ist der Preis für den j-periodischen Zahlungsanspruch $\check{\mathbf{D}}^j$, welcher zum Zeitpunkt $t = j$ den einzigen Rückfluss in Höhe von 1 Geldeinheit verbrieft. Verwendet man noch die zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörigen (heutigen) fristigkeitsabhängigen Zinssätze (Kassazinssätze, englisch: spot rates) i_{0m} und die zugehörigen Kassazinsfaktoren $q_{0m} = 1 + i_{0m}$, die während der Laufzeit (Fristigkeit) $m \in \{1,\ldots,n\}$ in den einzelnen Zinsperioden $[j\text{-}1,j]$, $j = 1,\ldots,m$, verwendet werden und die mit den Terminzinsfaktoren q_j über die Beziehung

$$q_{0m}{}^m = q_1\cdot\ldots\cdot q_m$$

zusammenhängen, so gilt für die Diskontierungsfaktoren auch

$$d_m = 1/q_{0m}{}^m.$$

Für die Komponenten des Normalenvektors $\mathbf{P}$ der Hyperebene $K = H_{\mathbf{P},0}$ gilt

$$P_j = P_0/q_1\cdot\ldots\cdot q_j = P_0/q_{0j}{}^j = P_0\cdot d_j \qquad (j = 1,\ldots,n).$$

---

[3] Die Idee der reinen Wertpapiere geht zurück auf Gérard Debreu (1921–2004) und Kenneth J. Arrow (1921–2017), weshalb diese theoretischen Wertpapiere auch Arrow-Debreu-Papiere genannt werden. Der US-amerikanische Mathematiker und Volkswirtschaftler Arrow erhielt 1972 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften und 1986 den John-von-Neumann-Theorie-Preis. Dem französischen Wirtschaftswissenschaftler Debreu wurde 1983 der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften und 1976 der französische Orden Légion d'honneur verliehen.

Definiert man noch formal den Diskontierungsfaktor

$$d_0 := 1$$

für die Laufzeit $m = 0$, so ergibt sich der Normalenvektor **P** zu

$$\mathbf{P} = P_0 \cdot (d_0, d_1, \ldots, d_n)^{\mathsf{T}} = P_0 \cdot \acute{\mathbf{P}},$$

also als ein positives Vielfaches des Diskontierungsvektors

$$\acute{\mathbf{P}} := (d_0, d_1, \ldots, d_n)^{\mathsf{T}},$$

der aus den Preisen d_j der reinen Wertpapiere $\check{\mathbf{D}}^j$ zusammengesetzt ist. Daher wird sowohl der Normalenvektor **P** als auch der durch die Hyperebene K und die Normierung $\acute{P}_0 = 1$ eindeutig bestimmte Vektor $\acute{\mathbf{P}} \in K^{\perp}$ als **Preisvektor** des vollkommenen Kapitalmarkts $K = H_{\acute{\mathbf{P}},0}$ bezeichnet.

Das Skalarprodukt eines Zahlungsstroms **X** mit dem Preisvektor **P**

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = P_0 \cdot \acute{\mathbf{P}}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = P_0 \cdot \sum_{j=0}^{n} X_j d_j = P_0 \cdot B_n(\mathbf{X})$$

ist ein positives Vielfaches des mit den Diskontierungsfaktoren $\acute{P}_j = d_j$ gebildeten Barwerts (Kapitalwert, Gegenwartswert, englisch: present value; bei Zahlungsströmen aus Einnahmen und Ausgaben, also mit Vorzeichenwechsel, auch Nettobarwert, englisch: netto present value)

$$B_n(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{n} X_j d_j$$

des Zahlungsstroms **X**. Demnach ist ein Zahlungsstrom **X** genau dann ein Kapitalmarktgeschäft des vollkommenen Kapitalmarkts, wenn sein Barwert $B_n(\mathbf{X})$ gleich Null ist:

$$\mathbf{X} \in K = H_{\acute{\mathbf{P}},0} \Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) = \acute{\mathbf{P}}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0.$$

Mit Hilfe des Preisvektors $\acute{\mathbf{P}}$ wird im unten folgenden Abschnitt 4.2 noch die Existenz der eindeutigen Replizierung bzw. Duplizierung für die Zahlungsströme des $\mathbb{R}^{n+1}$ bewiesen. Nachfolgend wird dieser durch $\acute{P}_0 = 1$ normierte Preisvektor o. E. wieder mit **P** bezeichnet.

Mit dem Preisvektor **P** kann auch noch die Existenz von weiteren speziellen Kapitalmarktgeschäften auf dem vollkommenen Kapitalmarkt nachgewiesen werden. So sind beispielsweise auch die $(n\text{-}j+1)$**-periodischen Termingeschäfte**

$$\mathbf{T}^j = -\mathbf{e}_j + \sum_{k=j}^{n} T_k^j \mathbf{e}_{k+1} = (0,..,0,-1, T_j^j, .., T_n^j)^{\mathsf{T}} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

genau dann in der Menge $K = H_{\mathbf{P},0}$ enthalten, wenn

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{T}^j = \sum_{k=j-1}^{n} d_k T_k^j = -d_{j-1} + d_j T_j^j + \ldots + d_n T_n^j = 0$$

ist. Bei der Festlegung des Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{T}^j$ können sogar $n\text{-}j$ der $n\text{-}j+1$ Komponenten $T_j^j, \ldots, T_n^j$ frei gewählt werden, wobei aber mindestens eine davon positiv sein muss (ansonsten würde der Widerspruch $0 < d_{j-1} = d_j T_j^j + \ldots + d_n T_n^j \leq 0$ folgen). Die übrig gebliebene Komponente wird mittels der Gleichung bestimmt. Wählt man beispielsweise $T_j^j > 0$, $T_{j+1}^j, \ldots, T_{n-1}^j \in \mathbb{R}$ beliebig, so ergibt sich mit der

Festlegung

$$T_n^j = [d_{j-1} - d_j T_j^j \ \ldots - d_{n-1} T_{n-1}^j]/d_n$$

ein Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{T}^j \in K$. Die oben bereits erwähnten einperiodischen Termingeschäfte $\mathbf{T}^j = - \mathbf{e}_j + q_j \mathbf{e}_{j+1}$ sind Spezialfälle mit $T_j^j = q_j$, $T_k^j = 0$ für $k = j+1,\ldots,n$.

Weiter sind auch die j**-periodischen Kassageschäfte**

$$\mathbf{K}^j = \sum_{k=0}^{j-1} K_k^j \mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{e}_{j+1} = (K_0^j, K_1^j, \ldots, K_{j-1}^j, 1, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$$

($j = 1,\ldots,n$) genau dann in $K = H_{\mathbf{P},0}$ enthalten, wenn die folgende lineare Gleichung erfüllt ist:

$$\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{K}^j = \sum_{k=0}^{j} d_k K_k^j = d_0 K_0^j + d_1 K_1^j + \ldots + d_{j-1} K_{j-1}^j + d_j = 0.$$

Bei der Festlegung von $\mathbf{K}^j$ können j-1 der j Komponenten $K_0^j, \ldots, K_{j-1}^j$ frei gewählt werden, wobei aber mindestens eine davon negativ sein muss. Die übrig gebliebene Komponente wird mittels der Gleichung bestimmt. Wählt man beispielsweise $K_0^j < 0$, $K_1^j, \ldots, K_{j-2}^j \in \mathbb{R}$ beliebig, so ergibt sich mit

$$K_{j-1}^j = [- d_j - d_0 K_0^j - d_1 K_1^j \ \ldots - d_{j-2} K_{j-2}^j]/d_{j-1}$$

ein Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{K}^j \in K$. Die oben bereits erwähnten Kassageschäfte $\mathbf{D}^j$ zum Erwerb der reinen Wertpapiere sind Spezialfälle mit $K_0^j = - d_j$, $K_1^j = \ldots = K_{j-1}^j = 0$.

Auf dem im Kapitel 5 behandelten unvollkommenen Kapitalmarkt sind derartig schöne Termingeschäfte $\mathbf{T}^j$ und Kassageschäfte $\mathbf{K}^j$ nicht automatisch vorhanden. So müssen dort erst entsprechende Kapitalmarktgeschäfte vorausgesetzt werden, mit denen geeignete Supplementsysteme für die Duplizierung und Replizierung gebildet werden können.

4.1.5 Anforderungen an die Beurteilungskurve

Um für die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Hilfe der Konzepte der Duplizierung (Nachbildung, Synthetisierung) und der Replizierung (Glattstellung) jeweils eine (n+1)-dimensionale Präferenzfunktion (Beurteilungsfunktion) zu konstruieren, wird neben dem Preisvektor $\mathbf{P}$ des vollkommenen Kapitalmarkts auch noch eine geeignete Beurteilungskurve (Präferenzkurve, Zielsetzungskurve) bereitgestellt. Die Zielsetzung des Entscheiders wird hier nämlich durch eine eindimensionale Mannigfaltigkeit beschrieben, die mit einer (Total-)Ordnung versehen ist und als Beurteilungskurve bezeichnet wird. Sie präzisiert, wie der Entscheider in Abhängigkeit von einem reellen Parameter $\mu \in J$ die bei der Duplizierung bzw. Replizierung des Zahlungsstroms auftretende Marge (Spanne, Differenz) als Margenzahlungsstrom (Differenzzahlungsstrom) $\mathbf{W}(\mu)$ in n+1 Komponenten $W_j(\mu)$ auf die Zahlungszeitpunkte $j = 0,1,\ldots,n$ verteilen will. Wie im Abschnitt 8.3 ausführlicher dargestellt wird, ist die Beurteilungskurve W im $\mathbb{R}^{n+1}$ als eine Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen definiert. Dabei ist eine Parameterdarstellung von W zunächst eine stetige Abbildung

$$\mathbf{W} : J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

eines offenen Intervalls $J =]a,b[$, $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$, in den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$. Weiter wird für eine Parameterdarstellung $\mathbf{W}(\mu)$ von W gefordert, dass sie bezüglich der strengen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ streng monoton steigend ist:

$$\mu, \mu' \in J, \mu < \mu' \Rightarrow \mathbf{W}(\mu) \underset{\cdot}{<} \mathbf{W}(\mu').$$

Jede derartige sogenannte inhomogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ setzt sich additiv zusammen aus dem festen Bezugspunkt $\mathbf{U} := \mathbf{W}(0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und der sog. homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) := \mathbf{W}(\mu) - \mathbf{U}$, die ebenfalls stetig und bezüglich der strengen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ streng monoton steigend ist und die außerdem noch durch den Nullpunkt verläuft ($\mathbf{V}(0) = \mathbf{O}$):

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu).$$

Eine homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Zur Erinnerung sei angemerkt, dass für einen Vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Ungleichung $\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ genau dann gilt, wenn $X \geq \mathbf{O}$ und $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$ ist. Ein Vektor $\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ wird als schwach positiv bezeichnet. Alle Kurvenpunkte der homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ sind dann direkt beurteilbar, d. h. direkt mit $\mathbf{O}$ vergleichbar:

$$\mathbf{V}(\mu) \underset{\cdot}{<} \mathrm{O} \text{ für } \mu < 0, \mathbf{V}(0) = \mathbf{O}, \ \mathbf{V}(\mu) \underset{\cdot}{>} \mathbf{O} \text{ für } \mu > 0.$$

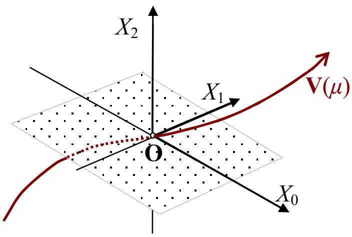


Abb. 4.2 Eine homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ für die Laufzeit $n = 2$

Einfache Beispiele für homogene Beurteilungskurven $\mathbf{V}(\mu)$ sind die linearen Beurteilungskurven $\mathbf{V}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$, $\mu \in J = \mathbb{R}$, und Spezialfälle hiervon die Beurteilungskurve $\hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\ldots,0,\mu)^{\mathrm{T}}$ zur Endentnahme und die Beurteilungskurve $\bar{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ zur Sofortentnahme.

Zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W} : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{W}^* : J^* \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißen hierbei äquivalent, wenn es eine Parametertransformation als streng monoton steigende, surjektive und stetige Funktion $g : J^* \longrightarrow J$ gibt, so dass $\mathbf{W}^*$ die Zusammensetzung $\mathbf{W} \circ g$ der Funktionen g und $\mathbf{W}$ ist:

$$\mathbf{W}^*(\mu^*) = \mathbf{W}(g(\mu^*)) \ \forall \ \mu^* \in J^* =]a^*,b^*[, \ a^* < 0 < b^*.$$

In Abschnitt 8.3.4 wird gezeigt, dass zwei Beurteilungskurven W und W^* als Äquivalenzklassen genau dann gleich sind, wenn für ihre Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ die Spuren (Bildmengen) $\mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{W}^*(J^*)$ übereinstimmen.

In Abschnitt 4.1.3 wurde die Existenz des positiven Preisvektors $\mathbf{P} = (d_0,d_1,\ldots,d_n)^\mathsf{T}$ des vollkommenen Kapitalmarkts gezeigt ($d_0 = 1$, $\mathbf{P}^\mathsf{T}S = \mathbf{O}^\mathsf{T}$ für eine beliebige Basis S von K). Bei der damit gebildeten reellwertigen „Abstandsfunktion"

$$\alpha(\mu) := \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu) = \sum_{j=0}^{n} d_j V_j(\mu)$$

liefert der Funktionswert $\alpha(\mu)$ nach der Division mit der euklidischen Norm

$$\|\mathbf{P}\| = \sqrt{\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{P}}$$

von $\mathbf{P}$ den orientierten (vorzeichenversehenen) Abstand

$$d(\mu) = \alpha(\mu)/\|\mathbf{P}\|$$

des Kurvenpunktes $\mathbf{V}(\mu)$ von der Hyperebene $K = H_{\mathbf{P},0}$. In der Abbildung 4.3 ist der orientierte Abstand $d(\mu)$ eines Kurvenpunkts $\mathbf{V}(\mu)$ von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ dargestellt.

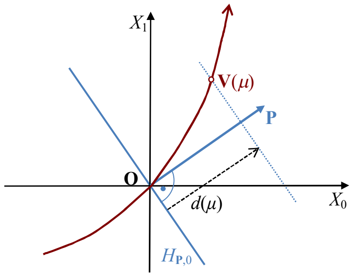


Abb. 4.3 Der orientierte Abstand $d(\mu)$ des Kurvenpunktes $\mathbf{V}(\mu)$ von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ für die Laufzeit $n = 1$

Wegen der Positivität des Preisvektors $\mathbf{P} = (1,d_1,\ldots,d_n)^\mathsf{T}$ des vollkommenen Kapitalmarkts und der strengen Monotonie von $\mathbf{V}(\mu)$ bezüglich der strengen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist auch die Funktion $\alpha(\mu)$ streng monoton steigend. Für die unten in Abschnitt 4.2 beim Beweis der Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und Replizierung auf dem vollkommenen Kapitalmarkt benötigte Bijektivität der Abbildung $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ ist also noch die Surjektivität zu fordern. Dies ist wegen der Stetigkeit der Funktion $\alpha(\mu)$ nach dem Zwischenwertsatz[4] von Bolzano gleichbedeutend zur Unbeschränktheit von $\alpha(\mu)$ an den beiden Intervallgrenzen a und b von J, also zu

$$\alpha(\mu) \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b \quad \text{und}$$
$$\alpha(\mu) \longrightarrow -\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow a.$$

4 Der Zwischenwertsatz wurde zuerst im Jahr 1817 von dem böhmischen Mathematiker, Philosophen und Theologen Bernard Bolzano (1781–1848) und später noch von dem deutschen Mathematiker Karl T. W. Weierstraß (1815–1897) bewiesen. Er ist einer der wichtigsten Sätze über reellwertige stetige Funktionen und präzisiert die Aussage, dass der Graph einer stetigen Funktion ohne Absetzen gezeichnet werden kann. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist die Aussage, dass bei einer stetigen Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ zwischen den metrischen Räumen X und Y das Bild (der Wertebereich) einer bogenweise (kurvenweise, weg-) zusammenhängenden Menge $M \subseteq X$ ebenfalls bogenweise zusammenhängend ist (Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S. 243f.). Beweise für den Zwischenwertsatz findet man beispielweise bei Hildebrandt, Bd. 1 (2006), S. 152; Erwe, Bd. 1 (1967), S. 114f.; Grauert und Lieb, Bd. I (1967), S. 76f.

Die Unbeschränktheit von $\alpha(\mu)$ ist wiederum wegen der Positivität von **P** gleichbedeutend zur Existenz von Indizes p, $m \in \{0,1,\ldots,n\}$ mit

$$V_p(\mu) \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b \text{ und}$$
$$V_m(\mu) \longrightarrow -\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow a$$

bzw. zur Unbeschränktheit von $\|\mathbf{V}(\mu)\|$ an beiden Intervallgrenzen von J:

$$\|\mathbf{V}(\mu)\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b \text{ und bei } \mu \longrightarrow a.$$

Die Unbeschränktheit von $\mathbf{V}(\mu)$ wird beim Beweis der Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und Replizierung in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 für den vollkommenen Kapitalmarkt und in den Abschnitten 5.1.9 und 8.4 für spezielle Supplementsysteme des unvollkommenen Kapitalmarkts verwendet.

4.2 Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und Replizierung

4.2.1 Duplizierung eines Zahlungsstroms

Plausibilitätsbetrachtungen zu dem Thema, wie die Duplizierung bzw. die Replizierung eines Zahlungsstroms mittels Kapitalmarktgeschäften möglichst allgemein gefasst werden kann, findet man in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2. Die Duplizierung (Nachbildung, Synthetisierung, additive Zerlegung) eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ durch ein Kapitalmarktgeschäft (bzw. eine Kombination von Kapitalmarktgeschäften) $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K$ als **Supplement**[5] (Ergänzungsgeschäft) und einen gemäß der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ gebildeten Margenzahlungsstrom $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ wird demnach beschrieben durch die Vektorgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})), \quad \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K, \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \mathbf{U} =: \boldsymbol{\zeta}.$$

Als Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ wird hier auf dem vollkommenen Kapitalmarkt jedes Kapitalmarktgeschäft zugelassen. Auf dem in Kapitel 5 behandelten unvollkommenen Kapitalmarkt muss die Supplementauswahl aber auf eine sogenannte zulässige Supplementmenge eingeschränkt werden, um die Eindeutigkeit der Duplizierung zu sichern.

Die Duplizierung von $\mathbf{X}$ mit dem festen Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ ist gleichbedeutend zur Duplizierung des Differenzzahlungsstroms $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{X} - \mathbf{U}$ mit Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}^* = \mathbf{O}$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$. Da $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{X} - \mathbf{U}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$ durchläuft, wenn $\mathbf{X}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$ durchläuft, wird für alle $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+1}$ also eine Duplizierung in der folgenden Form gesucht:

[5] Die Bezeichnung Supplement kommt vom lateinischen supplementum für Ergänzung und wird schon von Heister (1962), S. 37, verwendet.

$$\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{V}(\mu^*(\boldsymbol{\zeta})) = \boldsymbol{\zeta}.$$

Dies bedeutet, dass die Hyperebene K der Kapitalmarktgeschäfte bzw. eine Basis $S = (\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n)$ von $K = \text{lin }\{\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n\}$ in Verbindung mit der Kurve $\mathbf{V}(\mu)$ den gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ aufspannt:

$$K + \mathbf{V}(J) = \mathbb{R}^{n+1}.$$

Bei gesicherter Einzigkeit der Duplizierungen von $\mathbf{X}$ und $\boldsymbol{\zeta}$ stimmen die Supplemente und die Beurteilungspunkte jeweils überein: $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{S}^*(\boldsymbol{\zeta})$, $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{V}(\mu^*(\boldsymbol{\zeta}))$. Hat man mittels einer Basis S des arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkts den Preisvektor $\mathbf{P}$ bestimmt, so erhält man aus der obigen Vektorgleichung durch Linksmultiplikation mit $\mathbf{P}^\mathsf{T}$ wegen $\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{S}(\mathbf{X}) = 0$ mit der „Abstandsfunktion" $\alpha(\mu) := \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu)$ die reellwertige Gleichung

$$\alpha(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Kurvenpunkt $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ und der Punkt $\boldsymbol{\zeta}$ von der Hyperebene $K = H_{\mathbf{P},0}$ den gleichen mit Vorzeichen versehenen Abstand besitzen. Insbesondere liegen die beiden Punkte auf der gleichen Seite der Hyperebene.

Wegen der oben durch die Eigenschaften der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ gesicherten Bijektivität der Funktion $\alpha(\mu)$ ergibt sich mittels der Umkehrfunktion $\alpha^{-1}(\mu)$ in eindeutiger Weise der Kurvenparameter (Beurteilungsparameter) $\mu(\mathbf{X})$ als krummlinige Koordinate von $\mathbf{X}$ zu

$$\mu(\mathbf{X}) = \alpha^{-1}(\mathbf{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}).$$

In der Praxis wird $\mu = \mu(\mathbf{X})$ als Nullstelle der Funktion $f(\mu) := \alpha(\mu) - \mathbf{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}$ mit numerischen Iterationsmethoden bestimmt. Beispielsweise bietet dazu das Programm Excel von Microsoft Office die Zielwertsuche im Menüpunkt ‚Was-wäre-wenn-Analyse' des Menüs ‚Daten' an und das Softwaresystem Mathematica von Wolfram Research die Funktion NSolve (Aufruf in der Form `NSolve[f[x]==0]`) und die Funktion FindRoot. Beim Aufruf `FindRoot[f[x]==0, {x,x0}]` wird mit einem einzigen vorgegebenen Startwert x_0 das Newton-Verfahren verwendet und beim Aufruf `FindRoot[f[x]==0, {x,{x0,x1}}]` mit zwei angegebenen Startwerten x_0, x_1 das Sekanten-Verfahren. Mit $\mu(\mathbf{X})$ ergibt sich auch der Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ und das Supplement

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})).$$

Durch die Verwendung des Preisvektors $\mathbf{P}$ können also der Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ und das Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ gleich direkt bestimmt werden, ohne vorher die Koordinaten (Transformationsparameter) λ_j ($j = 1,\ldots,n$) des Supplements bezüglich einer Basis $S = (\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n)$ von K zu berechnen. Somit gibt es zum vorgegebenen vollkommenen Kapitalmarkt und zur beliebig vorgegebenen inhomogenen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$, die an beiden Intervallgrenzen von J unbeschränkt ist, zu jedem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine **eindeutig bestimmte Duplizierung**. Beim arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkt kann also mit Hilfe des positiven Preisvektors $\mathbf{P}$ sowohl die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung nachgewiesen werden als auch ein Rechenweg zur Bestimmung derselben angegeben werden. Es gilt hier bei den deterministischen Zahlungsströmen also das Gesetz der eindeutigen Bewertung (englisch: Law of One Valuation, Abk.: LOV) bei beliebig vorgegebener Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$. Bei der Bewertung von stochastischen Zahlungsströmen nach dem Duplikationsprinzip wird das speziellere Gesetz des eindeutigen Preises (englisch: Law of One Price, Abk.: LOP) zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = (\mu,0,\ldots,0)^\mathsf{T}$ der Sofortentnahme verwendet.

4.2.2 Replizierung eines Zahlungsstroms

Plausibitätsbetrachtungen zum Thema, wie die Replizierung eines Zahlungsstroms mittels Kapitalmarktgeschäften möglichst allgemein gefasst werden kann, findet man in Abschnitt 2.2.2. Die Replizierung (Glattstellung, additive Ergänzung) eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ durch ein Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{S}‘ = \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) \in K$ als Supplement (Ergänzungsgeschäft) auf einen gemäß der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ gebildeten Margenzahlungsstrom $\mathbf{W} = \mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$ wird bei Berücksichtigung eines als finanzieller Hintergrund vorhandenen Basiszahlungsstroms $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n+1}$ beschrieben durch die Vektorgleichung

$$\begin{aligned}\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) &= \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \\ &= \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})), \quad \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) \in K,\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) - \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X} =: \boldsymbol{\xi}.$$

Hier auf dem vollkommenen Kapitalmarkt wird jedes Kapitalmarktgeschäft als Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ zugelassen. Auf dem in Kapitel 5 behandelten unvollkommenen Kapitalmarkt dagegen muss zur Sicherung der Eindeutigkeit der Replizierung die Supplementauswahl auf eine sogenannte zulässige Supplementmenge eingeschränkt werden.

Die Replizierung von $\mathbf{X}$ mit Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$, Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ und Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ ist gleichbedeutend zur Replizierung von $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$ mit Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$, Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}^* = \mathbf{O}$ und Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$. Da mit $\mathbf{X}$ auch $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$ durchläuft, wird für alle $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}$ also eine Replizierung der folgenden Form gesucht:

$$\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{V}(v^*(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\xi}.$$

Dies bedeutet, dass die Hyperebene K der Kapitalmarktgeschäfte bzw. eine Basis $S = (\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n)$ von $K = \text{lin}\ \{\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n\}$ in Verbindung mit der Kurve $-\mathbf{V}(v)$ den gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ aufspannt:

$$K - \mathbf{V}(J) = \mathbb{R}^{n+1}.$$

Aus der Vektorgleichung erhält man durch Linksmultiplikation mit $\mathbf{P}^\mathsf{T}$ wegen $\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{S}(\mathbf{X}) = 0$ die reellwertige Gleichung

$$\alpha(v(\mathbf{X})) = -\mathbf{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{\xi}.$$

Aufgrund der oben durch Eigenschaften der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ gesicherten Bijektivität der Funktion $\alpha(\mu)$ erhält man daraus in eindeutiger Weise den Kurvenparameter

$$v(\mathbf{X}) = \alpha^{-1}(-\mathbf{P}^\mathsf{T}\boldsymbol{\xi}),$$

den Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$ und das Supplement

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})).$$

Somit gibt es bei vorgegebenem vollkommenen Kapitalmarkt und beliebig vorgegebener inhomogener, an beiden Intervallgrenzen unbeschränkter Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ zu jedem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine **eindeutig bestimmte Replizierung**. Beim vollkommenen Kapitalmarkt kann also mit Hilfe des positiven Preisvektors $\mathbf{P}$ sowohl die Existenz und Einzigkeit der Replizierung bewiesen werden als auch diese Replizierung berechnet werden. Wie bei der Duplizierung gilt hier also auch bei der Replizierung das Gesetz der eindeutigen Bewertung bei beliebiger Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$.

Anmerkung zum Zusammenhang von Duplizierung und Replizierung
Die Existenz einer *eindeutigen* Replizierung auf *ganz* $\mathbb{R}^{n+1}$ kann auf dem vollkommenen Kapitalmarkt auch aus der Existenz einer eindeutigen Duplizierung auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ gefolgert werden. Ebenso gilt die umgekehrte Aussage. Bei einer fest vorgegebenen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ ist nämlich der Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann eindeutig replizierbar,

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in K,$$

wenn der zugehörige Zahlungsstrom $\mathbf{Y} := t_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) := \mathbf{X} + \mathbf{B}$ eindeutig duplizierbar ist,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}) \in K.$$

Dabei gilt für die Supplemente $\mathbf{S}(\mathbf{Y}) = - \mathbf{S}'(\mathbf{X})$ ($\in K$; K vollkommener Kapitalmarkt), für die Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X}))$ und für die Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{Y}) = \nu(\mathbf{X})$. Speziell bei einem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ ist $\mathbf{X}$ genau dann eindeutig replizierbar, wenn $\mathbf{X}$ eindeutig duplizierbar ist mit $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = - \mathbf{S}'(\mathbf{X})$, $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X}))$ und $\mu(\mathbf{X}) = \nu(\mathbf{X})$. Da die Translation $t_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{B}$ eine bijektive Selbstabbildung des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, existiert eine eindeutige Replizierung auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ eine eindeutige Duplizierung gegeben ist.

Für die Bestimmung der Duplizierung bzw. der Replizierung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ kann auf einem vollkommenen Kapitalmarkt also von einer beliebigen Basis $S = (\mathbf{S}^1, \ldots, \mathbf{S}^n)$ der Hyperebene K der Kapitalmarktgeschäfte ausgegangen werden und der Preisvektor $\mathbf{P}$ als Lösung des Gleichungssystems $S^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = \mathbf{O}$ mit $P_0 = 1$ (siehe Abschnitt 4.1.3) berechnet werden. Mit der aus dem positiven Preisvektor $\mathbf{P}$ und der homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ gebildeten „Abstandsfunktion“ $\alpha(\mu)$ kann dann für die Duplizierung der D-Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ ermittelt werden und mit diesem der für die D-Beurteilung verwendete D-Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$. Im Vergleich dazu gestalten sich die Duplizierung und die Replizierung auf einem unvollkommenen Kapitalmarkt wesentlich aufwendiger. Bei der Duplizierung bzw. Replizierung kann jedem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit dem als indifferent angesehenen verwendeten Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ vom Kapitalmarkt eindeutig ein realer Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ zugeordnet werden, der zum Vergleich und zur Beurteilung verwendet werden kann.

Auf dem vollkommenen Kapitalmarkt K erhält man aus dem Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K$ der Duplizierung von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit dem umgekehrten Zahlungsstrom $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) := - \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K$ das Supplement für die Replizierung von $\mathbf{X}$, wenn der Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ zu Grunde gelegt wird. Ebenso gilt die Umkehrung dieser Aussage. Sowohl bei der Duplizierung als auch bei der Replizierung von $\mathbf{X}$ erhält man den gleichen Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X}))$. Auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt ist diese Aussage nicht mehr richtig, da hier im Allgemeinen mit $\mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K$ nicht auch noch $- \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K$ gilt.

Wie in Abschnitt 8.3.4 sowohl für den vollkommenen als auch für den unvollkommenen Kapitalmarkt noch gezeigt wird, kann die Eindeutigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung auch bewiesen werden, wenn die Beurteilungskurve W als Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen vorgegeben ist. Basierend auf die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. der Replizierung kann nun nachfolgend im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ der Zahlungsströme nach diesen Konzepten eine Präferenzordnung definiert werden.

4.3 Definition einer Präferenzordnung nach den Konzepten der Duplizierung und der Replizierung

Da das Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit der totalen Ordnung $\geq$ ausgestattet ist und die Spur $\mathbf{W}(J)$ der Beurteilungskurve das Bild von J bei der (bezüglich der strengen Halbordnung $\dot{>}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$) streng monotonen Abbildung $\mathbf{W}(\mu)$ ist, ist auch $\mathbf{W}(J)$ mit der totalen Ordnung $\geq$ ausgestattet. Für zwei Kurvenpunkte $\mathbf{W}(\mu_1), \mathbf{W}(\mu_2) \in \mathbf{W}(J)$ gilt stets genau eine der drei Relationen: $\mathbf{W}(\mu_1) \dot{<} \mathbf{W}(\mu_2)$, $\mathbf{W}(\mu_1) = \mathbf{W}(\mu_2)$ oder $\mathbf{W}(\mu_1) \dot{>} \mathbf{W}(\mu_2)$. Diese totale Ordnung auf $\mathbf{W}(J)$ lässt sich mit dem Konzept der Duplizierung bzw. der Replizierung als Präferenzordnung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ übertragen. Dazu wird jedem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ eindeutig ein Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ auf der total geordneten Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ zugeordnet und und mit diesem der Vergleich und die Beurteilung von $\mathbf{X}$ definiert. Aus der Eigenschaft der strengen Monotonie der Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ ergeben sich also bei einem vollkommenen Kapitalmarkt auf dem Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ schon die eindeutige Duplizierung und Replizierung und die zu den Beurteilungskurven gehörigen Präferenzordnungen.

4.3.1 D-Präferenzordnung

4.3.1.1 Definition der D-Präferenzordnung und die Existenz einer Nutzenfunktion

Mittels der durch die obigen Voraussetzungen an den Kapitalmarkt und die Beurteilungskurve gesicherten eindeutigen Duplizierung (Nachbildung, additive Zerlegung)

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))\\ &= \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K,\end{aligned}$$

des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ lässt sich eine $(n+1)$-dimensionale Präferenzfunktion (Bewertungsfunktion)

$$\mathbf{w}_{\mathrm{D}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in \mathbf{W}(J),$$

eine ordinale Nutzenfunktion (eindimensionale Bewertungsfunktion)

$$\mu_{\mathrm{D}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mu(\mathbf{X}) \in J$$

und eine Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ mit zugehöriger Indifferenzrelation (Äquivalenzrelation) $\simeq_{\mathrm{D}W}$ und zugehöriger strenger Halbordnung $\triangleright_{\mathrm{D}W}$ definieren:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so günstig wie } \mathbf{Y}) \\
& :\Leftrightarrow\ \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) \geq \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) \\
& \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) \\
& \Leftrightarrow \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) \geq \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}), \\
\mathbf{X} \simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist ebenso so günstig wie } \mathbf{Y}) \\
& :\Leftrightarrow\ \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) \\
& \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) \\
& \Leftrightarrow \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}), \\
\mathbf{X} \vartriangleright_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist günstiger als } \mathbf{Y}) \\
& :\Leftrightarrow\ \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) \underset{\cdot}{>} \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) \\
& \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) \\
& \Leftrightarrow \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) > \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}).
\end{aligned}
$$

In der Abbildung 4.4 ist für einen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ der D-Präferenzfunktionswert $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X})$ auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ dargestellt. Die Indizes D und W sollen darauf hinweisen, dass bei der Definition der Begriffe das Konzept der Duplizierung mit der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ zu Grunde gelegt ist. Die Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und Totalität für die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften der totalen Ordnung $\geq$ auf der Spur $\mathbf{V}(J)$ bzw. auf dem Intervall J. Ebenso ergeben sich die Eigenschaften (Reflexivität, Transitivität, Symmetrie) der Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{D}W}$ aus den Eigenschaften der Indifferenzrelation $=$ auf J und die Eigenschaften (Transitivität, Asymmetrie) der strengen Halbordnung $\vartriangleright_{\mathrm{D}W}$ aus den Eigenschaften der strengen Halbordnung $>$ auf J.

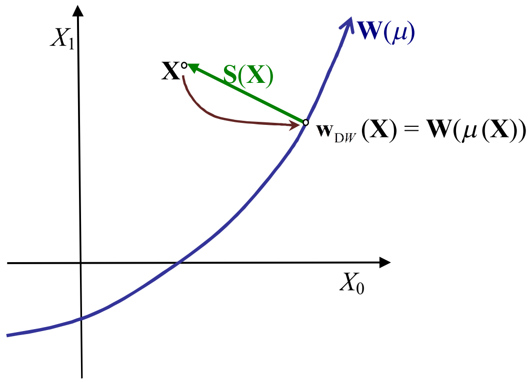


Abb. 4.4 Die D-Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X})$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ im $\mathbb{R}^2$

4.3.1.2 Indifferenzklassen und Bessermengen

Zwei Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ sind also (wirtschaftlich) äquivalent bezüglich der DW-Indifferenzrelation, wenn sie sich von ihrer jeweiligen Nachbildung $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ bzw. $\mathbf{S}(\mathbf{Y})$ auf dem Kapitalmarkt durch den gleichen Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ unterscheiden. Für einen beliebigen fest fixierten Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist die zur Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{D}W}$ gebildete Indifferenzklasse (Äquivalenzklasse; bei $n = 1$ auch Indifferenzkurve)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}\} \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})\} \\
&= \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}{}^{-1}(\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})) \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})\} \\
&= \mu_{\mathrm{D}W}{}^{-1}(\mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}))
\end{aligned}$$

die Urbildmenge der Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}$ zum Funktionswert $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \in \mathbf{W}(J)$ bzw. die Urbildmenge der Nutzenfunktion $\mu_{\mathrm{D}W}$ zum Funktionswert $\mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) \in J$. Sie wird daher bei $n = 1$ auch als Isonutzenkurve, Isonutzenlinie oder Niveaulinie bezeichnet. Wie nachfolgend gezeigt wird, lässt sich die D-Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ genauer beschreiben als die Minkowski-Summe (benannt nach dem deutschen Mathematiker und Physiker H. Minkowski, 1864–1909) von $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ und K,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K \\
&= \mathbf{Y} + K,
\end{aligned}$$

und geometrisch interpretieren als die affine (inhomogene) Hyperebene durch den Punkt $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ bzw. durch den Punkt $\mathbf{Y}$ mit der zugehörigen linearen (homogenen) Hyperebene K als Richtung. Speziell für die sogenannte Unterlassungsalternative $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ ist die D-Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{O})$ gleich der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte:

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{O}) = K.$$

Jedes Kapitalmarktgeschäft wird somit als D-indifferent (zu $\mathbf{O}$) bewertet.

Für die Bessermenge

$$W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}\}$$

von $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bei der D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned}
W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))\} \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu) \text{ für ein } \mu \geq \mu(\mathbf{Y}), \mu \in J\} \\
&= \bigcup_{\mu \in [\mu(\mathbf{Y}), b[} \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{W}(\mu)) \\
&= \bigcup_{\mu \in [\mu(\mathbf{Y}), b[} \left(\mathbf{W}(\mu) + K\right) \\
&= \mathbf{W}([\mu(\mathbf{Y})), b[) + K.
\end{aligned}$$

Eine elegantere von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ unabhängige geometrische Darstellung der Bessermenge als Halbraum

$$\begin{aligned}
H^{\geq}_{\mathbf{P},\eta} &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} \geq \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{Y} =: \eta\} \\
&= \mathbf{Y} + H^{\geq}_{\mathbf{P},0}
\end{aligned}$$

wird unten bei der Behandlung der B-Präferenzordnung (Barwert-Präferenzordnung) $\trianglerighteq$ in Abschnitt 4.3.3 angegeben. Eine grafische Darstellung der D-Indifferenzklasse und der D-Bessermenge für einen beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird in der nachfolgenden Abbildung 4.5 angegeben.

Beweis für die Darstellung der Indifferenzklassen: Für jedes beliebige $\mathbf{X} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$ gilt $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ und mit der Duplizierungsgleichung von $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K,$$

dann

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K.$$

Damit ist schon $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K$ gezeigt.
Umgekehrt erhält man für jedes $\mathbf{X} \in \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K$, also

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S} \text{ mit einem } \mathbf{S} \in K,$$

aufgrund der Eindeutigkeit der Duplizierung von $\mathbf{X}$ die Identitäten

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{S}, \;\; \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$$

und somit $\mathbf{X} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$. Also ist auch die umgekehrte Inklusion $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K \subseteq \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$ gezeigt und insgesamt

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K.$$

Aus der Duplizierungsgleichung von $\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}) \in K,$$

folgt $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{Y} - \mathbf{S}(\mathbf{Y})$. Da K als linearer Unterraum abgeschlossen bezüglich der Multiplikation mit -1 und bezüglich der Addition ist, folgt $-\mathbf{S}(\mathbf{Y}) \in K$ und $-\mathbf{S}(\mathbf{Y}) + K = K$ und somit

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} - \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + K = \mathbf{Y} + K.$$

Speziell für $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ erhält man

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{O}) = K.$$

Damit ist der Beweis für die geometrische Interpretation der D-Indifferenzklassen abgeschlossen. Einen einfacheren Beweis erhält man noch weiter unten aufgrund der Übereinstimmung der D-Präferenzordnung mit der B-Präferenzordnung. □

Speziell für $\mathbf{Y} = \mathbf{U}$ ist in der Duplizierung das Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = \mathbf{O}$, der Beurteilungsvektor $\mathbf{W}(\mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{U})) = \mathbf{U}$ und der Beurteilungsparameter $\mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{U}) = 0$, also die Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{U})$ des Bezugszahlungsstroms $\mathbf{U}$ gleich der Urbildmenge der Nutzenfunktion $\mu_{\mathrm{D}W}$ zum Wert Null:

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{U}) = \mu_{\mathrm{D}W}^{-1}(0).$$

Nimmt man beispielsweise $\mathbf{U}$ als Nullpunkt der Bewertung bzw. die zugehörige Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{U})$ als Nulllinie der Bewertung, so können die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ nicht nur untereinander verglichen werden, sondern auch für sich bewertet werden:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{X} \rhd_{\mathrm{D}W} \mathbf{U} & (\mathbf{X} \text{ ist günstig}) & :\Leftrightarrow \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) > \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{U}), \\
\mathbf{X} \simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{U} & (\mathbf{X} \text{ ist indifferent, also weder günstig noch ungünstig}) & \\
 & & :\Leftrightarrow \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{U}), \\
\mathbf{X} \lhd_{\mathrm{D}W} \mathbf{U} & (\mathbf{X} \text{ ist ungünstig}) & :\Leftrightarrow \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) < \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{U}).
\end{array}$$

Die hierbei verwendete Relation $\lhd_{\mathrm{D}W}$ („ungünstiger als“) ist die Umkehrrelation (inverse Relation) zur strengen Halbordnung $\rhd_{\mathrm{D}W}$ („günstiger als“).
Die oben definierte ordinale (eine Ordnung anzeigende) Nutzenfunktion $\mu_{\mathrm{D}W} : \mathbb{R}^{n+1} \to J$ ist auch eine sogenannte kardinale Nutzenfunktion, da die zugehörige durch Differenzbildung definierte Funktion

$$\vec{v} : (\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \vec{v}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) - \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X})$$

für die Übergänge $(\mathbf{X} \to \mathbf{Y}) = (\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ von Alternative $\mathbf{X}$ zu Alternative $\mathbf{Y}$ als Nutzenfunktion eine Relation $\succ$ für diese Übergänge beschreibt:

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) \succcurlyeq (\mathbf{C},\mathbf{D}) \quad \Leftrightarrow \; \vec{v}(\mathbf{A},\mathbf{B}) \geq \vec{v}(\mathbf{C},\mathbf{D})$$
$$\Leftrightarrow \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{B}) - \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{A}) \geq \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{D}) - \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{C}).$$

Auf Grund der Eigenschaften der Ordnung $\geq$ („größer oder gleich") in $\mathbb{R}$ ist dann auch die Relation $\succcurlyeq$ für die Übergänge reflexiv, transitiv und total auf $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, also eine Präferenzordnung auf $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Die durch die kardinale Nutzenfunktion $\mu_{\mathrm{D}W}$ gegebene Bewertungsskala für die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine sogenannte metrische Skala, da auch die Übergänge (Rangunterschiede, Abstände) zwischen den Alternativen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gemessen werden können, und mit der Festlegung des Nullpunkts der Bewertung auf $\mathbf{U}$ auch eine Intervallskala (Kardinalskala). Sieht man den Bezugspunkt $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ als natürlichen Nullpunkt an, so ist die Bewertungsskala auch eine sogenannte Verhältnisskala (Rationalskala, Ratioskala, Proportionalskala).

4.3.1.3 Von der Beurteilungskurve unabhängige Charakterisierung der D-Präferenzordnung

Als Besonderheit des vollkommenen Kapitalmarkts kann nun mit dem dort für ganz K gültigen Preisvektor $\mathbf{P}$ eine von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ unabhängige Charakterisierung der D-Präferenzordnung angegeben werden. Aus den Duplizierungsgleichungen der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})), \;\; \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in K = H_{\mathbf{P},0},$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})), \;\; \mathbf{S}(\mathbf{Y}) \in K = H_{\mathbf{P},0},$$

erhält man für den Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} := \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ die Vektorgleichung

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) - \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y}))$$

und nach Linksmultiplikation mit dem Preisvektor $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ wegen $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}(\mathbf{Y}) = 0$ die reellwertige Gleichung

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \alpha(\mu(\mathbf{X})) - \alpha(\mu(\mathbf{Y})).$$

Die Relation

$$\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}$$

ist gleichbedeutend zur Vektorungleichung

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})).$$

Diese ist wiederum wegen der strengen Monotonie von $\mathbf{W}(\mu)$ gleichbedeutend zur Parameterungleichung

$$\mu(\mathbf{X}) \geq \mu(\mathbf{Y}).$$

Die Parameterungleichung ist wegen der strengen Monotonie von $\alpha(\mu) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}(\mu)$ ($\mathbf{P} > \mathbf{O}$) gleichbedeutend zur Funktionswerteungleichung

$$\alpha(\mu(\mathbf{X})) \geq \alpha(\mu(\mathbf{Y}))$$

bzw. zur Ungleichung

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{D} = \alpha(\mu(\mathbf{X})) - \alpha(\mu(\mathbf{Y})) \geq 0.$$

Damit erhält man eine von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ unabhängige Beschreibung der Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y} &\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} - \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{D} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y}) \\ &\Leftrightarrow: \mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}.\end{aligned}$$

Hierbei ist $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ die mit dem Preisvektor $\mathbf{P}$ des vollkommenen Kapitalmarkts gebildete Barwert-Funktion. Die mittels des Konzepts der Duplizierung konstruierte D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ ist auf dem vollkommenen Kapitalmarkt also gleich der mit der Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X})$ als Nutzenfunktion definierten B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$. Die Präferenzordnung ist somit unabhängig vom Bezugspunkt $\mathbf{U}$ und der homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$. Sie ist allein abhängig vom Preisvektor $\mathbf{P}$ bzw. von den Diskontierungsfaktoren d_j $(j = 1,\ldots,n)$ des vollkommenen Kapitalmarkts. Die Relation $\trianglerighteq$ ist aufgrund ihrer Übereinstimmung mit einer beliebig fixierten D-Präferenzordnung ebenfalls eine Präferenzordnung. Die Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und Totalität einer Präferenzordnung können für die Relation $\trianglerighteq$ aber auch direkt aus ihrer Definition mittels der Barwerte hergeleitet werden.

Die Indifferenzkurven

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}\}$$

und Bessermengen

$$W_+(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}\}$$

dieser B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ werden im nachfolgenden Abschnitt 4.3.3 noch genauer geometrisch beschrieben.

Des Weiteren kann hier noch (ohne Beweis) angemerkt werden, dass die Relation $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}$ für die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ auch gleichbedeutend zur Relation $\mathbf{D} \trianglerighteq_{\mathrm{D}V} \mathbf{O}$ für den Differenzvektor $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ und den Nullvektor $\mathbf{O}$ ist. Dabei ist die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}V}$ mit der Duplizierung bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu)$ $(\mathbf{U} = \mathbf{O})$ definiert. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die nachfolgend behandelte R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$.

Zur Charakterisierung der D-Präferenzordnung mittels des Barwertvergleichs kann noch gezeigt werden, dass der Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ bzw. der Wert $\mu(\mathbf{X})$ der Nutzenfunktion für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ eine streng monotone Funktion des Barwerts $B_n(\mathbf{X})$ ist. Hier zeigt sich ein allgemeiner Sachverhalt (siehe Anmerkung zu Beginn von Kapitel 6), wonach sich zwei Nutzenfunktionen, die die gleiche Präferenzordnung liefern, nur durch eine streng monoton steigende Transformation unterscheiden. Aus der Duplizierungsgleichung von $\mathbf{X}$ erhält man nämlich die reellwertige Gleichung

$$\begin{aligned}\alpha(\mu(\mathbf{X})) &= \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} - \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}(\mathbf{X}) - \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} \\ &= B_n(\mathbf{X}) - \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U}\end{aligned}$$

und daraus den Beurteilungsparameter

$$\mu(\mathbf{X}) = \alpha^{-1}(B_n(\mathbf{X}) - \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U}).$$

Da mit der Funktion $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ auch die Umkehrfunktion $\alpha^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow J$ streng monoton steigend ist, ist der Wert $\mu(\mathbf{X})$ der Nutzenfunktion für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ auch eine streng monoton steigende Funktion des Barwerts $B_n(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$.

Speziell für die Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \overline{\mathbf{V}}(\mu)$ der Sofortentnahme ist $\mathbf{U} = 0$, $\alpha(\mu) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\overline{\mathbf{V}}(\mu) = P_0 \cdot V_0(\mu) = \mu$ und der auf $t = 0$ bezogene Wert $\mu(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$ bzw. der

Preis von **X** gleich dem Barwert $B_n(\mathbf{X})$ von **X** ($\mu(\mathbf{X}) = \alpha(\mu(\mathbf{X})) = B_n(\mathbf{X})$) bzw. bis auf einen positiven konstanten Faktor $1/\|\mathbf{P}\|$ gleich dem orientierten Abstand $\delta(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{X})/\|\mathbf{P}\|$ des Punktes **X** von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$. Diese Interpretationen der Bewertung erhält man auch für stochastische Zahlungsströme.

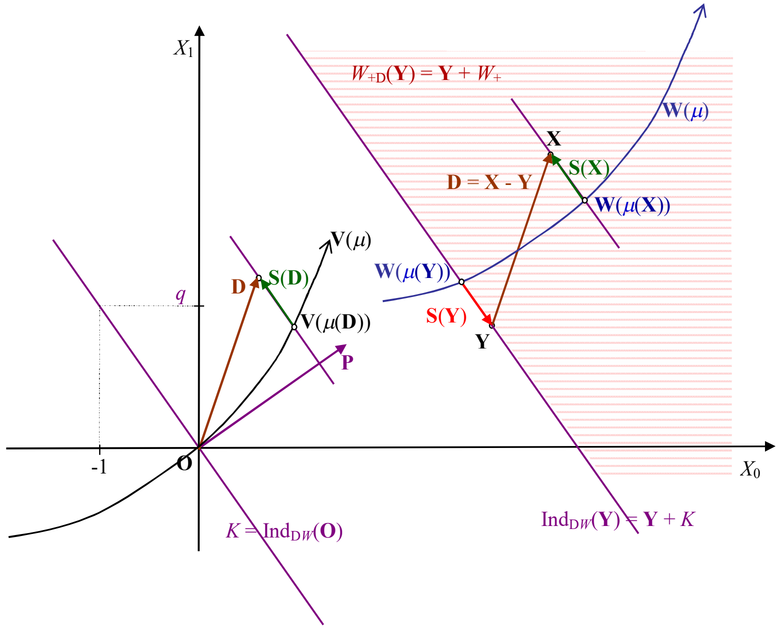


Abb. 4.5 Der Vergleich der Zahlungsströme **X** und **Y** mittels der Duplizierungen von **X** und **Y** mit der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ für die Laufzeit $n = 1$ im Spezialfall eines einheitlichen Marktzinsfaktors $q = q_H = q_S$. Darstellung der Indifferenzkurve $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + K$ und der Bessermenge $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + W_+$ des Zahlungsstroms **Y** ($K = \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{O})$, $W_+ := W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{O})$).

4.3.2 R-Präferenzordnung

4.3.2.1 Definition der R-Präferenzordnung und die Existenz einer Nutzenfunktion

Analog zum Konzept der Duplizierung erhält man auch mittels der durch Voraussetzungen an K und $\mathbf{W}(\mu)$ gesicherten eindeutigen Replizierung (Glattstellung, additiven Ergänzung)

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in K,$$

eine $(n+1)$-dimensionale Präferenzfunktion

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J),$$

eine ordinale Nutzenfunktion

$$\nu_{\mathrm{R}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \nu_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = \nu(\mathbf{X}) \in J$$

und eine Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ mit zugehöriger Indifferenzrelation (Äquivalenzrelation) $\simeq_{\mathrm{R}W}$ und zugehöriger strenger Halbordnung $\triangleright_{\mathrm{R}W}$:

$\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist mindestens so gut wie $\mathbf{Y}$)
$:\Leftrightarrow \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) \geq \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$
$\Leftrightarrow v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) \geq v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$,

$\mathbf{X} \simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist ebenso so gut wie $\mathbf{Y}$)
$:\Leftrightarrow \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$
$\Leftrightarrow v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$,

$\mathbf{X} \vartriangleright_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist besser als $\mathbf{Y}$)
$:\Leftrightarrow \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) \underset{\cdot}{>} \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$
$\Leftrightarrow v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) > v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$.

In der Abbildung 4.6 ist für einen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ der R-Präferenzfunktionswert $\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X})$ auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ dargestellt.

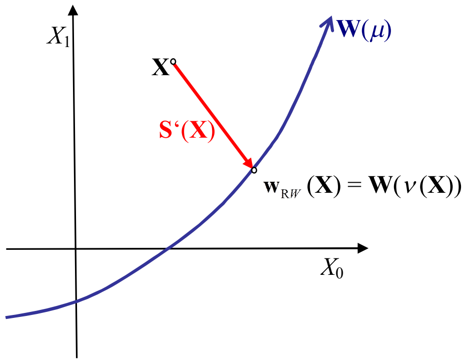


Abb. 4.6 Die R-Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X})$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ ($\mathbf{B} = \mathbf{O}$)

4.3.2.2 Indifferenzklassen und Bessermengen

Analog zur D-Präferenzordnung ist auch bei der R-Präferenzordnung die zu einem Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gebildete Indifferenzklasse (Äquivalenzklasse; bei $n = 1$ auch Indifferenzkurve)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}\} \\ &= v_{\mathrm{R}W}^{-1}(v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}))\end{aligned}$$

die Urbildmenge der Nutzenfunktion $v_{\mathrm{R}W}$ zum Funktionswert $v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) \in J$. Die Indifferenzklasse wird daher bei $n = 1$ auch als Isonutzenkurve, Isonutzenlinie oder Niveaulinie bezeichnet.

Analog zur D-Präferenzordnung ist hier bei der R-Präferenzordnung die R-Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ geometrisch gesehen die affine Hyperebene durch den Punkt $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{B}$ bzw. durch den Punkt $\mathbf{Y}$ mit der zugehörigen linearen Hyperebene K als Richtung:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K \\ &= \mathbf{Y} + K.\end{aligned}$$

Speziell für die sogenannte Unterlassungsalternative $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ ist die R-Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{O})$ gleich der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte:

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{O}) = K.$$

Jedes Kapitalmarktgeschäft wird somit als R-indifferent (zu **O**) bewertet. In dieser Darstellung zeigt sich schon, dass die D-Indifferenzklassen und die R-Indifferenzklassen und damit auch die D-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{D}W}$ und die R-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{R}W}$ übereinstimmen.

Analog zur Darstellung der D-Bessermenge $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ erhält man für die R-Bessermenge

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}\}$$

von $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bei der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ die Darstellung

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}([\mu(\mathbf{Y})),b[) - \mathbf{B} + K.$$

Eine elegantere von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ und von $\mathbf{B}$ unabhängige geometrische Darstellung der Bessermenge als Halbraum

$$\begin{aligned} H^{\geq}_{\mathbf{P},\eta} &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} \geq \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{Y} =: \eta\} \\ &= \mathbf{Y} + H^{\geq}_{\mathbf{P},0} \end{aligned}$$

wird unten bei der Behandlung der B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ in Abschnitt 4.3.3 angegeben. Eine grafische Darstellung der Indifferenzklasse und der Bessermenge wird in der nachfolgenden Abbildung 4.7 für einen beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ angegeben.

Beweis für die Struktur der Indifferenzklassen: Für jedes beliebige $\mathbf{X} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$ gilt $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$, mit der Replizierungsgleichung von $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})),\ \ \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in K,$$

und $-K = K$ dann

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - K = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K.$$

Damit ist schon die Inklusion $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K$ gezeigt.
Umgekehrt erhält man für jedes $\mathbf{X} \in \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K$, also

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + \mathbf{S}'' \text{ mit } \mathbf{S}'' \in K,$$

die Gleichung

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}' = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) \ \text{ mit } \mathbf{S}' = -\mathbf{S}'' \in -K = K,$$

aufgrund der Eindeutigkeit der Replizierung von $\mathbf{X}$ die Identitäten

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{S}',\ \ \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$$

und somit $\mathbf{X} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$. Also ist auch die umgekehrte Inklusion $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K \subseteq \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$ gezeigt und insgesamt

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K.$$

Aus der Replizierungsgleichung von $\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{B} + \mathbf{Y} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})),\ \ \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) \in K,$$

folgt zunächst $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} = \mathbf{Y} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y})$. Da K als linearer Unterraum abgeschlossen bezüglich der Addition ist, folgt $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) + K = K$ und somit

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) + K = \mathbf{Y} + K.$$

Damit ist der Beweis für die geometrische Interpretation der R-Indifferenzklassen abgeschlossen. Einen einfacheren Beweis erhält man weiter unten aufgrund der Übereinstimmung der R-Präferenzordnung mit der B-Präferenzordnung. □

Legt man beispielsweise **U** als Nullpunkt der Bewertung bzw. die zugehörige Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{U})$ als Nulllinie der Bewertung fest, so können die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auch für sich bewertet werden:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X} \rhd_{\mathrm{R}W} \mathbf{U} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist gut)} &&:\Leftrightarrow v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) > v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{U}),\\
&\mathbf{X} \simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{U} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist indifferent, also weder gut noch schlecht)}\\
& &&:\Leftrightarrow v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{U}),\\
&\mathbf{X} \lhd_{\mathrm{R}W} \mathbf{U} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist schlecht)} &&:\Leftrightarrow v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) < v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{U}).
\end{aligned}$$

Die hierbei verwendete Relation $\lhd_{\mathrm{R}W}$ („schlechter als“) ist die Umkehrrelation (inverse Relation) zur strengen Halbordnung $\rhd_{\mathrm{R}W}$ („besser als“).
Analog zur oben angegebenen Nutzenfunktion $\mu_{\mathrm{D}W} : \mathbb{R}^{n+1} \to J$ ist auch $v_{\mathrm{R}W} : \mathbb{R}^{n+1} \to J$ eine kardinale Nutzenfunktion und die dadurch gegebene Bewertungsskala für die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine metrische Skala und eine Intervallskala (Kardinalskala).

4.3.2.3 Von der Beurteilungskurve unabhängige Charakterisierung der R-Präferenzordnung

Als eine Besonderheit des vollkommenen Kapitalmarkts kann auch für die R-Präferenzordnung mit dem Preisvektor $\mathbf{P}$ eine von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ unabhängige Charakterisierung angegeben werden. Aus den Replizierungsgleichungen der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in K = H_{\mathbf{P},0},$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{Y} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) \in K = H_{\mathbf{P},0},$$

erhält man für den Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} := \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ die Vektorgleichung

$$\mathbf{D} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) - \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) - \mathbf{V}(v(\mathbf{Y}))$$

und nach Linksmultiplikation mit dem Preisvektor $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ wegen $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = 0$ die reellwertige Gleichung

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{D} = \alpha(v(\mathbf{X})) - \alpha(v(\mathbf{Y})).$$

Unter Verwendung der aus $\mathbf{P} > \mathbf{O}$ resultiertenden strengen Monotonie der Funktion $\alpha(v)$ erhält man wie bei der D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ auch bei der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ eine von der Beurteilungskurve unabhängige Charakterisierung mittels der Barwerte (Kapitalwerte):

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y} \quad &\Leftrightarrow\ \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) \ge \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})\\
&\Leftrightarrow v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) \ge v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X})\\
&\Leftrightarrow \alpha(v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X})) \ge \alpha(v_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}))\\
&\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{D} \ge 0\\
&\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} \ge \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{Y}\\
&\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \ge B_n(\mathbf{Y})\\
&\Leftrightarrow: \mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}.
\end{aligned}$$

Jede mit dem Konzept der Replizierung konstruierte R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ ist auf dem vollkommenen Kapitalmarkt also gleich der mittels der Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X})$ als Nutzenfunktion definierten B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$. Die Konzepte der Duplizierung und der Replizierung liefern also für jede Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ und auch für jeden Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ (bei der Replizierung) die gleiche und somit insgesamt nur eine einzige Präferenzordnung, nämlich die B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ mit dem Vergleich der Barwerte der Zahlungsströme:

$$\trianglerighteq_{DW} = \trianglerighteq_{RW} = \trianglerighteq \text{ für alle Beurteilungskurven } \mathbf{W}(\mu).$$

Die Indifferenzkurven

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}\}$$

und Bessermengen

$$W_{+}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}\}$$

dieser B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ werden im nachfolgenden Abschnitt 4.3.3 noch genauer geometrisch beschrieben.

Für die Beurteilung und den Vergleich von Zahlungsströmen **X** und **Y** können also auf einem vollkommenen Kapitalmarkt – ohne explizite Errechnung der Duplizierung bzw. Replizierung mittels einer speziell gewählten Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ – mit dem Preisvektor **P** gleich die zum Vergleich verwendeten Barwerte $B_n(\mathbf{X})$ und $B_n(\mathbf{Y})$ berechnet werden. Der Preisvektor **P** kann zwar aus einer beliebigen Basis S der Hyperebene K der Kapitalmarktgeschäfte berechnet werden, ist aber unabhängig von der Auswahl der Basis und allein durch die Hyperebene K und die Festlegung seiner ersten Komponente ($P_0 = d_0 = 1$) eindeutig bestimmt. Wie oben gezeigt wurde, spiegelt sich der Preisvektor **P** aber in verschiedenen auf dem vollkommenen Kapitalmarkt existierenden Systemen von Kapitalmarktgeschäften wider, nämlich in den einperiodischen Termingeschäften, den zu den reinen Wertpapieren gehörigen Kassageschäften, den (n-j+1)-periodischen Termingeschäften und den j-periodischen Kassageschäften.

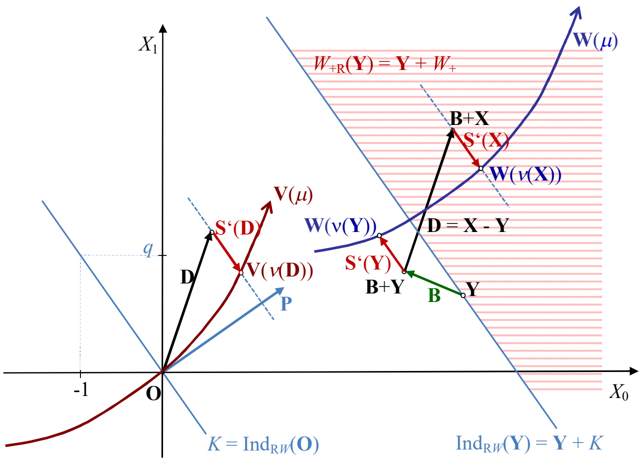


Abb. 4.7 Der Vergleich der Zahlungsströme **X** und **Y** mittels der Replizierungen von **X** und **Y** mit Basiszahlungsstrom **B** und Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ für die Laufzeit $n = 1$ und den Spezialfall eines einheitlichen Marktzinsfaktors $q = q_H = q_S$. Darstellung der Indifferenzkurve $\mathrm{Ind}_{RW}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + K$ und der Bessermenge $W_{+R}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + W_{+}$ des Zahlungsstroms **Y** ($K = \mathrm{Ind}_{RW}(\mathbf{O})$, $W_{+} := W_{+R}(\mathbf{O})$).

Bei Kruschwitz (1998), S. 60–64, 78–79, wird diese Charakterisierung des Vergleichs der Zahlungsströme mittels des Barwertvergleichs für zwei Spezialfälle bewiesen. Er verwendet dabei die Beurteilungskurve des Endwertmodells (Vermögensstreben) bzw. des Annuitätenmodells (Einkommensstreben) und ein System $S = (\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n)$ von einperiodischen Termingeschäften des Kapitalmarkts bei sog. flacher Zinskurve, also mit den Terminzinssätzen

$$i_{jH} = i_{jS} = i_j = i \text{ für } j = 1,\ldots,n.$$

Wie die Bezeichnungen und die Komponentenschreibweise von Kruschwitz in die hier verwendete Vektorschreibweise übersetzt werden können, wird in Abschnitt 3.3 dargestellt. Der hinter der Argumentation von Kruschwitz stehende Sachverhalt lässt sich damit folgendermaßen auch allgemein formulieren. Aus der Replizierungsgleichung von **X** erhält man die reellwertige Gleichung

$$\begin{aligned}\alpha(v(\mathbf{X})) &= \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(v(\mathbf{X}))\\ &= \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{B} - \mathbf{U}) + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}'(\mathbf{X})\\ &= B_n(\mathbf{X}) + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{B} - \mathbf{U})\end{aligned}$$

und daraus den Beurteilungsparameter bzw. den Wert der Nutzenfunktion

$$v(\mathbf{X}) = \alpha^{-1}(B_n(\mathbf{X}) + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{B} - \mathbf{U})).$$

Da mit der Funktion $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ auch die Umkehrfunktion $\alpha^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow J$ streng monoton steigend ist, ist der Wert $v(\mathbf{X})$ der Nutzenfunktion für den Zahlungsstrom **X** auch eine streng monoton steigende Funktion des Barwerts $B_n(\mathbf{X})$ von **X**. Diese Aussage ist gleichbedeutend dazu (siehe Anmerkung zur Vielfalt von mit Nutzenfunktionen beschriebenen Präferenzordnungen zu Beginn von Kapitel 6), dass die Nutzenfunktionen $v(\mathbf{X})$ und $B_n(\mathbf{X})$ die gleiche Präferenzordnung beschreiben.

Speziell mit der linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\ldots,0,\mu)^{\mathsf{T}}$ des Endwertmodells ist die Abstandsfunktion gegeben durch $\alpha(\mu) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu) = P_n\mu$ mit dem Diskontierungsfaktor $P_n = d_n = 1/q_1\cdot\ldots\cdot q_n$. Daher erhält man den Endwert

$$\begin{aligned}v(\mathbf{X}) &= \alpha(v(\mathbf{X}))/P_n\\ &= [B_n(\mathbf{X}) + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{B} - \mathbf{U})]/d_n\end{aligned}$$

der Replizierung von **X** als eine affin-lineare Funktion des Barwerts $B_n(\mathbf{X})$ von **X** mit der positiven Steigung $1/d_n = q_1\cdot\ldots\cdot q_n$.

Mit der linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \mathrel{\underset{\cdot}{>}} \mathbf{O}$, des Annuitätenmodells ist die Abstandsfunktion gegeben durch $\alpha(\mu) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mu$. Daher ergibt sich das Entnahmeniveau

$$v(\mathbf{X}) = [B_n(\mathbf{X}) + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{B} - \mathbf{U})]/\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$$

der Replizierung von **X** als eine affin-lineare Funktion des Barwerts $B_n(\mathbf{X})$ von **X** mit der positiven Steigung $1/\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$. Bei den verschiedenen Zielsetzungen des Entscheiders kann also die Beurteilung eines Zahlungsstroms **X** auch mittels des Barwerts $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ erfolgen.

Für einen unvollkommenen Kapitalmarkt wird in Kapitel 5 gezeigt, dass es genau so viele Präferenzordnungen gibt, wie es verschiedene L-disäquivalente inhomogene Beurteilungskurven W gibt.

Weiter wird in Abschnitt 5.3.1 mit Satz 5.2, 1) gezeigt, dass ein Barwertvergleich der Zahlungsströme mit einem einheitlichen Diskontierungsvektor **P** zumindest dann möglich ist, wenn auf dem Kapitalmarkt ein vollkommenes Supplementsystem L existiert. Die im vorliegenden Abschnitt behandelte Barwert-Präferenzordnung tritt auch noch in Abschnitt 6.2 bei der Behandlung der klassischen Barwertmethode auf, nämlich als der Spezialfall mit nicht gespaltenen fristigkeitsabhängigen Abzinsungsfaktoren $d_{0,j}$.

4.3.3 B-Präferenzordnung

4.3.3.1 Definition und Charakterisierung der B-Präferenzordnung

Die mittels der Barwertfunktion

$$B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} P_j X_j$$

($P_j = d_j > 0$ für $j = 0,\ldots,n$, $P_0 = d_0 = 1$) als spezieller homogen linearer Nutzenfunktion mit elementweise positiver $1 \times n$-Darstellungsmatrix $\mathbf{P}^\mathsf{T} = (P_0,\ldots,P_n)$ (siehe auch Abschnitt 1.2) definierte **Barwert-Präferenzordnung** (B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so vorteilhaft wie } \mathbf{Y}) \\ & :\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y}), \end{aligned}$$

lässt sich wegen der Linearität von $B_n(\mathbf{X})$ nach Zusatz 8.1.3 auch mittels der Menge W_+ ihrer $\trianglerighteq$-nichtnegativen Vektoren, also mittels der zum Nullpunkt $\mathbf{O}$ gehörigen Bessermenge

$$\begin{aligned} W_+ \ := \ W_+(\mathbf{O}) \ & := \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{D} \trianglerighteq \mathbf{O}\} \\ & = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n+1} : B_n(\mathbf{D}) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{D} \geq 0\} \\ & = H^{\geq}_{\mathbf{P},0} \end{aligned}$$

charakterisieren: Die Relation $\mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}$ ist genau dann gültig, wenn der Differenzvektor $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ der beiden Zahlungsströme bezüglich dieser Relation nichtnegativ ist, also in W_+ liegt.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so vorteilhaft wie } \mathbf{Y}) \\ & :\Leftrightarrow \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} \geq \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{Y} \\ & \Leftrightarrow \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{D} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \mathbf{D} \in H^{\geq}_{\mathbf{P},0} \\ & \Leftrightarrow \mathbf{D} \trianglerighteq \mathbf{O} \\ & \Leftrightarrow \mathbf{D} \in W_+. \end{aligned}$$

Aus der Linearität der Nutzenfunktion $B_n(\mathbf{X})$ ergibt sich auch, dass die zum Nullpunkt gehörige Bessermenge $W_+ = H^{\geq}_{\mathbf{P},0}$ ein topologisch abgeschlossener homogener Halbraum des $\mathbb{R}^{n+1}$, damit auch ein konvexer linearer Kegel und somit abgeschlossen bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation ist. Auf Grund der Charakterisierung der Relation $\trianglerighteq$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch die Menge W_+ ihrer nichtnegativen Vektoren und deren angegebenen geometrischen Eigenschaften folgt schon nach dem allgemeinen Satz 8.1.4 d), dass die Relation $\trianglerighteq$ eine Quasiordnung (eine **reflexive** und **transitive** zweistellige Relation) ist, die noch **abgeschlossen bei der Addition und der nichtnegativen Skalarmultiplikation** ist. Die **Totalität** (allgemeine Vergleichbarkeit) von $\trianglerighteq$, also dass $\trianglerighteq$ eine Präferenzordnung ist, folgt nach

Satz 8.1.4 c) aus der Eigenschaft $W_+ \cup (-W_+) = H^{\geq}_{\mathbf{P},0} \cup H^{\leq}_{\mathbf{P},0} = \mathbb{R}^{n+1}$. Die **Konvexität** der B-Präferenzordnung wird im Abschnitt 4.3.3.2 begründet, die **Monotonie** im Abschnitt 4.3.3.4.
Die Eigenschaften der Reflexivität und Transitivität einer Quasiordnung und die Abgeschlossenheit bezüglich der beiden Verknüpfungen können für die Relation $\trianglerighteq$ aber auch direkt aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften der totalen Ordnung $\geq$ in $\mathbb{R}$ abgeleitet werden. Die Totalität einer Präferenzordnung $\trianglerighteq$ folgt ebenso unmittelbar aus der Definition mittels der Barwerte, da für die Barwerte $B_n(\mathbf{X})$ und $B_n(\mathbf{Y})$ auf der bezüglich der strengen Ordnung $>$ total geordneten Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen das Trichotomiegesetz (Duden (1985), S. 341, 460) gilt, also genau eine der folgenden drei Aussagen gilt:

$$B_n(\mathbf{X}) > B_n(\mathbf{Y}),\ \ B_n(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{Y}),\ \ B_n(\mathbf{X}) < B_n(\mathbf{Y}).$$

Eine analoge Charakterisierung erhält man auch für die zugehörige Indifferenzrelation $\simeq$ und die zugehörige strenge Halbordnung $\triangleright$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \simeq \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist ebenso vorteilhaft wie } \mathbf{Y}) \\ & :\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{D} = 0 \\ & \Leftrightarrow \mathbf{D} \in H_{\mathbf{P},0} \\ & \Leftrightarrow \mathbf{D} \simeq \mathbf{O}, \\ \mathbf{X} \triangleright \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist vorteilhafter als } \mathbf{Y}) \\ & :\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{D} > 0 \\ & \Leftrightarrow \mathbf{D} \in H^{>}_{\mathbf{P},0} \\ & \Leftrightarrow \mathbf{D} \triangleright \mathbf{O}. \end{aligned}$$

Der Spezialfall

$$B_n(\mathbf{X},q) = \mathbf{P}(q)^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{-j}$$

der Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X})$ mit dem speziellen Diskontierungsvektor $\mathbf{P}(q) = (1,\ldots,1/q^n)^{\mathsf{T}}$ und dem konstanten nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor $q > 0$ wird in Abschnitt 6.3.7 näher untersucht. Seine Anwendung findet dieser Spezialfall in Kapitel 7 bei der Behandlung der Methode des internen Zinssatzes.

4.3.3.2 Indifferenzklassen und Bessermengen

Die Bessermenge $W_+(\mathbf{Y})$ eines beliebigen Zahlungsstroms $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zur B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ kann einerseits als Minkowski-Summe von $\mathbf{Y}$ und W_+,

$$\begin{aligned} W_+(\mathbf{Y}) \ &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}\} \\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D}, \mathbf{D} \trianglerighteq \mathbf{O}\} \\ &= \mathbf{Y} + W_+ \end{aligned}$$

mit

$$W_+ \ := W_+(\mathbf{O}) = H^{\geq}_{\mathbf{P},0},$$

und anderseits als affiner Halbraum dargestellt werden:

$$W_+(\mathbf{Y}) \ = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} \geq \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{Y} =: \eta\} = H^{\geq}_{\mathbf{P},\eta}.$$

Insbesondere ist jede Bessermenge $W_+(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + W_+$ auch ein konvexer affiner Kegel mit dem zugehörigen konvexen linearen Kegel $W_+ = H^{\geq}_{\mathbf{P},0}$, dem homogenen (linearen) Halbraum mit Normalenvektor **P**. Die B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ ist daher auch eine **konvexe** Präferenzordnung.
Für einen festen Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist die zur B-Indifferenzrelation $\simeq$ gebildete Indifferenzklasse (Äquivalenzklasse; bei $n = 1$ auch Indifferenzkurve genannt)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}\}\\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{Y} =: \eta\} = H_{\mathbf{P},\eta}\end{aligned}$$

die durch **Y** gehende affine Hyperebene $H_{\mathbf{P},\eta}$ mit dem Normalenvektor **P** und dem Parameter $\eta := \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{Y}$. Eine grafische Darstellung der Bessermenge und der Indifferenzkurve ist in Abbildung 4.8 angegeben. Speziell für $\mathbf{Y} = \mathbf{U}$ ist

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{U}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{U} =: \omega\} = H_{\mathbf{P},\omega}.$$

Speziell für die sogenannte Unterlassungsalternative $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ ist die Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}(\mathbf{O})$ gleich der homogenen (linearen) Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$, also gleich der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte:

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{D} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{O} = 0\} = H_{\mathbf{P},0} = K.$$

Somit ist die Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}(\mathbf{Y})$ von **Y** auch die Minkowski-Summe von **Y** und K:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\mathbf{Y}) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D}, \mathbf{D} \simeq \mathbf{O}\}\\ &= \mathbf{Y} + \mathrm{Ind}(\mathbf{O})\\ &= \mathbf{Y} + K.\end{aligned}$$

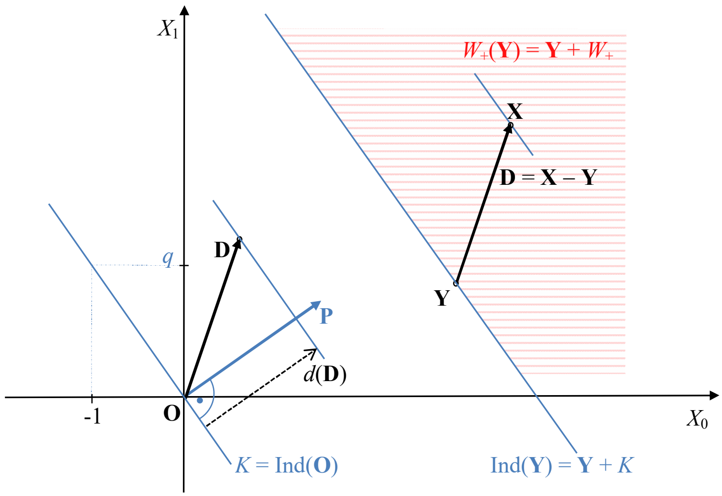


Abb. 4.8 Der Vergleich der Zahlungsströme **X** und **Y** mittels der B-Präferenzordnung für die Laufzeit $n = 1$ im Spezialfall eines einheitlichen Marktzinsfaktors $q = q_H = q_S$. Darstellung der Indifferenzkurve $\mathrm{Ind}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + K$ und der Bessermenge $W_+(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + W_+$ des Zahlungsstroms **Y** ($K = \mathrm{Ind}(\mathbf{O})$, $W_+ = W_+(\mathbf{O})$).

4.3.3.3 Beurteilung der Zahlungsströme mit der B-Präferenzordnung

Die B-Präferenzordnung liefert neben einem Vergleich verschiedener Zahlungsströme auch eine Beurteilung der einzelnen Zahlungsströme. Wählt man beispielsweise **U** als Nullpunkt der Bewertung bzw. die zugehörige Indifferenzklasse Ind(**U**) als Nulllinie der Bewertung, so können die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auch für sich bewertet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \rhd \mathbf{U} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist vorteilhaft}) \\
& :\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} > \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} = \omega \\
& \Leftrightarrow \mathbf{X} \in H^{>}_{\mathbf{P},\omega}, \\
\mathbf{X} \simeq \mathbf{U} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist indifferent, also weder vorteilhaft noch unvorteilhaft}) \\
& :\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} = \omega \\
& \Leftrightarrow \mathbf{X} \in H_{\mathbf{P},\omega}, \\
\mathbf{X} \lhd \mathbf{U} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist unvorteilhaft}) \\
& :\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} < \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} = \omega \\
& \Leftrightarrow \mathbf{X} \in H^{<}_{\mathbf{P},\omega}.
\end{aligned}$$

Bei der Festlegung des Bewertungsnullpunkts auf den Nullpunkt **O** des $\mathbb{R}^{n+1}$, also auf die sog. Unterlassungsalternative **O**, ist $K = H_{\mathbf{P},0}$ = Ind(**O**) die Nulllinie der Bewertung. In diesem Fall werden genau die Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S} \in K$ als indifferent (zu **O**), als weder vorteilhaft noch unvorteilhaft, angesehen. Weiter werden dann genau die Zahlungsströme im Halbraum $H^{>}_{\mathbf{P},0}$ als vorteilhaft und genau die Zahlungsströme im Halbraum $H^{<}_{\mathbf{P},0}$ als unvorteilhaft beurteilt.

4.3.3.4 Konvexität, Abgeschlossenheit und Monotonie der B-Präferenzordnung

Bei der obigen Behandlung der Bessermengen in Abschnitt 4.3.3.2 wurde schon festgestellt, dass die B-Präferenzordnung auch konvex ist. Die Abgeschlossenheit der Präferenzordnung $\unrhd$ bezüglich der Addition und der nichtnegativen Skalarmultiplikation wurde in Abschnitt 4.3.3.1 schon mittels Satz 8.1.4 d) begründet. Sie besitzt also bis auf die Eigenschaft (H2) der Identitivität alle Eigenschaften einer Halbordnung eines Vektorraums. Dafür weist sie aber als Präferenzordnung noch die Eigenschaft der Totalität auf. Weiter wird jetzt aus der Linearität der Nutzenfunktion $B_n(\mathbf{X})$ und der Positivität des Preisvektors **P** gefolgert, dass $\unrhd$ auch monoton ist: Für die Monotonie der Präferenzordnung $\unrhd$ ist für beliebige Zahlungsströme $\mathbf{X}, \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\boldsymbol{\delta} \gtrdot \mathbf{O}$, die Relation $\mathbf{X} + \boldsymbol{\delta} \rhd \mathbf{X}$ bzw. wegen der obigen Charakterisierung der strengen Halbordnung $\rhd$ die Relation $\boldsymbol{\delta} \rhd \mathbf{O}$ zu zeigen: Wegen der (strikten) Positivität von **P** und der schwachen Positivität von **δ** ist tatsächlich deren Skalarprodukt $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\delta}$ positiv und daher $\boldsymbol{\delta} \rhd \mathbf{O}$.

Die Abgeschlossenheit der B-Präferenzordnung $\unrhd$ wird jetzt auch noch direkt mit der Charakterisierung der Relation $\unrhd$ mittels der Differenzvektoren bewiesen. Dazu ist für beliebige Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}', \mathbf{Y}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit den Relationen $\mathbf{X} \unrhd \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}' \unrhd \mathbf{Y}'$ auch die Gültigkeit der Relationen $\lambda\mathbf{X} \unrhd \lambda\mathbf{Y}$ für $\lambda \geq 0$ und $\mathbf{X} + \mathbf{X}' \unrhd \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'$ zu zeigen. Dies ergibt sich aufgrund der Linearität von $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ jeweils aus der Ungleichung für den Barwert des entsprechenden Differenzvektors:

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\lambda\mathbf{X} - \lambda\mathbf{Y}) = \lambda\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \geq 0,$$
$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X} + \mathbf{X}' - \mathbf{Y} - \mathbf{Y}') = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(\mathbf{X}' - \mathbf{Y}') \geq 0.$$

Das Ergebnis über die Vielfalt der Präferenzordnungen, die sich mit den Konzepten Duplizierung und Replizierung auf einem vollkommenen Markt ergeben, wird nun in einem mathematischen Satz zusammengefasst. Es zeigt sich, dass die Zielsetzung des Entscheiders hinsichtlich der zeitlichen Verteilung seiner Konsumwünsche keinen Einfluss hat und allein der Preisvektor des vollkommenen Kapitalmarkts mit dem Barwert den Vergleich bestimmt.

Satz 4.1 Die Vielfalt der auf einem vollkommenen Kapitalmarkt mittels Duplizierung und Replizierung erhaltenen Präferenzordnungen in Abhängigkeit von der Beurteilungskurve

Es liege ein Kapitalmarkt vor, bei dem die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Kapitalmarktgeschäfte eine homogene Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, die keine Arbitragegelegenheit enthält:

$$K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O.$$

Für die Anwendung der Replizierung sei noch ein beliebiger Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n+1}$ fest vorgegeben. Mit jeder beliebigen inhomogenen Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu),$$

welche die oben angegebenen Eigenschaften besitzt, ist dann für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Duplizierung und die Replizierung jeweils nur auf eine einzige Weise möglich. Die beiden Konzepte liefern für alle Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ nur eine einzige Präferenzordnung auf dem Raum $\mathbb{R}^{n+1}$, nämlich die B-Präferenzordnung (Barwert-Präferenzordnung) $\trianglerighteq$, welche die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mittels ihrer Barwerte $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ vergleicht. Die Diskontierungsfaktoren P_j werden dazu durch den Preisvektor $\mathbf{P} \in K^{\perp}$ des vollkommenen Kapitalmarkts bestimmt, welcher der durch die Festlegung $P_0 = 1$ eindeutig bestimmte Normalenvektor der Hyperebene K ist. Die B-Präferenzordnung ist eine konvexe monotone und bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation abgeschlossene Präferenzordnung.

5 Bewertung sicherer Zahlungsströme auf unvollkommenem Kapitalmarkt

Hinsichtlich der Möglichkeit, für die Zahlungsströme der Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Duplizierung bzw. Replizierung durchführen zu können, wird jetzt nach der Behandlung des vollkommenen Kapitalmarkts noch der einfachste Fall eines unvollkommenen Kapitalmarkts betrachtet. Auf diesem Kapitalmarkt ist im Allgemeinen die Umkehrung der Kapitalmarktgeschäfte nicht möglich. Dies heißt, dass beim Kauf und Verkauf von Finanztiteln verschiedene Preise auftreten. Für diese Untersuchung werden zuerst die Anforderungen an den Kapitalmarkt und an die Instrumente der Duplizierung bzw. Replizierung, nämlich an das Supplementsystem von Kapitalmarktgeschäften und die Beurteilungskurve, zusammengestellt. Dann werden in Abhängigkeit vom Supplementsystem Berechnungsmethoden für die beiden Konzepte dargestellt. Für die aus den Konzepten resultierenden D- und R-Präferenzordnungen werden deren Eigenschaften untersucht: Geometrische Beschreibung der Indifferenzklassen und Bessermengen, Nichtkonvexität oder Konvexität der Präferenzordnung, Abgeschlossenheit bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation. Weiter wird deren Vielfalt in Abhängigkeit vom Supplementsystem und von der Beurteilungskurve beschrieben. Außerdem wird ein Vergleich der verschiedenen Präferenzordnungen durchgeführt, insbesondere der Vergleich der zu gleichem Supplementsystem und gleicher Beurteilungskurve gehörigen D- und R-Präferenzordnung.

5.1 Mathematische Anforderungen an Kapitalmarkt und Beurteilungskurve

5.1.1 Kegelstruktur des Kapitalmarkts

An den Kapitalmarkt werden in diesem Abschnitt nahezu die gleichen Anforderungen gestellt wie beim vollkommenen Kapitalmarkt im Abschnitt 4.1. Es wird aber die Voraussetzung weggelassen, dass mit jedem Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{S}$ auch der umgekehrte Zahlungsstrom $\mathbf{R} = -\mathbf{S}$ zur Menge K der Kapitalmarktgeschäfte gehört. Die Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S}$ sind also im Allgemeinen in der Menge K nicht umkehrbar und es gibt zumindest ein Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{T} \in K$ mit $-\mathbf{T} \notin K$. Dies ist der wichtigste Fall der Behandlung eines unvollkommenen Kapitalmarkts. Die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte wird somit nur als ein **konvexer linearer Kegel** vorausgesetzt. Insbesondere gibt es auf diesem Kapitalmarkt für die Geldanlagen und auch für die Kreditaufnahmen keine Einschränkung des Umfangs. Anzumerken ist, dass in der nachfolgenden Untersuchung der konvexe lineare Kegel K der Kapitalmarktgeschäfte nicht endlich erzeugbar und damit auch nicht topologisch abgeschlossen sein muss. Es wird also kein endliches Erzeugendensystem $G \subseteq K$ von Kapitalmarktgeschäften vorausgesetzt mit cone $G = K$. Ein Beispiel für eine nicht endlich erzeugbare Menge K von Kapitalmarktgeschäften wird in Abschnitt 5.1.3 angegeben.

5.1.2 Arbitragefreiheit und Existenz eines positiven Normalenvektors für den Linienraum

Die Gesamtheit der auf dem Kapitalmarkt umkehrbaren Kapitalmarktgeschäfte **S** (mit - **S** $\in K$) bildet den sogenannten **Linienraum**

$$V := K \cap (-K)$$

des konvexen linearen Kegels K. Dieser Linienraum V ist der größte in K enthaltene Vektorunterraum (siehe Abschnitt 8.1.2). Er enthält alle in K umkehrbaren Kapitalmarktgeschäfte, die in Abschnitt 5.3 auch als vollkommene Kapitalmarktgeschäfte bezeichnet werden, und kann daher auch als Linienraum der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte oder Linienraum des Kapitalmarkts bezeichnet werden. Auf einem vollkommenen Kapitalmarkt ist $V = K$. Weiter ist wegen der vorausgesetzten **Arbitragefreiheit**, d. h. wegen

(AF) $$K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O,$$

die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte kleiner als der gesamte Raum: $K \neq \mathbb{R}^{n+1}$. Auf Grund der Arbitragefreiheit von K und damit auch des linearen Unterraums V ($\subseteq K$) der in K umkehrbaren Kapitalmarktgeschäfte ($V \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) gibt es nach dem Alternativsatz 8.2.3 b) über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel einen positiven Vektor $\mathbf{P} \in V^{\perp}$ (o. E. mit $P_0 = 1$) mit

$$V \subseteq H_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0\},$$
$$\dot{\mathbb{R}}^{n+1}_{+0} \subseteq H^{>}_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} > 0\}.$$

Diesem Satz entspricht der Alternativsatz von Stiemke[1] über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen, der wiederum in seiner inhomogenen Form im engen Zusammenhang mit dem Minkowski-Farkas-Lemma[2] steht. Ein Vergleich der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma wird in Abschnitt 8.2.3.5 durchgeführt. Der Linienraum V und der punktierte nichtnegative Orthant

$$\dot{\mathbb{R}}^{n+1}_{+0} = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{Z} \mathrel{\underset{\cdot}{\geq}} \mathbf{O}\} = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{Z} \geq \mathbf{O}, \mathbf{Z} \neq \mathbf{O}\}$$

werden durch die homogene Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ getrennt, wobei V in der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ und $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}_{+0}$ im offenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{P},0}$ liegt. Diese Existenz eines **positiven Normalenvektors P** für den Linienraum V spielt sowohl auf dem vollkommenen als auch auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt eine wichtige Rolle bei der Untersu-

---

1 Dieser Satz wurde vom deutschen Mathematiker Erich Stiemke (1892–1915) bewiesen, der an der Berliner Universität studierte.

2 Dieses Lemma wurde unabhängig voneinander 1902 vom ungarischen Physiker und Mathematiker Julius (Gyula) Farkas (1847–1930) und vom deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (1864–1909) bewiesen.

chung der Vielfalt der Präferenzordnungen, die nach den Konzepten der Duplizierung (Nachbildung) und der Replizierung (Glattstellung) konstruiert werden. Auf einem vollkommenen Kapitalmarkt stimmt der Linienraum V mit der Hyperebene K der Kapitalmarktgeschäfte überein. In diesem Fall ist der Normalenvektor $\mathbf{P} \in V^{\perp} = K^{\perp}$ der Hyperebene K der Preisvektor des vollkommenen Kapitalmarkts, dessen Komponenten P_j die Preise der reinen Wertpapiere $\check{\mathbf{D}}^j = \mathbf{e}_{j+1} = (0,..,0,+1,0,..,0)^{\mathsf{T}}$ sind ($j = 1,\ldots,n$; siehe Abschnitt 4.1.4).
Im nachfolgenden Beispiel wird für den Spezialfall der Laufzeit $n = 1$ und einer endlich erzeugten Menge K von Kapitalmarktgeschäften die Arbitragefreiheit mittels der Marktzinsfaktoren charakterisiert.

Beispiel 5.1 Charakterisierung der Arbitragefreiheit für die endlich erzeugte Menge der Kapitalmarktgeschäfte im Fall $n = 1$ durch Bedingungen an die Marktzinsfaktoren

Für die Laufzeit $n = 1$ sei die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ der Kapitalmarktgeschäfte gegeben durch den endlich erzeugten konvexen linearen Kegel

$$K = \text{cone}\ \{\mathbf{I},\mathbf{F}\} = \{\alpha\mathbf{I} + \kappa\mathbf{F} : \alpha, \kappa \geq 0\}$$

mit der Investition $\mathbf{I} = (-1,q_H)^{\mathsf{T}}$, der Finanzierung $\mathbf{F} = (1,-q_S)^{\mathsf{T}}$ und den Marktzinsfaktoren $q_H, q_S \in \mathbb{R}$. In dieser Menge K gibt es eine sogenannte Arbitragegelegenheit, wenn aus den zur Verfügung stehenden Kapitalmarktgeschäften ein Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = \alpha\mathbf{I} + \kappa\mathbf{F} = (\kappa - \alpha,\alpha q_H - \kappa q_S)^{\mathsf{T}} \in K$$

mit der Eigenschaft $\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ (d. h. $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$ und $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$) einer „Gelddruckmaschine" gebildet werden kann. In der Mengenschreibweise bedeutet dies, dass der konvexe lineare Kegel K mit dem schwach positiven (punktierten nichtnegativen) Quadranten

$$\dot{\mathbb{R}}^2_{+0} = \mathbb{R}^2_{+0} \setminus O = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{Z} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}\}$$

einen nichtleeren Durchschnitt hat. In einem funktionierenden Markt für nutzenorientierte Marktteilnehmer wird eine Arbitragegelegenheit durch das Anpassen der Preise jedoch nur für eine kurze Zeit bestehen. Es wird nun eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Größenverhältnisses der Marktzinsfaktoren q_H und q_S vorgenommen. Eine Illustrierung dieser drei Fälle wird durch die sich ergebende geometrische Struktur des konvexen Kegels K und seines Durchschnitts mit dem schwach positiven Quadranten in der Abbildung 5.1 gegeben.
Im Fall $q_S \leq 0$ liefert die Finanzierung $\mathbf{F} = (1,-q_S)^{\mathsf{T}} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ eine Arbitragegelegenheit. Im Fall $q_S < q_H$ liefert die Summe

$$\mathbf{I} + \mathbf{F} = (0,q_H - q_S)^{\mathsf{T}} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$$

eine Arbitragegelegenheit. Daher sind die beiden Bedingungen

$$q_S > 0 \text{ und } q_H \leq q_S$$

notwendig für die Arbitragefreiheit der Menge K.
Es wird nun gezeigt, dass diese beiden Bedingungen auch hinreichend, also insgesamt charakteristisch für die Arbitragefreiheit der Menge K sind. Für jedes Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{X} = \alpha\mathbf{I} + \kappa\mathbf{F} \in K$, $\alpha, \kappa \geq 0$, ist also nachzuweisen, dass es unter diesen Voraussetzungen nicht schwach positiv ist: $\mathbf{X} \not\underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$.
Für $\alpha = 0$, $\kappa > 0$ besitzt

$$\mathbf{X} = \kappa\mathbf{F} = \kappa(1,-q_S)^{\mathsf{T}}$$

wegen $-q_S < 0$ einen Vorzeichenwechsel, sodass $\mathbf{X}$ nicht schwach positiv ist.
Es ist somit nur noch der Fall $\alpha > 0$ und o. E. (ohne Einschränkung) $\alpha = 1$ zu betrachten. Hinsichtlich der Größe von $\kappa \geq 0$ werden nun drei Fälle betrachtet:
i) Im Fall $\kappa > 1$ hat das Kapitalmarktgeschäft

$$\mathbf{X} = (X_0,X_1)^{\mathsf{T}} = (\kappa - 1,q_H - \kappa q_S)^{\mathsf{T}}, \kappa \geq 0,$$

die Komponenten $X_0 = \kappa - 1 > 0$, $X_1 = q_H - \kappa q_S < q_H - q_S \leq 0$ und somit einen Vorzeichenwechsel. Demnach ist $\mathbf{X}$ nicht schwach positiv.

ii) Im Fall $\max \{0, q_H/q_S\} \leq \kappa \leq 1$ ist $X_0 = \kappa - 1 \leq 0$, $X_1 = q_S(q_H/q_S - \kappa) \leq 0$, $\mathbf{X} \leq \mathbf{O}$ und $\mathbf{X}$ nicht schwach positiv.

iii) Im Fall $q_H > 0$, $0 \leq \kappa < q_H/q_S$ ist $X_0 = \kappa - 1 < q_H/q_S - 1 \leq 0$, $X_1 = q_S(q_H/q_S - \kappa) > 0$, sodass $\mathbf{X}$ einen Vorzeichenwechsel besitzt und nicht schwach positiv ist.

Damit ist die Charakterisierung der Arbitragefreiheit der Menge K durch die beiden Vorzeichenbedingungen $q_S > 0$ und $q_H \leq q_S$ nachgewiesen. △

Fall α) $q_S > q_H$ Fall β) $q_S = q_H = q$ Fall γ) $q_S < q_H$

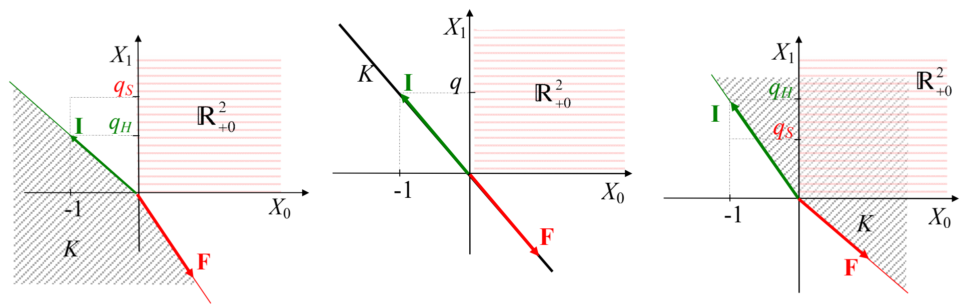


Abb. 5.1 Der Schnitt der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte mit dem nichtnegativen Orthanten für die Laufzeit $n = 1$, $q_S > 0$ und die drei Fälle α) $q_S > q_H$, β) $q_S = q_H$, γ) $q_S < q_H$

5.1.3 Voraussetzung eines Supplementsystems im Kapitalmarkt

Damit der Kapitalmarkt nicht zu dürftig ausfällt und die Konzepte der Duplizierung und Replizierung ermöglicht, wird noch die Existenz von speziellen Kapitalmarktgeschäften gefordert. Diese Kapitalmarktgeschäfte sollen dem Entscheider zur Verfügung stehen und bei der Duplizierung bzw. Replizierung als Ergänzungsgeschäfte (Supplemente[3]) dienen, um zu jedem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau einen beurteilbaren und vergleichbaren Margenzahlungsstrom zu konstruieren. Plausibilitätsbetrachtungen zur Frage, wie die Duplizierung bzw. die Replizierung eines Zahlungsstroms mittels Kapitalmarktgeschäften möglichst allgemein zu fassen ist, findet man in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2.

Beim vollkommenen Kapitalmarkt wird dementsprechend die Existenz eines Systems $S = \{\mathbf{S}^1, \ldots, \mathbf{S}^n\}$ von n linear unabhängigen Kapitalmarktgeschäften vorausgesetzt. Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit und damit eines positiven Preisvektors ist dies dort gleichbedeutend zur Existenz der einperiodischen oder der $(n\text{-}j+1)$-periodischen Termingeschäfte $\mathbf{T}^j$, der reinen Wertpapiere $\mathbf{D}^j$ oder der j-periodischen Kassageschäfte $\mathbf{K}^j$ $(j = 1,\ldots,n)$. Wie beim vollkommenen Kapitalmarkt können auch hier beim unvollkommenen Kapitalmarkt bei gesicherter eindeutiger Duplizierung bzw. Replizierung auf dem Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ der Zahlungsströme noch Präferenzordnungen definiert und deren Eigenschaften untersucht werden. Insbesondere

[3] Die Bezeichnung Supplement kommt vom lateinischen supplementum für Ergänzung und wird schon von Heister (1962), S. 37, für das Ergänzungsgeschäft verwendet.

wird auch deren Vielfalt in Abhängigkeit von dem verwendeten Supplementsystem und der gewählten Beurteilungskurve beschrieben.
Hier beim unvollkommenen Kapitalmarkt soll es nun ein endliches System L von Kapitalmarktgeschäften, das **Supplementsystem** $L \subseteq K$, geben, das sich aus n linear unabhängigen Investitionen (lexikonegativen Zahlungsströmen)

$$\mathbf{I}^j = \mathbf{S}_H^j = (S_{H,0}^j, \ldots, S_{H,n}^j)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und n linear unabhängigen Finanzierungen (lexikopositiven Zahlungsströmen)

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{S}_S^j = (S_{S,0}^j, \ldots, S_{S,n}^j)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$(j = 1,\ldots,n)$ zusammensetzt,

$$L = \{\mathbf{S}_H^1, \ldots, \mathbf{S}_H^n, \mathbf{S}_S^1, \ldots, \mathbf{S}_S^n\} = L_I \cup L_F \text{ mit}$$

$$L_I = \{\mathbf{S}_H^1, \ldots, \mathbf{S}_H^n\},\ L_F = \{\mathbf{S}_S^1, \ldots, \mathbf{S}_S^n\},$$

und für welches nachfolgend noch weitere Eigenschaften gefordert werden. Anzumerken ist hier, dass diese Supplemente $\mathbf{S}_D^j$, $D = H, S$, nicht notwendig mit Haben- oder Soll-Zinssätzen konstruiert sein müssen.

Zahlungsorientierte Definition einer Investition bzw. Finanzierung: Die zahlungsorientierte Definition einer Investition bzw. einer Finanzierung (siehe z. B. Gerke und Bank (1998), S. 7) wird hier etwas allgemeiner auch für die Zahlungsströme (Zahlungsfolgen) $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ gefasst, die mit einer ersten Zahlung $X_0 = 0$ beginnen können: Die Zahlungsfolge

$$\mathbf{X} = (0,\ldots,0,X_m,\ldots,X_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{O}\} \qquad (0 \le m \le n)$$

wird als Investition (bzw. Finanzierung) bezeichnet, wenn die erste von Null verschiedene Komponente X_m eine Auszahlung (bzw. eine Einzahlung) darstellt, wenn also für einen Index m, $0 \le m \le n$, gilt:

$$X_j = 0 \text{ für } j = 0,\ldots,m\text{-}1,\ X_m < 0 \ \text{ (bzw. } X_m > 0).$$

Bezüglich der lexikografischen Ordnung „➤" (siehe z.B. Duden (1985), S. 375, Vieweg Mathematik Lexikon (1995), S. 173, Collatz und Wetterling (1971), S. 21, Jarre und Stoer (2004), S. 41) im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind dann die Finanzierungen die lexikopositiven (lexikografisch positiven) Zahlungsfolgen ($\mathbf{X} \succ \mathbf{O}$) und die Investionen die lexikonegativen (lexikografisch negativen) Zahlungsfolgen ($\mathbf{X} \prec \mathbf{O}$ bzw. $-\mathbf{X} \succ \mathbf{O}$).
Weiter ist zur Notation anzumerken, dass hier bei den Kapitalmarktgeschäften $\mathbf{S}_H^j$ und $\mathbf{S}_S^j$ zur Beschreibung des Supplementtyps auch die unteren Indizes H und S als Abkürzungen für Haben- und Sollzinssatz statt der Indizes I und F für Investition und Finanzierung verwendet werden, da in den nachfolgenden Beispielen für L nur reguläre Investitionen und reguläre Finanzierungen auftreten, also Zahlungsströme mit jeweils genau einem Vorzeichenwechsel. Derartige Zahlungsströme besitzen jeweils genau einen positiven internen Zinsfaktor und können mittels dieses Zinsfaktors auf einem Verrechnungskonto (Abk.: VK; Anlage- oder Kreditkonto) verrechnet werden, ohne dass die Kontostände das Vorzeichen wechseln. Demnach können diese internen Zinsfaktoren als Haben- oder Sollzinsfaktoren und diese Zahlungsströme als Anlage- oder Kreditzahlungsströme bezeichnet werden. Die Indizes $D = H, S$ beschreiben den Typ bzw. die Handlungsrichtung (Diathese) des Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S}_D^j$, welches im Bankenbereich demgemäß auch als Aktiv- oder Passivgeschäft bezeichnet wird.

Für die Formulierung der Konzepte der Duplizierung und Replizierung auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt wird zur Indexmenge

$$M = \{H,S\}$$

auch noch deren n-fache Produktmenge (kartesisches Produkt benannt nach René

Descartes[4], Mengenprodukt, Kreuzprodukt; siehe Duden (1985), S. 307f)

$$M^n = M \times M \times \ldots \times M$$
$$= \{\mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) : E_j = H \text{ oder } E_j = S \text{ für } j = 1,\ldots,n\}$$

gebildet. Diese Produktmenge besteht aus 2^n Indexvektoren, den Supplementtypvektoren.

Es wird nun noch vorausgesetzt, dass auch jedes zu einem Indexvektor $\mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) \in M^n$ gehörige n-Tupel

$$L_\mathbf{E} = (\mathbf{S}^1_{E_1},\ldots,\mathbf{S}^n_{E_n}) \in L_1 \times \ldots \times L_n,\;\; L_j = \{\mathbf{S}^j_H, \mathbf{S}^j_S\},$$

aus der Produktmenge der n Supplementpaare $L_j = \{\mathbf{S}^j_H, \mathbf{S}^j_S\}$ ($j = 1,\ldots,n$) von L aus n linear unabhängigen Zahlungsströmen bestehen soll und somit die $(n+1) \times n$-Matrix $L_\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ vollen Spaltenrang, also Rang $L_\mathbf{E} = n$, besitzt. Demnach ist die zugehörige lineare Hülle

$$H_\mathbf{E} := [L_\mathbf{E}] = \text{lin } L_\mathbf{E} = \text{lin } \{\mathbf{S}^1_{E_1},\ldots,\mathbf{S}^n_{E_n}\}$$

eine homogene Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\dim H_\mathbf{E} = n.$$

Insbesondere folgt auch, dass je zwei Vektoren $\mathbf{S}^j_D$ und $\mathbf{S}^k_F$ ($j, k \in I_n = \{1,\ldots,n\}$; $D, F \in M$, $(j,D) \neq (k,F)$) des Supplementsystems L nicht den gleichen von $\mathbf{O}$ ausgehenden Strahl (Halbgerade) erzeugen:

$$\text{ray } \mathbf{S}^j_D \neq \text{ray } \mathbf{S}^k_F .$$

Beweis: Für $j \neq k$ folgt dies, da dann die beiden Vektoren $\mathbf{S}^j_D$ und $\mathbf{S}^k_F$ in einem passenden n-Tupel $L_\mathbf{E}$ enthalten sind und allgemein eine nichtleere Teilmenge einer linear unabhängigen Menge von Vektoren ebenfalls linear unabhängig ist (siehe beispielsweise die Lehrbücher der Linearen Algebra von Wagner (1981), S. 33; Bröcker (2004), S. 40). Der Vektor $\mathbf{S}^j_D$ ist dann kein reellwertiges Vielfaches und somit auch kein positives Vielfaches von $\mathbf{S}^k_F$.

Für $j = k$ folgt dies, da $\mathbf{S}^j_H$ als Investition lexikonegativ und $\mathbf{S}^j_S$ als Finanzierung lexikopositiv ist und somit keiner der beiden Vektoren ein positives Vielfaches des anderen Vektors ist. Dabei können hier die beiden Vektoren aber linear abhängig sein und entgegengesetzte Strahlen erzeugen (ray $\mathbf{S}^j_D$ = - ray $\mathbf{S}^k_F$). □

Beispiel 5.2 Eine nicht endlich erzeugbare Menge K von Kapitalmarktgeschäften

Für die Laufzeit $n = 2$ sei die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kapitalmarktgeschäfte gegeben durch den konvexen linearen Kegel

$$K := \text{cone } G$$

mit der durch den Umkreis der drei Punkte

$$\mathbf{I}^1 = (-1;0{,}5;0)^\mathsf{T},$$
$$\mathbf{F}^1 = (1;-2;0)^\mathsf{T},$$
$$\mathbf{I}^2 = (0;-1;0{,}5)^\mathsf{T}$$

begrenzten abgeschlossenen Kreisscheibe G. Da die Kreisscheibe G ein unendliches Erzeu-

[4] René Descartes bzw. latinisiert Renatus Cartesius (1596–1650) war ein französischer Philosoph, Naturwissenschaftler und Mathematiker und gilt als Begründer des modernen frühneuzeitlichen Rationalismus und der analytischen Geometrie.

gendensystem bei der Bildung der konischen Hülle K = cone G ist und kein Punkt von G bei der Hüllenbildung weggelassen werden kann, besitzt der konvexe lineare Kegel K kein endliches Erzeugendensystem: Nimmt man nämlich einen Punkt $\mathbf{X} \in G$ weg, so fehlt in K der Strahl ray $\mathbf{X} \setminus O = \{\lambda\mathbf{X} : \lambda > 0\}$.

Mit der Koordinatendarstellung

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}^2 + \lambda_1\mathbf{U}^1 + \lambda_2\mathbf{U}^2 \qquad (\mathbf{U}^1 = \mathbf{I}^1 - \mathbf{I}^2,\ \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^1 - \mathbf{I}^2,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

für den Mittelpunkt **M** der Kreisscheibe G in der durch die drei Punkte aufgespannten Ebene erhält man aus den drei quadratischen Kreisgleichungen

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{X}\| = r^2 \qquad (\mathbf{X} = \mathbf{I}^1, \mathrm{I}^2, \mathbf{F}^1)$$

(z. B. mit Mathematica) den Kreisradius r = 2,679 und die Koordinaten λ_1 = 2,3 und λ_2 = 2,8, also

$$\mathbf{M} = (0{,}50;-0{,}35;-2{,}05)^\mathsf{T}.$$

Wählt man noch $\mathbf{F}^2 = (0;1;-q_{2,S})^\mathsf{T}$ als vierten Punkt auf dem Umkreis, so erhält man aus der Kreisgleichung $\|\mathbf{M} - \mathbf{F}^2\| = r^2$ den Zinsfaktor $q_{2,S}$ = 4,309 und den Punkt

$$\mathbf{F}^2 = (0;1;-4{,}309)^\mathsf{T}.$$

Die damit gebildete Menge

$$L = \{\mathbf{I}^1, \mathbf{I}^2, \mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2\} \subseteq G \subseteq K$$

ist dann ein Supplementsystem von in Abschnitt 8.4 beschriebenen Termingeschäften und es gilt

$$C := \text{cone } L \neq \text{cone } G = K.$$

△

5.1.4 Aufspannung des Raums $\mathbb{R}^{n+1}$ mittels Supplementsystem und Beurteilungskurve

An die im Intervall $J =]a,b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, definierte homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ und die inhomogene **Beurteilungskurve** (Präferenzkurve, Zielsetzungskurve) $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ für die Beschreibung der Zielsetzung des Entscheiders werden die gleichen Anforderungen wie bei der Behandlung des vollkommenen Kapitalmarkts gestellt (siehe Abschnitt 4.2.1 und Abschnitt 8.3.3). Insbesondere ist $\mathbf{V}(\mu)$ streng monoton steigend, an den Intervallgrenzen a und b unbeschränkt und jede mit einem positiven Vektor $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gebildete reellwertige Funktion

$$\alpha(\mu) := \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu) = \sum_{j=0}^{n} P_j V_j(\mu)$$

streng monoton steigend und ebenfalls an den Intervallgrenzen a und b unbeschränkt.

Zur Sicherung der Existenz der Duplizierung bzw. Replizierung eines beliebigen Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ soll das ausgewählte endliche System L von Kapitalmarktgeschäften gewährleisten, dass der von L erzeugte konvexe lineare Kegel

$$\begin{aligned} C &:= \text{cone } L \\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{I}^j + \sum_{k=1}^{n} \kappa_k \mathbf{F}^k,\ \alpha_j, \kappa_k \geq 0\} \\ &= \{\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{S}^j : \exists\, k \in \mathbb{N},\ \mathbf{S}^j \in L,\ \lambda_j \geq 0 \text{ für } j = 1,\ldots,k\} \end{aligned}$$

$\subseteq K$ zusammen mit der Spur der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ bzw. $-\mathbf{V}(\mu)$ den gesamten

Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ als Minkowski-Summe aufspannt:

$$\text{cone } L + \mathbf{V}(J) = \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{bei der Duplizierung,}$$
$$\text{cone } L - \mathbf{V}(J) = \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{bei der Replizierung.}$$

Es wird dabei aber nicht gefordert, dass der von L erzeugte konvexe Kegel C = cone L gleich der gesamten Menge K der Kapitalmarktgeschäfte ist. Die Menge L ist also im Allgemeinen kein Erzeugendensystem für den konvexen linearen Kegel K aller Kapitalmarktgeschäfte. Der Teilkegel C von K ist aber als endlich erzeugter konvexer linearer Kegel nach dem Polyederdarstellungssatz (siehe Abschnitt 8.2) ein polyedrischer Kegel und damit als Polyeder topologisch abgeschlossen.
Jeder Zahlungsstrom $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1}$ soll also zumindest eine additive Zerlegung in ein Supplement (Ergänzungsgeschäft) $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{Z}) \in C = \text{cone } L \subseteq K$ und einen Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z}))$ bzw. $-\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z}))$ besitzen:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{Z}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})) \quad \text{für die Duplizierung von } \mathbf{X} = \mathbf{Z} + \mathbf{U},$$
$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{Z}) - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})) \quad \text{für die Replizierung von } \mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{Z}.$$

Im Spezialfall einer zum Nullpunkt $\mathbf{O} = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ punktsymmetrischen homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ ($\mathbf{V}(-\mu) = -\mathbf{V}(\mu)$ für $\mu \in J$) sind die beiden Bedingungen gleichwertig.

5.1.5 Definition der zulässigen Supplementmenge mit dem Verbot der gleichzeitigen Ergänzungsinvestition und Ergänzungsfinanzierung

Bei der Supplementbildung in C soll nun noch zu jedem Zeitpunkt j das Verbot der gleichzeitigen Ausführung einer Ergänzungsinvestition $\mathbf{S}_H^j$ und einer Ergänzungsfinanzierung $\mathbf{S}_S^j$ beachtet werden. Zur Plausibilität dieses Verbots führt Kruschwitz (1998), S. 57, an, dass die gleichzeitige Ausführung seiner einperiodischen Ergänzungsgeschäfte $\mathbf{S}_H^j$ und $\mathbf{S}_S^j$ einen Kombinationszahlungsstrom

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_H^j + \mathbf{S}_S^j &= \mathbf{T}_H^j - \mathbf{T}_S^j \\ &= (0,\ldots,0,-1,+q_{jH},0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} - (0,\ldots,0,-1,+q_{jS},0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \\ &= (0,..,0,q_{jH} - q_{jS},0,..,0)^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

ergibt, der allein aus der zum Zeitpunkt $t = j$ fälligen Auszahlung $-(q_{jS} - q_{jH})$ (< 0 bei $q_{jS} > q_{jH}$) besteht und somit für den Entscheider ein echt ungünstiger Zahlungsstrom ist. Kruschwitz (1998), S. 43–86, rechnet seine Glattstellung (Replizierung) der zu beurteilenden Investitionen mit zwei speziellen Glattstellungskurven (Beurteilungskurven), die das sogenannte Vermögensstreben und das sogenannte Einkommensstreben präzisieren. Als Ergänzungsgeschäfte verwendet er dabei einperiodische und daher jeweils mit einem Zinsfaktor beschreibbare Investitionen und Finanzierungen. Eine ausführlichere Beschreibung der von Kruschwitz verwendeten Methoden findet man in Abschnitt 3.3.
Für das Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{Z}) = \mathbf{S}$ wird nun also nur der folgende spezielle Supplementansatz verwendet:

$$\mathbf{S} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{S}_{E_j}^j = L_{\mathbf{E}} \boldsymbol{\lambda},$$

$$\mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) \in M^n,\ L_\mathbf{E} = (\mathbf{S}^1_{E_1},\ldots,\mathbf{S}^n_{E_n}),\ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n_{+0},$$

mit der Supplementbedingung

(SB) $\quad \lambda_j \geq 0$ für $E_j = H$,
$\quad \lambda_j > 0$ für $E_j = S$.

Eine derartige Linearkombination der Supplemente $\mathbf{S}^j_{E_j} \in L$, bei der die Supplementbedingung (SB) erfüllt ist, wird hier auch als eine SB-Linearkombination des Supplementsystems L bezeichnet. Die hier zugelassenen Supplemente bilden in K die Teilmenge

$$C_{M^n} := \bigcup_{\mathbf{E}\in M^n} Z_\mathbf{E} = \bigcup_{\mathbf{E}\in M^n} C_\mathbf{E}$$

mit den Mengen

$$Z_\mathbf{E} := \{\mathbf{S} = L_\mathbf{E}\boldsymbol{\lambda} : \lambda_j \geq 0 \text{ bei } E_j = H \text{ und } \lambda_j > 0 \text{ bei } E_j = S\},$$

bzw. mit den konvexen linearen Kegeln

$$C_\mathbf{E} := \text{cone } L_\mathbf{E} = \{\mathbf{S} = L_\mathbf{E}\boldsymbol{\lambda} : \lambda_j \geq 0\}, \qquad \mathbf{E} \in M^n.$$

Die Menge C_{M^n} ist die Vereinigung der sogenannten **Transformationskegel** (Transaktionskegel) $C_\mathbf{E}$ und wird hier als **zulässige Supplementmenge** oder als gesamter Transformationskegel bezeichnet. Die Menge C_{M^n} ist als Vereinigung der konvexen linearen Kegel $C_\mathbf{E}$ ein linearer Kegel,

$$\lambda C_{M^n} \subseteq C_{M^n} \text{ für alle } \lambda \geq 0,$$

aber im Allgemeinen nicht abgeschlossen bezüglich der Addition und somit kein konvexer linearer Kegel. Die Transformationskegel $C_\mathbf{E} = \text{cone } L_\mathbf{E}$, $\mathbf{E} \in M^n$, sind als sogenannte endlich erzeugte konvexe lineare Kegel nach dem Polyederdarstellungssatz (siehe Abschnitt 8.2) polyedrische Kegel und als Polyeder topologisch abgeschlossen. Im Spezialfall der Laufzeit $n = 1$ sind C_H und C_S die vom Nullpunkt $\mathbf{O} = (0,0)^\mathsf{T}$ ausgehenden Transformationsstrahlen (Transformationshalbgeraden, Transaktionshalbgeraden).

Bei den Mengen $Z_\mathbf{E}$ ist nur $Z_\mathbf{E}$ für $\mathbf{E} = (H,H,\ldots,H)$ abgeschlossen und nur $Z_\mathbf{E}$ für $\mathbf{E} = (S,S,\ldots,S)$ offen. Die anderen $Z_\mathbf{E}$ sind weder abgeschlossen noch offen.

Es gelten die Mengeninklusionen

$$L \subseteq C_{M^n} \subseteq C \subseteq K.$$

Durch dieses Verbot der gleichzeitigen Ausführung einer Ergänzungsinvestition und einer Ergänzungsfinanzierung ist die Supplementmenge auf C_{M^n} eingeschränkt. Bei Beachtung dieses Verbots soll also statt C schon die zulässige Supplementmenge C_{M^n} zusammen mit der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ den gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ aufspannen:

$$C_{M^n} + \mathbf{V}(J) = \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{bei der Duplizierung,}$$

$$C_{M^n} - \mathbf{V}(J) = \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{bei der Replizierung.}$$

Für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bzw. für jeden Differenzvektor $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{X} - \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n+1}$ soll es also mindestens einen Indexvektor

$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, ein zulässiges Supplement $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in Z_{\mathbf{E}(\mathbf{X})}$, einen Beurteilungsparameter $\mu = \mu(\mathbf{X}) \in J$ und Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ geben, sodass mit diesen die Gleichung der **Duplizierung** (Nachbildung, additiven Zerlegung) von $\mathbf{X}$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in Z_{\mathbf{E}(\mathbf{X})} \subseteq C_{M^n}\ ,\end{aligned}$$

bzw.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{S}^j_{E_j(\mathbf{X})} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \mathbf{U} = \boldsymbol{\zeta}.$$

Falls eine mögliche Festlegung der Supplementtypindizes $E_j(\mathbf{X}) \in M$ der Spaltenvektoren $\mathbf{S}^j_{E_j(\mathbf{X})}$ von $L_\mathbf{E}$ gemäß der Supplementbedingung (SB) bekannt ist, so ist noch das inhomogene Gleichungssystem für die Unbekannten $\lambda_j(\mathbf{X}), j = 1,\ldots,n, \mu(\mathbf{X})$ zu lösen. Im Spezialfall einer linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ liegt ein inhomogenes lineares Gleichungssystem vor.

Analog soll es für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ und Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ bzw. für den Vektor $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mindestens einen Indexvektor $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(\mathbf{X}) \in M^n$, ein zulässiges Supplement $\mathbf{S}' = \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in Z_{\mathbf{E}'(\mathbf{X})}$ und einen Beurteilungsparameter (Glattstellungsparameter) $\nu = \nu(\mathbf{X}) \in J$, sodass mit diesen die Gleichung der **Replizierung** (Glattstellung, additiven Ergänzung) von $\mathbf{X}$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) &= \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \\ &= \mathbf{U} + \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in Z_{\mathbf{E}'(\mathbf{X})} \subseteq C_{M^n}\ ,\end{aligned}$$

bzw.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j'(\mathbf{X})\mathbf{S}^j_{E_j'(\mathbf{X})} - \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}.$$

Falls eine mögliche Festlegung der Supplementtypindizes $E_j'(\mathbf{X}) \in M$ der Spaltenvektoren $\mathbf{S}^j_{E_j'(\mathbf{X})}$ von $L_\mathbf{E}$ gemäß der Supplementbedingung (SB) bekannt ist, so ist noch das Gleichungssystem für die Unbekannten $\lambda_j'\mathbf{X}), j = 1,\ldots,n, \nu(\mathbf{X})$ zu lösen.

Als Nächstes wird nun anschließend gefordert, dass diese additive Zerlegung von $\boldsymbol{\zeta}$ bzw. von $\boldsymbol{\xi}$ nur auf eine einzige Weise möglich ist. Schließlich bleibt dann noch die Aufgabe, nach einer Berechnungsmöglichkeit der Duplizierung bzw. Replizierung zu suchen. Wege dazu werden in den Abschnitten 4.2, 5.1.9 und 8.4 aufgezeigt. Zuvor soll aber noch ein geometrischer Vergleich der Supplementsysteme des vollkommenen und unvollkommenen Kapitalmarkts durchgeführt werden.

5.1.6 Vergleich der Supplementsysteme des vollkommenen und des unvollkommenen Kapitalmarkts

In Kapitel 4 konnte speziell für den vollkommenen Kapitalmarkt K die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung der Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gezeigt werden, ohne die Supplemente $\mathbf{S} \in K$ auf eine sogenannte zulässige Supplementmenge einzuschränken. Will man die zulässige Supplementmenge C_{M^n} des unvollkommenen Kapitalmarkts mit einer entsprechenden Supplementmenge des vollkommenen Kapitalmarkts vergleichen, geht man im vollkommenen Kapitalmarkt von einer beliebigen Basis (oder evtl. einer Orthonormalbasis)

$$S = (\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n)$$

der Hyperebene $K = H_{\mathbf{P},0}$ des euklidischen Raums $\mathbb{R}^{n+1}$ aus. Die einzelnen Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S}^j$ von S können ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Investitionen, also als lexikonegative (lexikografisch negative) Zahlungsströme angenommen werden, d. h. dass bei jedem $\mathbf{S}^j$ die erste von Null verschiedene Komponente negativ ist. Ansonsten könnte man statt $\mathbf{S}^j \in K$ den entgegengesetzten Zahlungsstrom $-\mathbf{S}^j \in K$ nehmen. Man definiert nun für die Indizes $j = 1,\ldots,n$ die Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S}_H^j := +\mathbf{S}^j$ und $\mathbf{S}_S^j := -\mathbf{S}^j$, bildet damit das Supplementsystem

$$L = \{\mathbf{S}_D^j : j = 1,\ldots,n,\ D = H, S\} = \{\pm\mathbf{S}^1,\ldots,\pm\mathbf{S}^n\}$$

und zu jedem Indexvektor $\mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) \in M^n$ das n-Tupel $L_\mathbf{E}$. Aus einer beliebigen Basis S von K kann also auch ein Supplementsystem L konstruiert werden. Umgekehrt erhält man aus einem Supplementsystem L von K in jedem n-Tupel $L_\mathbf{E} = (\mathbf{S}_{E_1}^1,\ldots,\mathbf{S}_{E_n}^n)$, $\mathbf{E} \in M^n$, auch eine Basis $S = L_\mathbf{E}$ von K.

Bei der oben angegebenen Bildung einer Supplementmenge L aus einer Basis S von Investitionen des vollkommenen Kapitalmarkts K ist jeder Transformationskegel $C_\mathbf{E}$ der zulässigen Supplementmenge L einer der zur Basis S der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ gebildeten 2^n abgeschlossenen Orthanten[5]:

$$\begin{aligned} C_\mathbf{E} &= \text{cone}\, L_\mathbf{E} = \{L_\mathbf{E}\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}_{+0}^n\} \\ &= \{S\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n,\ \mu_j \geq 0 \text{ bei } E_j = H,\ \mu_j \leq 0 \text{ bei } E_j = S\} \\ &= \{S\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n,\ \mu_j = 0 \text{ oder sgn}\, \mu_j = \sigma(E_j)\}, \end{aligned}$$

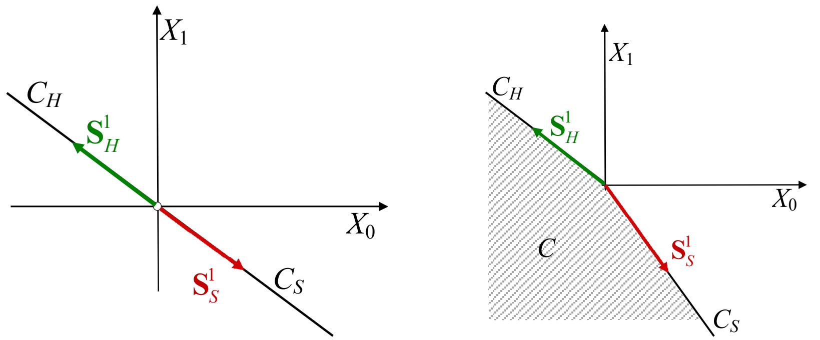
$$\sigma(E_j) = \begin{cases} +1 & \text{für } E_j = H, \\ -1 & \text{für } E_j = S. \end{cases}$$

Auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt dagegen ist die zulässige Supplementmenge im Allgemeinen nicht gleich einer Hyperebene und nicht gleich K, sondern fächert sich in 2^n konvexe lineare Kegel $C_\mathbf{E}$, $\mathbf{E} \in M^n$, auf. Ein Paar $(L,\mathbf{V}(\mu))$ aus einem Supplementsystem L und einer homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$, für welches die eindeutige Duplizierung gesichert ist, kann als Verallgemeinerung einer Basis $(\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^{n+1})$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ angesehen werden. In Abbildung 5.2 wird eine geometrische Veranschaulichung des Supplementsystems und der zulässigen Supplementmenge für vollkommenen und unvollkommenen Kapitalmarkt und die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ gegeben.

[5] Die Definition eines Orthanten zur Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ findet man beispielsweise im Lexikon der Mathematik (2002), Bd. 4, S. 118.

Vollkommener Kapitalmarkt Unvollkommener Kapitalmarkt

a) $n = 1$: $L = \{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_S^1\}$, $M^1 = \{H,S\}$, $C_{M^1} = C_H \cup C_S$



b) $n = 2$: $L = \{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_H^2, \mathbf{S}_S^1, \mathbf{S}_S^2\}$, $M^2 = \{(H,H), (H,S), (S,H), (S,S)\}$,

$C_{M^2} = C_{(H,H)} \cup C_{(H,S)} \cup C_{(S,H)} \cup C_{(S,S)}$

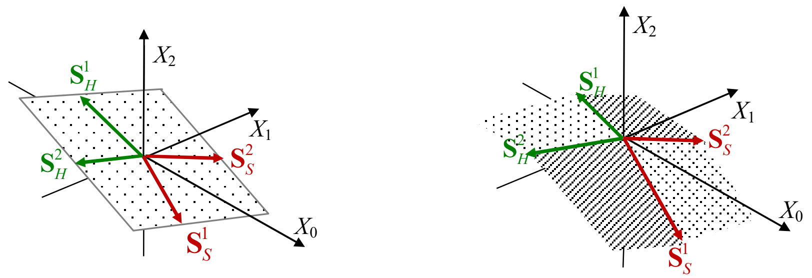


Abb. 5.2 Ein Supplementsystem L und die zulässige Supplementmenge C_{M^n} im vollkommenen und unvollkommenen Kapitalmarkt für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$

5.1.7 Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und Replizierung

Bei der Auswahl eines Supplementsystems L wird nun noch verlangt, dass die zu jedem Zahlungsstrom $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1}$ existierende additive Zerlegung auch eindeutig hinsichtlich des verwendeten Indexvektors $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{Z}) \in M^n$, des zulässigen Supplements $\mathbf{S}(\mathbf{Z})$ und des Beurteilungsvektors $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z}))$ ist. Der Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ soll also elementweise eindeutig aufgespannt werden bzw. additiv zerlegt werden durch die zulässige Supplementmenge und die Beurteilungskurve:

Zu jedem $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1}$ soll es genau ein Tripel

$$(\mathbf{E}(\mathbf{Z}),\mathbf{S}(\mathbf{Z}),\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})) \in M^n \times C_{M^n} \times \mathbf{V}(J), \quad \mathbf{S}(\mathbf{Z}) \in Z_{\mathbf{E}(\mathbf{Z})},$$

geben mit

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{Z}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})) \qquad \text{bei der Duplizierung bzw.}$$
$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{Z}) - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})) \qquad \text{bei der Replizierung.}$$

Da demnach auch $C_{M^n} \cap \mathbf{V}(J) = O = \{\mathbf{O}\}$ ist, könnte man die Summe

$$C_{M^n} + \mathbf{V}(J) \text{ bzw. } C_{M^n} + (-\mathbf{V}(J))$$

analog zum Begriff der direkten Summe[6] von Vektorunterräumen auch als direkte Summe oder direkte Zerlegung des $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen. Eine geometrische Veranschaulichung der Darstellung eines Zahlungsstroms **Z** bei der eindeutigen Duplizierung wird in Abbildung 5.3 gegeben.

Speziell für die Zahlungsströme $\mathbf{Z} = \mathbf{R} \in C_{M^n}$ gibt es dann genau ein Tripel $(\mathbf{E}(\mathbf{R}),\mathbf{S}(\mathbf{R}),\mathbf{V}(\mu(\mathbf{R}))$ mit $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{R})) = \mathbf{O}$ und $\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}) \in Z_{\mathbf{E}(\mathbf{R})}$. Ein zulässiges Supplement $\mathbf{R} \in C_{M^n}$ liegt also in genau einer der Mengen $Z_{\mathbf{E}}$, $\mathbf{E} \in M^n$. Demzufolge bilden unter den verlangten Voraussetzungen die Teilmengen $Z_{\mathbf{E}}$, $\mathbf{E} \in M^n$, von C_{M^n} eine disjunkte Zerlegung (Klasseneinteilung, Faserung, Partition, schlichte Überdeckung) der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} .

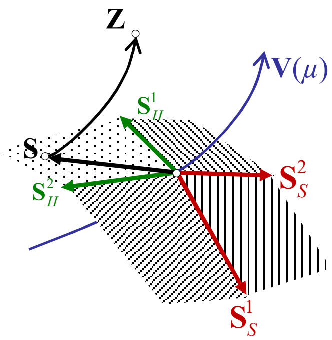


Abb. 5.3 Die elementweise eindeutige Aufspannung des Raums $\mathbb{R}^{n+1}$ durch ein Supplementsystem und eine Beurteilungskurve für die Duplizierung und die Laufzeit $n = 2$

Damit sind die durch die zulässige Supplementmenge C_{M^n} und die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ ermöglichte Duplizierung und Replizierung eines Zahlungsstroms jeweils eindeutig bestimmt: Bei der Duplizierung eines beliebigen Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbf{X} - \mathbf{U} = \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})),$$

und bei der Replizierung von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{S}'(\mathbf{X}) - \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})),$$

mit dem Bezugszahlungsstrom **U** zur Festlegung der Nulllinie der Beurteilung, der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ zur Beschreibung der zeitlichen Zielsetzung des Entscheiders, dem Basiszahlungsstrom **B** zur Beschreibung der situativen Liquidität des Entscheiders und dem für **S**(**X**) bzw. **S**‘(**X**) verwendeten Supplementansatz

[6] Die direkte Summe zweier Vektorunterräume mit der einzigen additiven Zerlegung ihrer Elemente wird beispielsweise behandelt bei Wagner (1981), S. 27, und Bröcker (2004), S. 35.

(SB) $\mathbf{S} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{S}^j_{E_j} = L_\mathbf{E}\boldsymbol{\lambda} \in Z_\mathbf{E}$ mit genau einem $\mathbf{E} \in M^n$,

sind dann also die Parameter $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, $\mu(\mathbf{X})$ bzw. $\nu(\mathbf{X}) \in J$ und $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^n_{+0}$, das Supplement $\mathbf{S} = L_\mathbf{E}\boldsymbol{\lambda}$ und der Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ bzw. $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X}))$ jeweils eindeutig bestimmt. Zu jedem festen Indexvektor $\mathbf{E} \in M^n$ können die Transformationsparameter $\lambda_j(\mathbf{X})$ und der Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ bzw. $\nu(\mathbf{X})$ als die Koordinaten von $\mathbf{X} \in C_\mathbf{E} + \mathbf{V}(J)$ angesehen werden. Bei nichtlinearer Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ ist $\mu(\mathbf{X})$ bzw. $\nu(\mathbf{X})$ eine krummlinige Koordinate von $\mathbf{X}$.
Die hier aufgestellte Forderung mit beliebiger Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ kann analog zum spezielleren Gesetz des eindeutig bestimmten Preises (englisch: Law of One Price; mit der speziellen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \bar{V}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = \mu\cdot(1,0,\ldots,0)^\mathrm{T}$) bei der Bewertung von stochastischen Zahlungsprofilen mittels Duplizierung hier als Gesetz der eindeutigen Bewertung (englisch: Law of One Valuation) bezeichnet werden.
Ohne Berücksichtigung der Supplementbedingung (SB) gehört zu jedem der 2^n Indexvektoren $\mathbf{E} \in M^n$ ein Gleichungssystem für die unbekannten Parameter $\lambda_j(\mathbf{X})$ und $\mu(\mathbf{X})$ bzw. $\nu(\mathbf{X})$, das man zu lösen versuchen kann. Vorausgesetzt ist nun noch, dsas genau eines dieser Gleichungssysteme mit Berücksichtigung der Supplementbedingung (SB) eindeutig gelöst werden kann.

5.1.8 Anforderungen an die Beurteilungskurve

Wie in Abschnitt 4.1.5 bei der Behandlung des vollkommenen Kapitalmarkts bereits dargestellt wurde, wird für die Beschreibung der Zielsetzung des Entscheiders eine mit einer (Total-)Ordnung versehene eindimensionale Mannigfaltigkeit, die sogenannte Beurteilungskurve W des Entscheiders, verwendet. Diese ist eine Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen

$$\mathbf{W} : J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

die mittels streng monoton steigenden, surjektiven und stetigen Funktionen $g : J \longrightarrow J$ als Parametertransformationen ineinander übergeführt werden können. Jede dieser inhomogenen Parameterdarstellungen

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$$

ist eine auf dem offenen Intervall $J =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, $-\infty \le a < 0 < b \le +\infty$, definierte stetige und bezüglich der strengen Halbordnung $\gtrdot$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ streng monoton steigende Funktion mit $\mathbf{W}(0) = \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n+1}$ als festem Bezugspunkt und $\mathbf{V}(\mu) := \mathbf{W}(\mu) - \mathbf{U}$ als zugehöriger homogener Beurteilungskurve. Demzufolge kann die auf dem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ vorliegende (Total-)Ordnung $\geq$ („größer-gleich“) auf die Spur $\mathbf{W}(J)$ der Kurve W übertragen werden. Auf der Menge $\mathbf{W}(J)$ gilt das Trichotomiegesetz: Für beliebige Punkte $\mathbf{W}(\mu), \mathbf{W}(\mu') \in \mathbf{W}(J)$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$\mathbf{W}(\mu) \gtrdot \mathbf{W}(\mu'),\ \mathbf{W}(\mu) = \mathbf{W}(\mu'),\ \mathbf{W}(\mu') \gtrdot \mathbf{W}(\mu).$$

Alle Kurvenpunkte der homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ sind direkt beurteilbar, d. h. direkt mit $\mathbf{O}$ vergleichbar:

$$\mathbf{V}(\mu) \lessdot \mathbf{O} \text{ für } \mu < 0,\ \mathbf{V}(0) = \mathbf{O},\ \mathbf{V}(\mu) \gtrdot \mathbf{O} \text{ für } \mu > 0.$$

Weiter sind die inhomogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ und die homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ an den beiden Intervallgrenzen a und b von J unbeschränkt:

$$\|\mathbf{V}(\mu)\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b \text{ und bei } \mu \longrightarrow a.$$

Bildet man mit einem positiven Vektor $\mathbf{P} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die reellwertige „Abstandsfunktion"

$$\alpha(\mu) := \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu) = \sum_{j=0}^{n} P_j V_j(\mu),$$

die nach der Division mit der euklidischen Norm $\|\mathbf{P}\|$ den vorzeichenversehenen Abstand des Kurvenpunktes $\mathbf{V}(\mu)$ von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ liefert, so ist diese Funktion $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende, bijektive und stetige Funktion.

5.1.9 Berechnung der Duplizierung und Replizierung bei positiven Normalenvektoren $\mathbf{P}_E$

Es wird nun nach einer Möglichkeit gesucht, wie man für einen vorgegebenen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine additive Zerlegung in Supplement und Beurteilungskurvenpunkt bestimmen kann. Dazu wird zunächst der beim vollkommenen Kapitalmarkt eingeschlagene Weg beschritten. Es wird also nach einem zum Supplement orthogonalen Vektor $\mathbf{P}$ gesucht, um aus der Vektorgleichung durch Linksmultiplikation mit dem Vektor $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ eine reellwertige Gleichung zur Bestimmung des Beurteilungsparameters zu erhalten.

Da hier beim unvollkommenen Kapitalmarkt der konvexe lineare Kegel K der Kapitalmarktgeschäfte nicht als endlich erzeugbar vorausgesetzt ist, ist er im Allgemeinen auch nicht topologisch abgeschlossen. Aus der vorausgesetzten Arbitragefreiheit von K ($K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) kann also *nicht* mit dem Satz 8.2.3 a) über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel die Existenz eines K umfassenden Halbraums $H^{\leq}_{\mathbf{P},0}$ mit einem universellen positiven Normalenvektor $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1}$ geschlossen werden.

Es wäre aber der vom Supplementsystem L erzeugte konvexe lineare Kegel $C = \operatorname{cone} L$ ein endlich erzeugter Kegel, somit nach dem Polyederdarstellungssatz (siehe Abschnitt 8.2) ein polyedrischer Kegel und daher ein topologisch abgeschlossener konvexer linearer Kegel. Auf Grund der Arbitragefreiheit von $C \subseteq K$,

$$C \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O = \{\mathbf{O}\},$$

gibt es nach Satz 8.2.3 a) also einen C umfassenden Halbraum $H^{\leq}_{\mathbf{P},0}$ mit positivem Normalenvektor $\mathbf{P} \in C^{\mathrm{P}}$:

$$\exists\, \mathbf{P} > \mathbf{O} \text{ mit } \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} \leq 0 \ \text{ für alle } \mathbf{S} \in C.$$

Im Gegensatz zum vollkommenen Kapitalmarkt, bei dem K eine Hyperebene und nicht nur ein konvexer linearer Kegel ist, hat man aber hier nur die Ungleichung $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} \leq 0$ und keine Gleichung $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} = 0$, die für die Bestimmung der Duplizierung oder Replizierung verwendet werden könnte.

Um auf eine derartige Gleichung für die zulässigen Supplemente in C_{M^n} zu kommen, verwendet man nun zu jedem Indexvektor $\mathbf{E} \in M^n$ statt der konischen Hülle $C_\mathbf{E}$ = cone $L_\mathbf{E}$ die lineare Hülle

$$H_\mathbf{E} := [L_\mathbf{E}] = \text{lin } L_\mathbf{E} = [\mathbf{P}_\mathbf{E}]^\mathsf{T} = H_{\mathbf{P}_E,0}$$

der Menge $L_\mathbf{E} = \{\mathbf{S}^1_{E_1},\ldots,\mathbf{S}^n_{E_n}\}$ bzw. der Matrix $L_\mathbf{E} = (\mathbf{S}^1_{E_1},\ldots,\mathbf{S}^n_{E_n})$ mit dem bis auf einen von Null verschiedenen Faktor eindeutig bestimmten Normalenvektor $\mathbf{P}_\mathbf{E} \in [L_\mathbf{E}]^\mathsf{T}$. Da bei unvollkommenem Kapitalmarkt K im Allgemeinen nur die konische Hülle $C_\mathbf{E}$ = cone $L_\mathbf{E}$ und nicht auch die lineare Hülle $H_\mathbf{E}$ = lin $L_\mathbf{E}$ in K liegt, ist aber nicht gesichert, dass die homogene Hyperebene $H_\mathbf{E}$ mit dem nichtnegativen Orthanten nur den trivialen Durchschnitt hat ($H_\mathbf{E} \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) und damit der Normalenvektor $\mathbf{P}_\mathbf{E}$ positiv gewählt werden kann. Für die speziellen Supplementsysteme des Abschnitts 8.4 kann jedoch die Positivität der Normalenvektoren $\mathbf{P}_\mathbf{E}$ ($P_{\mathbf{E},0} := 1$) auf eine andere Weise bewiesen werden, sodass diese jetzt für einen möglichen Weg der Berechnung der Duplizierung bzw. Replizierung mit vorausgesetzt wird. Für diese speziellen Supplementsysteme wird aber jeweils auch ein Beweis für die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung angegeben, der die Positivität der Normalenvektoren nicht explizit benötigt. Außerdem wird dabei auch die weniger aufwendige Berechnungsmöglichkeit der Duplizierung bzw. Replizierung durch die iterative Nullstellenbestimmung einer Hilfsfunktion bereitgestellt.

Es sei nun also für das Supplementsystem L vorausgesetzt, dass für alle 2^n Indexvektoren (Supplementtypvektoren) $\mathbf{E} \in M^n$

positive Normalenvektoren $\mathbf{P}_\mathbf{E} \in H_\mathbf{E}^\perp$ ($P_{\mathbf{E},0} := 1$)

der Hyperebenen $H_\mathbf{E}$ = lin $L_\mathbf{E}$ vorliegen. Statt des Preisvektors $\mathbf{P} > \mathbf{O}$ ($P_0 := 1$) als Normalenvektor der zulässigen Supplementmenge $K = H_{\mathbf{P},0}$ beim vollkommenen Kapitalmarkt hat man hier beim unvollkommenen Kapitalmarkt nun die Schar von 2^n positiven Normalenvektoren $\mathbf{P}_\mathbf{E}$, $\mathbf{E} \in M^n$, für die Transformationskegel $C_\mathbf{E}$ der Supplementmenge C_{M^n}.

Analog zur „Abstandsfunktion" $\alpha(\mu) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu)$ des vollkommenen Kapitalmarkts (siehe Abschnitt 4.2.1) definiert man hier auf den unvollkommenen Kapitalmarkt zu jedem Indexvektor $\mathbf{E} \in M^n$ die „Abstandsfunktion"

$$\alpha_\mathbf{E}(\mu) := \mathbf{P}_\mathbf{E}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu).$$

Der Funktionswert $\alpha_\mathbf{E}(\mu)$ liefert nach der Division mit der euklidischen Norm $\|\mathbf{P}_\mathbf{E}\|$ von $\mathbf{P}_\mathbf{E}$ den vorzeichenversehenen (orientierten) Abstand des Kurvenpunktes $\mathbf{V}(\mu)$ von der Hyperebene $H_\mathbf{E}$. Die Funktion

$$\alpha_\mathbf{E} : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist streng monoton steigend und bijektiv, da $\mathbf{P}_\mathbf{E} > \mathbf{O}$ ist und für die homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ noch die Unbeschränktheit ihrer Norm $\|\mathbf{V}(\mu)\|$ an den beiden Intervallgrenzen a und b vorausgesetzt ist.

Aus der obigen Duplizierungsgleichung

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \zeta = \mathbf{X} - \mathbf{U}$$

mit dem nach Voraussetzung zu $\mathbf{X}$ eindeutig bestimmten Indexvektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, dem Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_\mathbf{E} \subseteq H_\mathbf{E}$ und dem Transformationsparameter $\mu = \mu(\mathbf{X}) \in J$ erhält man durch Linksmultiplikation mit dem Zeilenvektor $\mathbf{P_E}^\mathsf{T}$ wegen $\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\mathbf{S}(\mathbf{X}) = 0$ die reellwertige Gleichung

$$\alpha_\mathbf{E}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{P_E}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}$$

und daraus wegen der Bijektivität von $\alpha_E(\mu)$ den Beurteilungsparameter

$$\mu(\mathbf{X}) = \alpha_\mathbf{E}^{-1}(\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}).$$

Zu diesem ergeben sich dann eindeutig der Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ und das Supplement

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})).$$

Analog ergeben sich aus der obigen Replizierungsgleichung

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) - \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$$

mit dem nach Voraussetzung eindeutig bestimmten Indexvektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in C_\mathbf{E}$ und $\nu = \nu(\mathbf{X}) \in J$ durch Linksmultiplikation mit $\mathbf{P_E}^\mathsf{T}$ die reellwertige Gleichung

$$\alpha_\mathbf{E}(\nu(\mathbf{X})) = -\,\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\boldsymbol{\xi}$$

und daraus wegen der Bijektivität von $\alpha_\mathbf{E}(\mu)$ der Beurteilungsparameter

$$\nu(\mathbf{X}) = \alpha_\mathbf{E}^{-1}(-\,\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\boldsymbol{\xi}).$$

Zu diesem erhält man dann auch eindeutig den Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X}))$ und das Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})).$$

Bei eindeutig bestimmtem Indexvektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X})$ sind also bei positiven Normalenvektoren $\mathbf{P_E}$, $\mathbf{E} \in M^n$, insgesamt die Duplizierung und die Replizierung eindeutig bestimmt.

Im Allgemeinen muss aber bei der Duplizierung bzw. der Replizierung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ der einzige Indexvektor $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ erst irgendwie bestimmt werden. Bei gesicherter Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung gilt für jeden anderen Indexvektor $\mathbf{E} \in M^n$, $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(\mathbf{X})$, dass der formal dazu berechnete Zahlungsstrom $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in H_\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{S} = \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in H_\mathbf{E}$ kein zulässiges Supplement in $C_\mathbf{E}$ ist. Dies bedeutet, dass in der Koordinatendarstellung (SB) $\mathbf{S} = \boldsymbol{\lambda} L_\mathbf{E}$ mindestens eine Komponente λ_j des Koordinatenvektors $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^\mathsf{T}$ negativ ist. Zur Bestimmung der eindeutigen Duplizierung bzw. Replizierung von $\mathbf{X}$ kann man nun im Suchverfahren der Reihe nach für jeden Indexvektor $\mathbf{E} \in M^n$ den Normalenvektor $\mathbf{P_E} \in [L_\mathbf{E}]^\mathsf{T}$ ($P_{\mathbf{E},0} := 1$) als Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{P_E}^\mathsf{T} L_\mathbf{E} = \mathbf{O}$$

berechnen, mittels der bijektiven Funktion $\alpha_\mathbf{E}(\mu) = \mathbf{P_E}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu)$ den Beurteilungsparameter

$$\mu(\mathbf{X}) = \alpha_\mathbf{E}^{-1}(\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}) \text{ bzw. } \nu(\mathbf{X}) = \alpha_\mathbf{E}^{-1}(-\,\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\boldsymbol{\xi})$$

bestimmen, damit den zugehörigen Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ bzw. $\mathbf{V}(\nu(\mathbf{X}))$, aus der Vektorgleichung der Duplizierung bzw. Replizierung das „formale Supplement“

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) \quad = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \in H_\mathbf{E} \text{ bzw.}$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \quad = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) \in H_\mathbf{E}$$

(i. A. ist $H_\mathbf{E} \not\subseteq K$) und dann den zugehörigen Koordinatenvektor $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X})$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$L_\mathbf{E}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{S}$$

berechnen. Der Indexvektor **E** liefert nun genau dann die eindeutige additive Zerlegung der Duplizierung bzw. Replizierung,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}),$$

wenn noch die Supplementbedingung (SB)

$$\mathbf{S} = L_\mathbf{E}\boldsymbol{\lambda} \in C_\mathbf{E}$$

erfüllt ist, also der zugehörige Koordinatenvektor $\boldsymbol{\lambda}$ nichtnegativ ist:

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{O}.$$

Das eben beschriebene Verfahren zur Bestimmung der irgendwie gesicherten eindeutigen Duplizierung bzw. Replizierung funktioniert nur, wenn noch die 2^n Normalenvektoren $\mathbf{P}_\mathbf{E}$ positiv sind. Hinsichtlich des Rechenaufwands ist je untersuchtem Indexvektor $\mathbf{E} \in M^n$ das Gleichungssystem für $\mathbf{P}_\mathbf{E}$ zu lösen, der Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ bzw. $\nu(\mathbf{X})$ als die Nullstelle der Funktion

$$f(\mu) := \alpha_\mathbf{E}(\mu) - \mathbf{P}_\mathbf{E}^\mathsf{T}\boldsymbol{\zeta} \text{ bzw.}$$
$$g(\nu) := \alpha_\mathbf{E}(\nu) + \mathbf{P}_\mathbf{E}^\mathsf{T}\boldsymbol{\xi}$$

zu bestimmen, dazu der Beurteilungskurvenpunkt und das formale Supplement zu berechnen und schließlich das Gleichungssystem für den Koordinatenvektor $\boldsymbol{\lambda}$ zu lösen. Für den Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ hat man noch die Nichtnegativität zu überprüfen.

Eine weniger aufwendige Berechnungsmöglichkeit der eindeutigen Duplizierung bzw. Replizierung mittels der iterativen Nullstellenbestimmung einer Hilfsfunktion ist für die Supplementsysteme des Abschnitts 8.4 möglich. Diese Supplementsysteme L erfüllen alle angegebenen Anforderungen und ermöglichen daher mit der zugehörigen zulässigen Supplementmenge C_{M^n} und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ die eindeutige Duplizierung bzw. Replizierung. Darüber hinaus ist für sie auch die Positivität der Normalenvektoren $\mathbf{P}_\mathbf{E}$ gegeben. Es sind dies ein System von speziellen (n-j+1)-periodischen Termingeschäften $\mathbf{S}^j_{E_j}$ für die Zeitintervalle [j-1,n], das eine Verallgemeinerung des von Kruschwitz (1998), S. 48f., verwendeten Systems von einperiodischen Termingeschäften darstellt, und ein System von speziellen j-periodischen Kassageschäften $\mathbf{S}^j_{E_j}$ für die Zeitintervalle [0,j]. Die Beweise für die Aussagen über diese Supplementsysteme findet man auf der Autoren-Website www.pleier-r.de.

Durch das nachfolgende Beispiel wird nun noch gezeigt, dass ein System L von n linear unabhängigen Investitionen und n linear unabhängigen Finanzierungen nicht beliebig aus der Menge K gewählt werden kann. Die eindeutige Replizierung oder Duplizierung ist also nicht ohne eine geeignete Wahl des Supplementsystems L gesichert. Grundsätzlich stellt sich also für den Entscheider die Frage, ob auf dem vorliegenden Kapitalmarkt für ihn tatsächlich ein Supplementsystem L mit den angegebenen Eigenschaften zur Verfügung steht.

Beispiel 5.3 Die Existenz von Zahlungsströmen ohne eindeutige Replizierung bei ungeeignetem Supplementsystem L

Für die Laufzeit $n = 2$ wird die nichtlineare homogene Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(v) = (v^3,v,0)^\mathsf{T},$$

der Bezugspunkt $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ und der Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ gewählt. Auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt gebe es das Supplementsystem $L = \{\mathbf{I}^1,\mathbf{I}^2,\mathbf{F}^1,\mathbf{F}^2\}$ von zwei Investitionen $\mathbf{I}^j = \mathbf{T}_H^j$ und zwei Finanzierungen $\mathbf{F}^j = -\ \mathbf{T}_S^j$ $(j = 1,2)$ mit

$$\mathbf{T}_H^1 = \mathbf{T}_S^1 = (-1;2;-1)^\mathsf{T},$$

$$\mathbf{T}_H^2 = (0;-1;q_{2,H})^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{T}_S^2 = (0;-1;q_{2,S})^\mathsf{T} \qquad (q_{2,H} = 0{,}3;\ q_{2,S} = 0{,}4).$$

Bei der Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\ \mathbf{X} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X}))$$

wird für das Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ der oben beschriebene spezielle Ansatz (SB) verwendet:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{T}_{E_j}^j = T_\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\lambda} \in C_{M^2}$$

mit dem Indexvektor $\mathbf{E} = (E_1,E_2) \in \mathrm{M}^2 = \{S,H\}^2$, der 3x2-Matrix

$$T_\mathbf{E} = (\ \mathbf{T}_{E_1}^1\ ,\ \mathbf{T}_{E_2}^2\ )$$

und der Supplementbedingung

(SBT) $\quad T_\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\lambda} \in C_{M^2}$

für den Koordinatenvektor $\boldsymbol{\lambda}$ bzw.

$$E_j = H \text{ bei } \lambda_j(\mathbf{X}) \geq 0,$$

$$E_j = S \text{ bei } \lambda_j(\mathbf{X}) < 0.$$

Gemäß der Idee des Beweises für die eindeutige Replizierung von Kruschwitz (1976), S. 18–20, wird zu vorgegebenem Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ und beliebigem Beurteilungsparameter $v \in J = \mathbb{R}$ der durch die Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$T_\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\lambda} = -\ \mathbf{X} + \mathbf{V}(v)$$

gegebene Koordinatenvektor $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(v) = (\lambda_1(v),\lambda_2(v))^\mathsf{T}$ und Indexvektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(v) = (E_1(v),E_2(v))$ jeweils als Funktion des Parameters v betrachtet. In der Komponentenschreibweise stellt sich das Gleichungssystem folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{lll} -\ \lambda_1 & & = -\ X_0 + V_0(v), \\ 2\lambda_1 & -\ \lambda_2 & = -\ X_1 + V_1(v), \\ -\ \lambda_1 & +\ q_{2,H/S}\lambda_2 & = -\ X_2 + V_2(v) \end{array}$$

Da die Matrix $T_\mathbf{E}$ eine untere Dreiecksgestalt besitzt, können zu jedem fest vorgegebenen $v \in J = \mathbb{R}$ sukzessive für $j = 1, 2$ sowohl die Funktionswerte $\lambda_j(v)$ explizit angegeben werden als auch die Supplementtypen $E_j(v)$ gemäß der Supplementbedingung (SBT) nach dem Vorzeichen von $\lambda_j(v)$ festgelegt werden:

Aus der ersten Gleichung erhält man λ_1, $\operatorname{sgn} \lambda_1$ und damit $E_1(v)$ und $\mathbf{T}_{E_1(v)}^1$.

$$\lambda_1(v) = X_0 - V_0(v) \qquad = X_0 - v^3.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man dann λ_2, $\operatorname{sgn} \lambda_2$ und damit $E_2(v)$ und $\mathbf{T}_{E_2(v)}^2$.

$$\lambda_2(v) = X_1 - V_1(v) + 2\lambda_1(v) \quad = X_1 + 2X_0 - v - 2v^3.$$

Es ist dann auch die dritte Gleichung eindeutig bestimmt. Der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ besitzt genau dann (mindestens) eine Replizierung, wenn das nach der Festlegung des Indexvektors $\mathbf{E}$ erhaltene Gleichungssystem eine Lösung $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(v)$ besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn auch die Gleichung in der dritten Zeile erfüllt ist, wenn also v eine Nullstelle der Funktion $\lambda_3(v)$ ist:

$$\lambda_3(v) := X_2 - V_2(v) - \lambda_1(v) + q_2\lambda_2(v) = 0$$

mit $q_2 = q_{2,H} = 0{,}3$ im Fall $\lambda_2(v) \geq 0$ und $q_2 = q_{2,S} = 0{,}4$ im Fall $\lambda_2(v) < 0$. Durch die Festlegung des Parameters q_2 bzw. des Zahlungsstroms $\mathbf{T}_{E_2}^2$ ist $\lambda_2(v)\mathbf{T}_{E_2}^2$ ein Kapitalmarktgeschäft.

Zahlenbeispiel: Speziell für den Zahlungsstrom $\mathbf{X} = \mathbf{O}$ erhält man die Funktionen

$$\begin{aligned}\lambda_1(v) &= -v^3,\\ \lambda_2(v) &= -v - 2v^3 = -v(1 + 2v^2),\\ \lambda_3(v) &= -\lambda_1(v) + q_2\lambda_2(v)\\ &= v^3 - q_2v - 2q_2v^3\\ &= -q_2v + (1 - 2q_2)v^3\\ &= -v[q_2 - (1 - 2q_2)v^2].\end{aligned}$$

Für $v > 0$ ist $\lambda_2(v) < 0$ und $q_2 = q_{2,S} = 0{,}4$; für $v \leq 0$ ist $\lambda_2(v) \geq 0$ und $q_2 = q_{2,H} = 0{,}3$. Auf der positiven v-Achse ist also im Funktionsterm von $\lambda_3(v)$ der Parameter $q_2 = q_{2,S}$ zu verwenden und auf der nichtpositiven v-Achse der Parameter $q_2 = q_{2,H}$. Für beide Parameter gilt $0 < q_2 < 0{,}5$ und $(1 - 2q_2) > 0$. Demnach hat $\lambda_3(v)$ die drei Nullstellen

$$v_0 = 0,\ v_\pm = \pm\,[q_2/(1 - 2q_2)]^{1/2},$$

nämlich

$$v_+ = +\,[q_{2,S}/(1 - 2q_{2,S})]^{1/2} = +\,1{,}4142 \quad \text{und}$$
$$v_- = -\,[q_{2,H}/(1 - 2q_{2,H})]^{1/2} = -\,0{,}8660.$$

Der Zahlungsstrom $\mathbf{X} = \mathbf{O}$ besitzt also bezüglich des Supplementansatzes mit dem angegebenen Supplementsystem L drei Replizierungen und daher keine eindeutige Replizierung. Das Supplementsystem dieses Beispiels ist bis auf eine Abweichung ein System der in Abschnitt 8.4 behandelten Termingeschäfte, für welches die eindeutige Replizierung gesichert ist. Die Abweichung besteht hier darin, dass das Element $T_{E_1,2}^1 = -1$, also nicht positiv ist. Dies bewirkt aber schon, dass die Replizierung nicht eindeutig ist. △

5.2 Präferenzordnungen nach den Konzepten der Duplizierung und der Replizierung

5.2.1 Definition der Präferenzordnungen und die Existenz von Nutzenfunktionen

In Abschnitt 4.3 wurde bereits dargestellt, wie im $\mathbb{R}^{n+1}$ auf der Grundlage der eindeutigen Duplizierung

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{X})} \subseteq C_{M^n},$$

eine D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ und auf der Grundlage der eindeutigen Replizierung

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})), \quad \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in C_{\mathbf{E}'(\mathbf{X})} \subseteq C_{M^n},$$

eine R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RW}$ definiert werden kann:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \trianglerighteq_{DW} \mathbf{Y}\quad & (\mathbf{X}\text{ ist mindestens so günstig wie }\mathbf{Y})\\ & :\Leftrightarrow \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y}))\\ & \Leftrightarrow \mu(\mathbf{X}) \geq \mu(\mathbf{X}),\\ \mathbf{X} \trianglerighteq_{RW} \mathbf{Y}\quad & (\mathbf{X}\text{ ist mindestens so gut wie }\mathbf{Y})\\ & :\Leftrightarrow \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) \Leftrightarrow \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) \geq \mathbf{V}(v(\mathbf{Y}))\\ & \Leftrightarrow v(\mathbf{X}) \geq v(\mathbf{X}).\end{aligned}$$

Mit dem Konzept der Duplizierung bzw. der Replizierung lässt sich nämlich die totale Ordnung $\geq$ auf der Spur $\mathbf{W}(J)$ der Beurteilungskurve als Präferenzordnung auf den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ übertragen, indem jedem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ eindeutig ein Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ auf der Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ zugeordnet wird und mit diesem der Vergleich und die Beurteilung von $\mathbf{X}$ definiert wird. Durch die Einschränkung auf streng monoton steigende Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und auf Supplementsysteme L, für welche die eindeutige Duplizierung bzw. Replizierung gesichert ist, ergeben sich also unmittelbar die zugehörigen Präferenzordnungen. Bei der Betrachtung des vollkommenen Kapitalmarkts in Abschnitt 4.2 ist die eindeutige Duplizierung bzw. Replizierung auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ durch die Voraussetzungen an die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte und die geeignete Definition der Beurteilungskurve für jede Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ gesichert (zur Definition einer Beurteilungskurve siehe Abschnitte 4.1.5, 5.1.8 und 8.3.3). Bei dem nun behandelten unvollkommenen Kapitalmarkt wird für die nachfolgenden Beweise vorausgesetzt, dass ein Supplementsystem L vorliegt, für welches zumindest mit jeder der betrachteten Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ die Duplizierung bzw. Replizierung für jeden Zahlungsstrom des $\mathbb{R}^{n+1}$ existiert und eindeutig ist. Andernfalls müsste man sich auf die Menge der eindeutig duplizierbaren bzw. replizierbaren Zahlungsströme einschränken. Auf die Methoden zur Berechnung der Duplizierung bzw. Replizierung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird in Abschnitt 4.2 für den vollkommenen Kapitalmarkt und in Abschnitt 5.1.9 für den unvollkommenen Kapitalmarkt eingegangen.

Streng genommen müsste man in den Bezeichnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ für die Relationen neben den Indizes D, R, W auch noch den Index L für das verwendete Supplementsystem L und bei der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ noch den Index $\mathbf{B}$ für den Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ aufführen:

$$\trianglerighteq_{\mathrm{D}LW} \text{ und } \trianglerighteq_{\mathrm{R}L\mathbf{B}W}.$$

Da aber bei den folgenden Überlegungen das Supplementsystem L und der Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ meist fest gewählt sind, werden die Indizes L und $\mathbf{B}$ zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.

Mit den Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ erhält man auch die zugehörigen inversen Relationen (Umkehrrelationen)

$$\trianglelefteq_{\mathrm{D}W} \text{ und } \trianglelefteq_{\mathrm{R}W},$$

die Indifferenzrelationen (Äquivalenzrelationen)

$$\simeq_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \cap \trianglelefteq_{\mathrm{D}W} \text{ und } \simeq_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \cap \trianglelefteq_{\mathrm{R}W}$$

und die strengen Halbordnungen

$$\triangleright_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \setminus \trianglelefteq_{\mathrm{D}W} \text{ und } \triangleright_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \setminus \trianglelefteq_{\mathrm{R}W}.$$

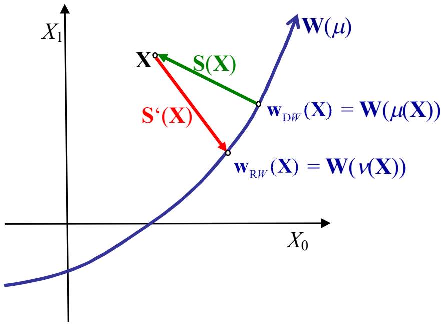


Abb. 5.4 Die D-Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{DW}(\mathbf{X})$ und R-Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{RW}(\mathbf{X})$ **(B = O)**

Außerdem erhält man durch die eindeutige Duplizierung und eindeutige Replizierung die $(n+1)$-dimensionalen Präferenzfunktionen (Bewertungsfunktionen)

$$\mathbf{w}_{DW} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}_{DW}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J),$$
$$\mathbf{w}_{RW} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}_{RW}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

und die ordinalen Nutzenfunktionen (eindimensionale Bewertungsfunktionen)

$$\mu_{DW} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mu_{DW}(\mathbf{X}) = \mu(\mathbf{X}) \in J,$$
$$\nu_{RW} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \nu_{RW}(\mathbf{X}) = \nu(\mathbf{X}) \in J \subseteq \mathbb{R}.$$

Die Präferenzfunktionen $\mathbf{w}_{DW}$ und $\mathbf{w}_{RW}$ liefern für jeden Punkt des Raums $\mathbb{R}^{n+1}$ jeweils den dazu bezüglich der Indifferenzrelation $\simeq_{DW}$ bzw. $\simeq_{RW}$ indifferenten Kurvenpunkt auf $\mathbf{W}(J)$. Eine Darstellung des D- und R-Präferenzfunktionswerts von $\mathbf{X}$ auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ wird in Abbildung 5.4 gegeben.

Die Gesamtheit der Nutzenfunktionen u zur Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ ist gegeben durch die Kompositionen $u = g \circ \mu_{DW}$, wobei g eine beliebige streng monoton steigende bijektive Transformation $g : J \longrightarrow J$ ist. Beschränkt man sich auf stetige derartige Transformationen g, so bleibt man mit den Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu) = \mathbf{W}(g(\mu))$ von Beurteilungskurven in der gleichen P-Äquivalenzklasse (siehe Abschnitt 8.3.1).

Die oben definierte ordinale Nutzenfunktion $\mu_{DW} : \mathbb{R}^{n+1} \to J$ ist auch eine sogenannte kardinale Nutzenfunktion, da die zugehörige durch Differenzbildung definierte Funktion

$$\vec{\mu}_{DW} : (\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \vec{\mu}_{DW}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mu_{DW}(\mathbf{Y}) - \mu_{DW}(\mathbf{X})$$

für die Übergänge $(\mathbf{X} \to \mathbf{Y}) = (\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ von Alternative $\mathbf{X}$ zu Alternative $\mathbf{Y}$ eine Relation $\succcurlyeq$ für diese Übergänge als Nutzenfunktion beschreibt:

Der Übergang $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ von $\mathbf{A}$ nach $\mathbf{B}$ ist mindestens so gut wie der Übergang $(\mathbf{C},\mathbf{D})$ von $\mathbf{C}$ nach $\mathbf{D}$:

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) \succcurlyeq (\mathbf{C},\mathbf{D}) \quad \Leftrightarrow \vec{\mu}_{DW}(\mathbf{A},\mathbf{B}) \geq \vec{\mu}_{DW}(\mathbf{C},\mathbf{D})$$
$$\Leftrightarrow \mu_{DW}(\mathbf{B}) - \mu_{DW}(\mathbf{A}) \geq \mu_{DW}(\mathbf{D}) - \mu_{DW}(\mathbf{C}).$$

Auf Grund der Eigenschaften der Ordnung $\geq$ („größer oder gleich") in $\mathbb{R}$ ist dann notwendig auch die Relation $\succcurlyeq$ für die Übergänge reflexiv, transitiv und total auf $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, also eine Präferenzordnung in $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Die durch die kardinale Nutzenfunktion $\mu_{\mathrm{D}W}$ gegebene Bewertungsskala für die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine sogenannte metrische Skala, da auch die Übergänge (Rangunterschiede, Abstände) zwischen den Alternativen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gemessen werden können. Mit der Festlegung des Nullpunkts $\mathbf{U}$ der Bewertung liegt auch eine Intervallskala (Kardinalskala) vor. Analoges gilt auch für die Nutzenfunktion $\mu_{\mathrm{R}W}$.

Für die in Abschnitt 8.4 behandelten speziellen Supplementsysteme von Termingeschäften bzw. Kassageschäften kann auch die Stetigkeit der Nutzenfunktionen gezeigt werden. Bei stetiger Nutzenfunktion können dann auf einer kompakten Menge des $\mathbb{R}^{n+1}$ auch optimale Zahlungsströme hinsichtlich der Maximierung der Nutzenfunktion bestimmt werden.

5.2.2 Indifferenzklassen der Präferenzordnungen

Für einen beliebigen fest fixierten Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist die zur D-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{D}W}$ gebildete Indifferenzklasse (Äquivalenzklasse; bei $n = 1$ auch Indifferenzkurve)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}\} \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))\} \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})\} \\
&= \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}^{-1}(\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})) \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})\} \\
&= \mu_{\mathrm{D}W}^{-1}(\mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}))
\end{aligned}$$

die Urbildmenge der Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}$ zum Funktionswert $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \in \mathbf{W}(J)$ bzw. die Urbildmenge der Nutzenfunktion $\mu_{\mathrm{D}W}$ zum Funktionswert $\mu_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) \in J$. Sie wird daher bei $n = 1$ auch als Isonutzenkurve, Isonutzenlinie oder Niveaulinie bezeichnet.

Analog ist die zum Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und zur R-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{R}W}$ gebildete Indifferenzklasse

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}\} \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))\} \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})\} \\
&= \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}^{-1}(\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})) \\
&= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \nu_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) = \nu_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})\} \\
&= \nu_{\mathrm{R}W}^{-1}(\nu_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}))
\end{aligned}$$

die Urbildmenge der Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}$ zum Funktionswert $\mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) \in \mathbf{W}(J)$ bzw. die Urbildmenge der Nutzenfunktion $\nu_{\mathrm{R}W}$ zum Funktionswert $\nu_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) \in J$.

Geometrische Beschreibung der Indifferenzklassen als affine Kegel
Nachfolgend wird bewiesen, dass die D-Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ sich genauer als die Minkowski-Summe des Beurteilungskurvenpunktes $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ und der zulässigen Supplementmenge C_{M^n},

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n},$$

beschreiben lässt und geometrisch als affinen Kegel interpretieren lässt mit $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ als möglichem Scheitelpunkt (Spitze) des Kegels und C_{M^n} als zugehörigem linearen Kegel.
Dementsprechend lässt sich auch die R-Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ beschreiben als die Minkowski-Summe

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n}$$

und geometrisch interpretieren als affinen Kegel mit $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B}$ als möglichem Scheitelpunkt (Spitze) des Kegels und $-C_{M^n}$ als zugehörigem linearen Kegel.

Damit lässt sich auch die zulässige Supplementmenge C_{M^n} bzw. die am Nullpunkt gespiegelte Menge $-C_{M^n}$ jeweils als eine spezielle Indifferenzklasse des Nullpunktes $\mathbf{O}$ interpretieren, wenn eine beliebige homogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu)$ ($\mathbf{U} = \mathbf{O}$), die zugehörigen Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}V}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}V}$ und bei der Replizierung noch der spezielle Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ verwendet werden:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}V}(\mathbf{O}) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq_{\mathrm{D}V} \mathbf{O}\}\\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{U})) = \mathbf{O}\} = C_{M^n},\\ \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}V}(\mathbf{O}) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq_{\mathrm{R}V} \mathbf{O}\}\\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{V}(\nu(\mathbf{U})) = \mathbf{O}\} = -C_{M^n}.\end{aligned}$$

Bei dieser Interpretation werden also beim Konzept der **Duplizierung** mit einer homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ die als zulässige Supplemente dienenden Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S} \in C_{M^n}$ als indifferent (zu $\mathbf{O}$) beurteilt. Weiter werden bei dieser Duplizierung und bei Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) die (im Allgemeinen nicht im Kapitalmarkt K liegenden) Zahlungsströme $\mathbf{R} = -\mathbf{T} \in -C_{M^n}$ ($\mathbf{T} \in C_{M^n} \subseteq K$) als indifferent oder vorteilhaft beurteilt: Aus der Duplizierungsgeichung folgt nämlich

$$-\mathbf{V}(\mu(\mathbf{R})) = -\mathbf{R} + \mathbf{S}(\mathbf{R}) = \mathbf{T} + \mathbf{S}(\mathbf{R}) \in K,$$

wegen der Arbitragefreiheit dann $-\mathbf{V}(\mu(\mathbf{R})) \not> \mathbf{O}$ bzw. $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{R})) \geq \mathbf{O}$. Dabei ist $\mathbf{R}$ indifferent genau dann, wenn $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{R})) = 0$ bzw. $\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}) \in C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) = R_{M^n}$ gilt, und $\mathbf{R}$ vorteilhaft genau dann, wenn $\mathbf{R} \in (-C_{M^n}) \setminus R_{M^n}$ gilt.

Beim Konzept der **Replizierung** mit einer homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ und dem speziellen Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ werden dagegen die Zahlungsströme $\mathbf{R} = -\mathbf{S} \in -C_{M^n}$ als indifferent (zu $\mathbf{O}$) angesehen. Dies wird auch schon bei der heuristischen Betrachtung zur Replizierung in Abschnitt 2.2.2 verwendet. Weiter werden bei dieser speziellen Replizierung und bei Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) die zulässigen Supplemente $\mathbf{S} \in C_{M^n}$ selbst als indifferent oder unvorteilhaft bewertet: Aus deren Replizierungsgleichung folgt nämlich

$$\mathbf{V}(v(\mathbf{S})) = \mathbf{S} + \mathbf{S}'(\mathbf{S}) \in K$$

und wegen (AF) dann $\mathbf{V}(v(\mathbf{S})) \not\geq \mathbf{O}$ bzw. $\leq \mathbf{O}$. Dabei ist $\mathbf{S} \in C_{M^n}$ genau dann indifferent, wenn $\mathbf{S} \in R_{M^n}$ ist ($\mathbf{V}(v(\mathbf{S})) = \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{S} = -\mathbf{S}'(\mathbf{S}) \in C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) = R_{M^n}$), und unvorteilhaft ($\mathbf{V}(v(\mathbf{S})) < \mathbf{O}$), wenn $\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ ist.

Weitere Beurteilungen von beliebigen Kapitalmarktgeschäften $\mathbf{X} \in K$ im Spezialfall (LV) eines vollkommenen Supplementsystems L auf einem unvollkommenen Kapitalmarkt werden im Anschluss an den Beweis von Satz 5.2 in Abschnitt 5.3.1 gegeben.

In Abbildung 5.5 sind die D-Indifferenzklasse und D-Bessermenge und die R-Indifferenzklasse und R-Bessermenge eines Zahlungsstroms $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ dargestellt.

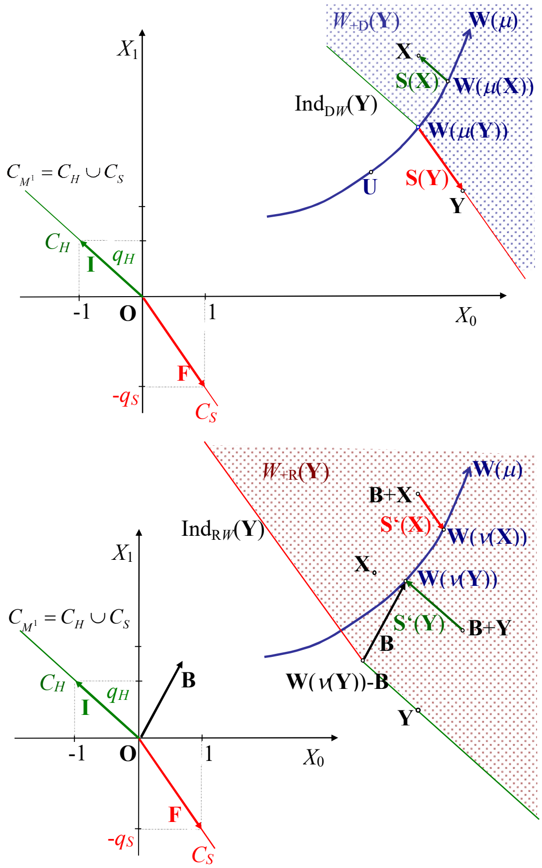


Abb. 5.5 Die Indifferenzklassen $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$ und $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$ und die Bessermengen $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ und $W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ für die Laufzeit $n = 1$, eine Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ und ein Supplementsystem $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$, $\mathbf{I} = \mathbf{S}_H^1 = (-1,q_H)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{F} = \mathbf{S}_S^1 = (1,-q_S)^{\mathsf{T}}$, mit den Marktzinsfaktoren q_H, q_S ($q_S > q_H > 0$)

Beweis für die geometrische Struktur der Indifferenzklassen:

1) Die geometrische Beschreibung der D-Indifferenzklasse: Für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$ gilt

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$$

und mit der Duplizierungsgleichung von $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{M^n},$$

dann

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n}.$$

Damit ist schon die Inklusion $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n}$ gezeigt.

Umgekehrt erhält man für jedes $\mathbf{X} \in \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n}$, also

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S} \text{ mit einem } \mathbf{S} \in C_{M^n},$$

auf Grund der Eindeutigkeit der Duplizierung von $\mathbf{X}$ die Identitäten

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{S},\ \ \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$$

und somit $\mathbf{X} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$. Also ist auch die umgekehrte Inklusion $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n} \subseteq \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y})$ gezeigt und insgesamt

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n} .$$

2) Die geometrische Beschreibung der R-Indifferenzklasse: Für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$ gilt

$$\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$$

und mit der Replizierungsgleichung von $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})),\ \ \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) \in C_{M^n} ,$$

dann

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) \in \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n} .$$

Damit ist schon die Inklusion $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n}$ gezeigt.

Umgekehrt erhält man für jedes $\mathbf{X} \in \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n}$, also mit

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}‘ = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))\ \text{ mit } \mathbf{S}‘ \in C_{M^n} ,$$

auf Grund der Eindeutigkeit der Replizierung von $\mathbf{X}$ die Identitäten

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = \mathbf{S}‘,\ \ \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$$

und somit $\mathbf{X} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$. Also ist auch die umgekehrte Inklusion $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n} \subseteq \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$ gezeigt und insgesamt

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n} .$$

Damit ist der Beweis für die geometrische Interpretation der Indifferenzklassen abgeschlossen. □

5.2.3 Vielfalt der Präferenzordnungen in Abhängigkeit vom Supplementsystem

Als Folgerung der obigen Darstellung der Indifferenzklassen erhält man auch, dass auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt bei fester Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ zu verschiedenen Supplementsystemen L mit verschiedenen Mengen C_{M^n} auch verschiedene Indifferenzklassen und damit auch verschiedene D- und R-Präferenzordnungen gehören. Bei gleicher Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ und verschiedenen Supplementsystemen L und L^* ist also die Übereinstimmung der zugehörigen zulässigen Supplementmengen $C_{M^n} = C_{M^n}(L)$ und $C^*_{M^n} = C_{M^n}(L^*)$ zunächst eine notwendige Bedingung für die Übereinstimmung der zugehörigen D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}LW}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}L^*W}$ bzw. R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}LW}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}L^*W}$:

(GZS) $$C_{M^n} = C^*_{M^n} .$$

Tatsächlich ist bei fester Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ diese Bedingung (GZS) der gleichen zulässigen Supplementmenge auch hinreichend und somit charakteristisch für die Übereinstimmung der Präferenzordnungen: Bei Vorliegen der Bedingung (GZS) ist nämlich die Duplizierung

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) + \mathbf{S}(\mathbf{X}),\ \ \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{M^n} = C^*_{M^n} ,$$

von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mittels Supplementsystem L und Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ auch eine Duplizierung von $\mathbf{X}$ mittels Supplementsystem L^* und Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$. Wegen der Eindeutigkeit der Duplizierung bei festem Supplementsystem stimmt sie also mit der Duplizierung

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu^*(\mathbf{X})) + \mathbf{S}^*(\mathbf{X}),\ \ \mathbf{S}^*(\mathbf{X}) \in C^*_{M^n}\,,$$

mittels Supplementsystem L^* und Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ überein und es gilt

$$\mathbf{S}^*(\mathbf{X}) = \mathbf{S}(\mathbf{X}),\ \ \mathbf{W}(\mu^*(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})),\ \ \mu^*(\mathbf{X}) = \mu(\mathbf{X}).$$

Damit ergibt sich die Übereinstimmung der D-Nutzenfunktionen $\mu_{\mathrm{D}LW}(\mathbf{X}) = \mu_{\mathrm{D}L^*W}(\mathbf{X})$ und die Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}LW} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}L^*W}$. Analog erhält man die Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}LW} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}L^*W}$, wenn der gleiche Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ und das gleiche Supplementsystem vorliegt. Diese Abhängigkeit der Präferenzordnungen von der Supplementmenge wird im folgenden mathematischen Satz über die Vielfalt der D- und R-Präferenzordnungen festgehalten. Wann dagegen bei gleichem Supplementsystem L und verschiedenen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ auch verschiedene Präferenzordnungen resultieren, wird in Abschnitt 5.5.3 unter Verwendung der Voraussetzung der Arbitragefreiheit untersucht.

Satz 5.1 Die Vielfalt der D-Präferenzordnungen bzw. R-Präferenzordnungen in Abhängigkeit vom Supplementsystem

Es liege ein Kapitalmarkt vor, bei dem die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Kapitalmarktgeschäfte ein konvexer linearer Kegel ist. In K werden zwei Supplementsysteme L und L^* betrachtet, für welche jeweils in Verbindung mit der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. der Replizierung für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gesichert ist. Es gilt dann die Aussage, dass die beiden D-Präferenzordnungen bzw. die beiden R-Präferenzordnungen genau dann übereinstimmen, wenn die beiden zugehörigen zulässigen Supplementmengen gleich sind:

$$\trianglerighteq_{\mathrm{D}LW} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}L^*W} \text{ bzw. } \trianglerighteq_{\mathrm{R}LW} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}L^*W} \iff C_{M^n} = C^*_{M^n}\,.$$

5.2.4 Bessermengen der Präferenzordnungen

Für die Bessermenge

$$W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}\}$$

von $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bei der D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ erhält man zunächst die Darstellung

$$\begin{aligned} W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))\} \\ &= \bigcup_{\mu \in [\mu(\mathbf{Y}),b[} \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{W}(\mu)) \\ &= \bigcup_{\mu \in [\mu(\mathbf{Y}),b[} \left(\mathbf{W}(\mu) + C_{M^n}\right) \\ &= \mathbf{W}([\mu(\mathbf{Y})),b[) + C_{M^n}\,. \end{aligned}$$

Analog erhält man für die Bessermenge

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}\}$$

von $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bei der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ die Darstellung

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}([\nu(\mathbf{Y})),b[) - \mathbf{B} - C_{M^n}\,.$$

Geometrische Beschreibung der Bessermengen als affine Kegel

Voraussetzung: Die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte sei ein arbitragefreier konvexer linearer Kegel. Es sei ein Supplementsystem $L \subseteq K$ vorausgesetzt, für welches die **Monotonie der Präferenzordnungen** $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ für *jede* beliebig gewählte Beurteilungskurve $\mathbf{W} \in B(L)$ gesichert ist, wie dies beispielsweise bei den speziellen Supplementsystemen des Abschnitts 8.4 gegeben ist (Definition der Menge $B(L)$ in Abschnitt 8.3.5 als die Menge der Beurteilungskurven $\mathbf{W}$, für welche zum Supplementsystem L die eindeutige Duplizierung und Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gesichert ist).

Unter dieser Voraussetzung kann wie für die Indifferenzklassen auch für die Bessermengen eine genauere Beschreibung und geometrische Interpretation mittels affiner Kegel bewiesen werden (Beweis siehe unten):

$$W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}, \qquad K_{+\mathrm{D}} := C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0},$$

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+\mathrm{R}}, \qquad K_{+\mathrm{R}} := -\,C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0},$$

mit dem Punkt $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ bzw. $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B}$ als möglichem Scheitelpunkt (Spitze) des Kegels und $K_{+\mathrm{D}}$ bzw. $K_{+\mathrm{R}}$ als zugehörigem linearen Kegel.

Die Minkowski-Summen der linearen Kegel $\mathbb{R}^{n+1}_{+0}$ und C_{M^n} bzw. $-\,C_{M^n}$ sind nämlich ebenfalls lineare Kegel.

Die analoge Aussage wird auch für die Schlechtermengen bewiesen:

$$\begin{aligned} W_{-\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglelefteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}\} \\ &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{-\mathrm{D}}, \qquad K_{-\mathrm{D}} := C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{-0}, \\ W_{-\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglelefteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}\} \\ &= \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{-\mathrm{R}}, \qquad K_{-\mathrm{R}} := -\,C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{-0} \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^{n+1}_{+0} = \mathbb{R}^{n+1}_{\geq\mathbf{O}} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \geq \mathbf{O}\},\ \mathbb{R}^{n+1}_{-0} = \mathbb{R}^{n+1}_{\leq\mathbf{O}} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \leq \mathbf{O}\})$.

Da die obigen Darstellungen der Bessermengen und Schlechtermengen für jede beliebige Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ gilt, lassen sich die linearen Kegel $K_{+\mathrm{D}}$, $K_{+\mathrm{R}}$, $K_{-\mathrm{D}}$ und $K_{-\mathrm{R}}$ auch als spezielle Besser- und Schlechtermengen interpretieren, wenn bei der Replizierung der spezielle Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, eine beliebige homogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu)$ ($\mathbf{U} = \mathbf{O}$, $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{O})) = \mathbf{V}(\nu(\mathbf{O})) = \mathbf{O}$) und die zugehörigen Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}V}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}V}$ verwendet werden:

$$\begin{aligned} K_{+\mathrm{D}} = V_{+\mathrm{D}}(\mathbf{O}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}V} \mathbf{O}\} \\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{O}\}, \\ K_{+\mathrm{R}} = V_{+\mathrm{R}}(\mathbf{O}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}V} \mathbf{O}\} \\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{O}\}, \\ K_{-\mathrm{D}} = V_{-\mathrm{D}}(\mathbf{O}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglelefteq_{\mathrm{D}V} \mathbf{O}\} \\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \leq \mathbf{O}\}, \\ K_{-\mathrm{R}} = V_{-\mathrm{R}}(\mathbf{O}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglelefteq_{\mathrm{R}V} \mathbf{O}\} \\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) \leq \mathbf{O}\}. \end{aligned}$$

Wählt man die Beurteilungskurve noch spezieller als homogene lineare Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \mathrel{\dot{>}} \mathbf{O}$, so kann für die linearen Kegel $K_{+\mathrm{D}}$ und $K_{+\mathrm{R}}$ eine noch einfachere Darstellung als Minkowski-Summe bewiesen werden, bei welcher der nichtnegative Orthant $\mathbb{R}^{n+1}_{+0}$ durch einen Strahl

$$\text{ray}\ \mathbf{A} := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} = \lambda\mathbf{A},\ \lambda \geq 0\}$$

mit beliebigem schwach positiven Richtungsvektor **A** ($\mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$) ersetzt wird. Analoge Aussagen gelten für die speziellen Schlechtermengen. Somit gilt

$$\begin{aligned} V_{+\mathrm{D}}(\mathbf{O}) &= K_{+\mathrm{D}} = C_{M^n} + \text{ray}\ \mathbf{A}, \\ V_{+\mathrm{R}}(\mathbf{O}) &= K_{+\mathrm{R}} = -C_{M^n} + \text{ray}\ \mathbf{A}, \\ V_{-\mathrm{D}}(\mathbf{O}) &= K_{-\mathrm{D}} = C_{M^n} - \text{ray}\ \mathbf{A}, \\ V_{-\mathrm{R}}(\mathbf{O}) &= K_{-\mathrm{R}} = -C_{M^n} - \text{ray}\ \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Weiter wird bei einem Supplementsystem L, für welches die Monotonie der D- und R-Präferenzordnungen gesichert ist, für die linearen Kegel $K_{+\mathrm{D}}$ und $K_{+\mathrm{R}}$ der Bessermengen noch eine einfache Beziehung angegeben, nämlich die Inklusion

$$K_{+\mathrm{R}} \subseteq K_{+\mathrm{D}}.$$

Die Frage, ob die Bessermengen $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ bzw. $W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ auch konvexe Mengen sind, wird im nachfolgenden Abschnitt 5.2.5 untersucht. Die in Kapitel 4 bei der Behandlung des vollkommenen Kapitalmarkts darüber hinaus noch angegebene von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ unabhängige Charakterisierung der Präferenzordnung mittels des Barwerts basiert aber auf der Existenz des positiven Preisvektors **P** und ist im Allgemeinen auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt nicht gültig.

Beweis für die geometrische Struktur der Bessermengen und Schlechtermengen:
1) a) **Die geometrische Beschreibung der D-Bessermenge als affinen Kegel**: „⊆“: Für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ erhält man aus der Duplizierungsgleichung

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{M^n},$$

mit $\mathbf{\Delta} := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \geq \mathbf{O}$ die Summendarstellung

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{\Delta} \in \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0}.$$

Somit gilt die Inklusion $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}$.

„⊇“: Umgekehrt hat jeder Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0}$ die Summendarstellung

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S} + \mathbf{\Delta} \ \text{ mit } \mathbf{S} \in C_{M^n},\ \mathbf{\Delta} \in \mathbb{R}^{n+1}_{+0}.$$

Mit dem Hilfszahlungsstrom $\bar{\mathbf{Y}} := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S}$ gilt wegen der Eindeutigkeit der Duplizierung von $\bar{\mathbf{Y}}$ die Übereinstimmung der Beurteilungspunkte von $\bar{\mathbf{Y}}$ und **Y**,

$$\mathbf{W}(\mu(\bar{\mathbf{Y}})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})),$$

und auf Grund der vorausgesetzten **Monotonie** der D-Präferenzordnung

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{\Delta} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \bar{\mathbf{Y}} \simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y},$$

also $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}$ bzw.

$$\mathbf{X} \in W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}).$$

Somit gilt auch die Inklusion $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0} \subseteq W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ und insgesamt die Übereinstimmung dieser beiden Mengen.

b) **Die geometrische Beschreibung der D-Schlechtermenge als affinen Kegel**: Analog zu Teil 1a) des Beweises für die Bessermenge $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ lässt sich zeigen, dass **X** genau dann in der Schlechtermenge

$$\begin{aligned} W_{\text{-D}}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglelefteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}\} \\ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \leq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))\} \end{aligned}$$

von **Y** liegt, wenn

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S} + \mathbf{\Delta} \ \text{ mit } \mathbf{S} \in C_{M^n}, \ \mathbf{\Delta} \leq \mathbf{O},$$

also $\mathbf{X} \in \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{\leq \mathbf{O}}$ gilt. Die D-Schlechtermenge $W_{\text{-D}}(\mathbf{Y})$ ist also der affine Kegel

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{-0} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{\text{-D}}.$$

2) **Die geometrische Beschreibung der R-Bessermenge und R-Schlechtermenge als affine Kegel** wird bei Verwendung der Monotonie der R-Präferenzordnung analog bewiesen mit dem Hilfszahlungsstrom $\bar{\mathbf{Y}} := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{S} - \mathbf{B}$.

3) **Beweis der spezielleren Darstellung der linearen Kegel** $K_{\text{+D}}$ **und** $K_{\text{+R}}$ und damit der Bessermengen $W_{\text{+D}}(\mathbf{Y})$ und $W_{\text{+R}}(\mathbf{Y})$: Es wird jetzt verwendet, dass ein Supplementsystem L vorliegt, für welches mit beliebig gewählter Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ die Duplizierung bzw. Replizierung jedes Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ existiert und einzig ist und die Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ **monoton** sind. Mit der homogenen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$, erhält man für $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Duplizierung

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mu(\mathbf{X})\mathbf{A}, \ \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{M^n}.$$

Nach Teil 1) ist $V_{\text{+D}}(\mathbf{O}) = K_{\text{+D}}$. Demnach gilt wegen der Einzigkeit der Duplizierung

$$\mathbf{X} \in K_{\text{+D}} = V_{\text{+D}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mu(\mathbf{X})\mathbf{A} \geq \mathbf{O}\}$$

genau dann, wenn

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{R} \text{ mit } \mathbf{S} \in C_{M^n} \text{ und } \mathbf{R} \in \text{ray } \mathbf{A}.$$

Daher ist

$$K_{\text{+D}} = V_{\text{+D}}(\mathbf{O}) = C_{M^n} + \text{ray } \mathbf{A}.$$

Analog erhält man mit dem speziellen Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ wegen der Eindeutigkeit der Replizierung

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = v(\mathbf{X})\mathbf{A}, \ \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in C_{M^n},$$

die Mengengleichung

$$K_{\text{+R}} = V_{\text{+R}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : v(\mathbf{X})\mathbf{A} \geq \mathbf{O}\} = - C_{M^n} + \text{ray } \mathbf{A}.$$

4) **Beweis der Inklusionsbeziehung für die linearen Kegel** $K_{\text{+R}}$ **und** $K_{\text{+D}}$: Für die schöne Darstellung der Bessermengen $W_{\text{+D}}(\mathbf{Y})$ und $W_{\text{+R}}(\mathbf{Y})$ als affine Kegel wurde in Teil 1) und 2) ein Supplementsystem L vorausgesetzt, für welches die Monotonie der Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ für jede Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ gesichert ist. Für eine im nachfolgenden Beweis beliebige fest fixierte homogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu)$ ($\mathbf{U} = \mathbf{O}$) ist dann nach Teil 1) die Bessermenge $W_{\text{+D}}(\mathbf{O}) = V_{\text{+D}}(\mathbf{O})$ des Nullpunkts $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gleich dem linearen Kegel $K_{\text{+D}}$ der D-Bessermengen:

$$V_{\text{+D}}(\mathbf{O}) = K_{\text{+D}}.$$

Zum Beweis der behaupteten Inklusion $K_{\text{+R}} \subseteq K_{\text{+D}}$ genügt es also für ein beliebiges $\mathbf{X} \in K_{\text{+R}} = - C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0}$ die Relation $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}V} \mathbf{O}$ zu zeigen, wenn $\trianglerighteq_{\mathrm{D}V}$ die zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu)$ gehörige D-Präferenzordnung ist. Für $\mathbf{X} \in K_{\text{+R}}$ gilt die Summendarstellung

$$\mathbf{X} = - \mathbf{S} + \mathbf{\Delta} \ \text{ mit } \ \mathbf{S} \in C_{M^n}, \mathbf{\Delta} \in \mathbb{R}^{n+1}_{+0}.$$

Aus der Duplizierung von $\mathbf{Z} := - \mathbf{S}$ ($\in \mathbb{R}^{n+1}$),

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{Z}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})),$$

erhält man die Beziehung

$$- \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})) = - \mathbf{Z} + \mathbf{S}(\mathbf{Z}) = \mathbf{S} + \mathbf{S}(\mathbf{Z}) \in C_{M^n} + C_{M^n} \subseteq K + K \subseteq K,$$

da die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte als ein konvexer linearer Kegel vorausgesetzt ist. Mit der **Arbitragefreiheit** von K ($K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) folgt dann $- \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})) \underset{\cdot}{\not>} \mathbf{O}$, also wegen der strengen Monotonie von $\mathbf{V}(\mu)$ die Ungleichung $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Z})) \geq \mathbf{O} = \mathbf{V}(\mu(\mathbf{O}))$ bzw. die Relation

$$\mathbf{Z} \trianglerighteq_{\mathrm{D}V} \mathbf{O}.$$

Mit der vorausgesetzten **Monotonie** der D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DV}$ folgt

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} + \mathbf{\Delta} \trianglerighteq_{DV} \mathbf{Z} \trianglerighteq_{DV} \mathbf{O},$$

also $\mathbf{X} \trianglerighteq_{DV} \mathbf{O}$ bzw. $\mathbf{X} \in V_{+D}(\mathbf{O}) = K_{+D}$. Damit ist der Beweis für die Inklusion $K_{+R} \subseteq K_{+D}$ abgeschlossen.

□

5.2.5 Konvexität der Präferenzordnungen

Eine Präferenzordnung $\succcurlyeq$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ wird als konvex bezeichnet, wenn zu zwei Zahlungsströmen $\mathbf{X}^1$, $\mathbf{X}^2 \in \mathbb{R}^{n+1}$, die jeweils mindestens so gut wie ein dritter Zahlungsstrom $\mathbf{Y}$ sind, auch jede Mischung (Bündel, Portfolio) der beiden Zahlungsströme $\mathbf{X}^1$ und $\mathbf{X}^2$, in der $\mathbf{X}^1$ mit dem Anteil $\lambda \in [0,1]$ und $\mathbf{X}^2$ mit dem Anteil $1 - \lambda$ enthalten ist, ebenfalls mindestens so gut wie $\mathbf{Y}$ ist:

$$\mathbf{X}^1 \succcurlyeq \mathbf{Y}, \mathbf{X}^2 \succcurlyeq \mathbf{Y}, \lambda \in [0,1] \;\Rightarrow\; \lambda\mathbf{X}^1 + (1 - \lambda)\mathbf{X}^2 \succcurlyeq \mathbf{Y}.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass mit zwei Zahlungsströmen $\mathbf{X}^1$ und $\mathbf{X}^2$, die in der Bessermenge $W_+(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}\}$ von $\mathbf{Y}$ liegen, auch die gesamte Verbindungsstrecke

$$\left\langle \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2 \right\rangle := \text{conv}\,\{\mathbf{X}^1,\mathbf{X}^2\} = \{\lambda\mathbf{X}^1 + (1 - \lambda)\mathbf{X}^2 : 0 \le \lambda \le 1\}$$

von $\mathbf{X}^1$ und $\mathbf{X}^2$ in der Bessermenge liegt. Jede Bessermenge $W_+(\mathbf{Y})$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, der Präferenzordnung $\succcurlyeq$ ist also eine konvexe Menge.

Unter der Voraussetzung, dass ein Supplementsystem L vorliegt, für welches die **Monotonie der D- und R-Präferenzordnungen** gesichert ist, werden nun Aussagen zur Konvexität der D- und R-Präferenzordnung angegeben. Für ein unvollkommenes Supplementsystem L ($L \not\subseteq V$; die Definition eines unvollkommenen Supplementsystems findet man in Abschnitt 5.3) wird bewiesen, dass jede D-Bessermenge $W_{+D}(\mathbf{Y})$ ein nichtkonvexer affiner Kegel ist. Somit ist bei unvollkommenem Supplementsystem L und gesicherter Monotonie die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ stets eine nichtkonvexe D-Präferenzordnung.

Weiter wird bewiesen, dass die Konvexität der R-Präferenzordnung, d. h. die Konvexität aller R-Bessermengen $W_{+R}(\mathbf{Y})$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, gleichbedeutend zur Konvexität des linearen Kegels $K_{-D} = C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{-0}$ ist. Die Konvexität der R-Präferenzordnung wird dann bei gesicherter Monotonie für die Laufzeit $n = 1$ allgemein und für eine beliebige Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ unter zusätzlichen Voraussetzungen bewiesen. Für eine Laufzeit $n \ge 2$ wäre somit noch die Frage zu untersuchen, ob es auf einem arbitragefreien Kapitalmarkt K überhaupt ein unvollkommenes Supplementsystem L gibt, für welches die Replizierung mit jeder beliebigen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ existiert und eindeutig ist und der zugehörige lineare Kegel K_{-D} nichtkonvex ist.

Beweis der Aussagen über die Konvexität der D- und R-Präferenzordnung:

1) **Beweis der Nichtkonvexitität der D-Bessermengen**: Da unter Voraussetzung der Monotonie der D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ die D-Bessermengen affine Kegel sind, genügt es die Nichtkonvexität für den zugehörigen linearen Kegel K_{+D} nachzuweisen.

Falls ein unvollkommenes Supplementsystem L ($L \not\subseteq V = K \cap (-K)$) vorliegt, so ist nach dem unten noch folgenden Satz 5.2 der Linienkegel R_{M^n} der vollkommenen zulässigen Supplemente nicht gleich dem gesamten linearen Kegel C_{M^n} der zulässigen Supplemente. Für einen fest gewählten Zahlungsstrom $\mathbf{T} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n} \neq \emptyset$ und eine homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ bestimmt man mit dem speziellen Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ dessen Replizierung

$$\mathbf{T} + \mathbf{S}'(\mathbf{T}) = \mathbf{V}(v(\mathbf{T})),\ \mathbf{S}'(\mathbf{T}) \in C_{M^n}\ .$$

Allgemeiner gilt nun für jedes $\mathbf{T} \in K$ für den zugehörigen R-Beurteilungsvektor die Inzidenz

$$\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) = \mathbf{T} + \mathbf{S}'(\mathbf{T}) \in K + C_{M^n} \subseteq K$$

und wegen der Arbitragefreiheit (AF) von K ($K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) die Ungleichung

$$\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) \underset{\cdot}{\ngtr} \mathbf{O}$$

und wegen der strengen Monotonie der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ die Ungleichung

$$\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) \leq \mathbf{O}.$$

Dabei gilt für $\mathbf{T} \in K$ die Gleichung $\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) = \mathbf{O}$ genau dann, wenn $\mathbf{T} \in K \cap (-C_{M^n})$ ist: Aus $\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) = \mathbf{O}$ und der Replizierungsgleichung folgt nämlich $\mathbf{T} = -\mathbf{S}'(\mathbf{T}) \in K \cap (-C_{M^n})$. Umgekehrt folgt für $\mathbf{T} \in K \cap (-C_{M^n})$ mit $\mathbf{R} := -\mathbf{T} \in C_{M^n}$ die Gleichung

$$\mathbf{T} + \mathbf{R} = \mathbf{O},\ \ \mathbf{R} \in C_{M^n}\ ,$$

sodass wegen der Eindeutigkeit der Replizierung von $\mathbf{T}$ (mit $\mathbf{B} = \mathbf{O}$) das Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{T}) = \mathbf{R} = -\mathbf{T}$ und der Beurteilungskurvenvektor $\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) = \mathbf{O}$ ist. Für die $\mathbf{T} \in K \setminus (-C_{M^n})$ gilt also $\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$.

Da hier bei dem fest gewählten $\mathbf{T} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n} = C_{M^n} \setminus (C_{M^n} \cap (-C_{M^n})) = C_{M^n} \setminus (-C_{M^n})$ auch $\mathbf{T} \in K \setminus (-C_{M^n})$ gilt, ist der zugehörige R-Beurteilungsvektor $\mathbf{V}(v(\mathbf{T}))$ schwach negativ:

$$\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}.$$

Setzt man nun $\mathbf{A} := -\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ und nimmt man an, dass $\mathbf{V}(v(\mathbf{T})) \in K_{+\mathrm{D}} = C_{M^n} + \operatorname{ray} \mathbf{A}$ ist, so erhält man die Summendarstellung

$$-\mathbf{A} = \mathbf{V}(v(\mathbf{T})) = \mathbf{S} + \lambda\mathbf{A}\ \text{ mit } \mathbf{S} \in C_{M^n},\ \lambda \geq 0$$

und wegen der Eindeutigkeit der Duplizierung des Zahlungsstroms $-\mathbf{A}$ bezüglich der homogenen linearen Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$, schließlich $\mathbf{S} = \mathbf{O}$ und $\lambda = -1 < 0$, im Widerspruch zu $\lambda \geq 0$. Demnach ist $\mathbf{V}(v(\mathbf{T}))$ als Summe der beiden Zahlungsströme $\mathbf{T}, \mathbf{S}'(\mathbf{T}) \in C_{M^n} \subseteq K_{+\mathrm{D}}$ nicht in $K_{+\mathrm{D}}$ enthalten. Daher ist $K_{+\mathrm{D}}$ nicht abgeschlossen bezüglich der Addition und bezüglich der Konuskombination (konischen Linearkombination, nichtnegativen Linearkombination, Nichtnegativkombination), also kein konvexer linearer Kegel.

2) **Beweis der Konvexitität der R-Bessermengen für die Laufzeit** $n = 1$: Da unter der Voraussetzung der Monotonie der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ die R-Bessermengen $W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ affine Kegel sind (Beweis siehe oben), genügt es die Konvexität für den zugehörigen linearen Kegel

$$K_{+\mathrm{R}} = -C_{M^n} + \operatorname{ray} \mathbf{A}$$

(mit beliebig fixiertem $\mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$) nachzuwiesen. Dies ist wiederum gleichbedeutend zur Konvexität des linearen Kegels

$$-K_{+\mathrm{R}} = C_{M^n} - \operatorname{ray} \mathbf{A} = K_{-\mathrm{D}}.$$

Im Beweis von Zusatz 8.1.2 b) wird begründet, dass die Konvexität eines linearen Kegels gleichbedeutend ist zu seiner Abgeschlossenheit bezüglich der Addition. Daher ist für zwei Zahlungsströme

$$\mathbf{Z}^j = \mathbf{S}^j - \rho_j\mathbf{A} \in K_{-\mathrm{D}}, \qquad \mathbf{S}^j \in C_{M^n},\ \rho_j \geq 0,\ j = 1{,}2,$$

zu zeigen, dass deren Summe

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^1 + \mathbf{Z}^2 = \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2 - (\rho_1 + \rho_2)\mathbf{A}$$

ebenfalls in $K_{-\mathrm{D}}$ liegt. Dafür genügt es zu beweisen, dass dies insbesondere für zwei Supplemente $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2 \in C_{M^n}$ gilt: Denn wenn

$$\mathbf{T} := \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2 = \mathbf{S} - \rho\mathbf{A} \in K_{-\mathrm{D}} \text{ mit } \mathbf{S} \in C_{M^n},\ \rho \geq 0,$$

nachgewiesen ist, dann gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2 - (\rho_1 + \rho_2)\mathbf{A} \\ &= \mathbf{S} - (\rho + \rho_1 + \rho_2)\mathbf{A} \in K_{\text{-D}}. \end{aligned}$$

Für den Nachweis von $\mathbf{T} \in K_{\text{-D}}$ bildet man die Duplizierung der Summe $\mathbf{T} := \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2 \in C_{M^n} + C_{M^n} \subseteq C + C = C$ (C = cone L) mit der homogenen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O}$),

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{T}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{T})),\ \ \mathbf{S}(\mathbf{T}) \in C_{M^n}\ ,$$

und zeigt $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{T})) = \mu(\mathbf{T})\mathbf{A} \leq \mathbf{O}$ bzw. $\mu(\mathbf{T}) \leq 0$.

Für die Laufzeit $n = 1$ wird dazu $\mu(\mathbf{T}) \leq 0$ für jedes $\mathbf{T} \in C$ = cone L gezeigt. Mit den Bezeichnungen von Beispiel 5.1 (in Abschnitt 5.1.2) hat jeder Zahlungsstrom $\mathbf{T} \in C$ = cone L, $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$, $\mathbf{I} = (-1,q_H)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{F} = (1,-q_S)^{\mathsf{T}}$, $q_S > 0$, $q_H \leq q_S$, die Darstellung als Konuskombination der Supplemente $\mathbf{I}$ und $\mathbf{F}$ vom Typ der Termingeschäfte des Abschnitts 8.4:

$$\mathbf{T} = \alpha\mathbf{I} + \kappa\mathbf{F} = (\kappa - \alpha, \alpha q_H - \kappa q_S)^{\mathsf{T}} \ \text{ mit } \alpha, \kappa \geq 0.$$

Für eine einfache Bestimmung der eindeutigen Duplizierung von $\mathbf{T}$ wählt man speziell $\mathbf{A} = \mathbf{e}_2 = (0,1)^{\mathsf{T}}$ und unterscheidet die beiden Fälle i) $T_0 = \kappa - \alpha \leq 0$ und ii) $T_0 = \kappa - \alpha > 0$. Im Fall i) liefert der Duplizierungsansatz

$$\mathbf{T} = \lambda\mathbf{I} + \mu\mathbf{e}_2,\ \ \lambda \geq 0, \mu \in \mathbb{R},$$

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \kappa - \alpha &= \lambda\cdot(-1) &&+ \mu\cdot 0, \\ \alpha q_H - \kappa q_S &= \lambda\cdot q_H &&+ \mu\cdot 1. \end{aligned}$$

Daraus erhält man den Beurteilungsparameter

$$\mu = \alpha q_H - \kappa q_S + (\kappa - \alpha)\cdot q_H = \kappa\cdot(q_H - q_S) \leq 0.$$

Analog erhält man im Fall ii) mit dem Duplizierungsansatz $\mathbf{T} = \lambda\mathbf{F} + \mu\mathbf{e}_2$, $\lambda \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, den Beurteilungsparameter

$$\mu = \alpha q_H - \kappa q_S + (\kappa - \alpha)\cdot q_S = \alpha\cdot(q_H - q_S) \leq 0.$$

Damit ist für $n = 1$ die Konvexität des linearen Kegels $K_{\text{-D}}$, die Konvexität aller R-Bessermengen $W_{+\text{R}}(\mathbf{Y})$ und somit die Konvexitär der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\text{R}W}$ bewiesen.

3) **Beweis der Konvexitität der R-Bessermengen für eine beliebige Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ unter zusätzlichen Voraussetzungen**: Neben der Monotonie der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\text{R}W}$ wird jetzt noch vorausgesetzt, dass die Normalenvektoren $\mathbf{P_E} \in H_{\mathbf{E}}^{\perp}$ ($P_{\mathbf{E},0} := 1$) der Hyperebenen $H_{\mathbf{E}}$ = lin $L_{\mathbf{E}}$ für alle Indexvektoren (Supplementtypvektoren) $\mathbf{E} \in M^n$ positiv sind,

(*) $\qquad \mathbf{P_E} > \mathbf{O}$ für alle $\mathbf{E} \in M^n$,

und der vom Supplementsystem L erzeugte konvexe lineare Kegel C = cone L im Durchschnitt der homogenen Halbräume $H_{\mathbf{P_E}}^{\leq} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P_E}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} \leq 0\}$ liegt:

(**) $$C \subseteq \bigcap_{\mathbf{E}\in M^n} H_{\mathbf{P_E}}^{\leq}\ .$$

Da der Durchschnitt der homogenen Halbräume ein konvexer linearer Kegel ist, ist diese Inklusion gleichbedeutend zur Inklusion

$$L \subseteq \bigcap_{\mathbf{E}\in M^n} H_{\mathbf{P_E}}^{\leq}$$

bzw. zum Ungleichungssystem

$$\mathbf{P_E}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} \leq 0 \ \text{ für alle } \mathbf{S} = \mathbf{S}_D^j \in L,\ \mathbf{E} \in M^n.$$

Diese zusätzliche Voraussetzung ist beispielsweise für die Supplementsysteme des Abschnitts 8.4 erfüllt, wenn für die $(n\text{-}j\text{+}1)$-periodischen Termingeschäfte $\mathbf{T}_{E_j}^j$ bzw. die j-periodischen Kassageschäfte $\mathbf{K}_{E_j}^j$ noch die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_H^j &\leq \mathbf{T}_S^j && \text{für } j = 1,\ldots,n \ \text{ bzw.} \\ \mathbf{K}_H^j &\leq \mathbf{K}_S^j && \text{für } j = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Im Spezialfall der einperiodischen Termingeschäfte $\mathbf{T}^j_{E_j}$ sind dies für die Komponenten $T^j_{E_j,j} = q_{jE_j}$ bzw. für die zum Intervall [j-1,j] gehörigen Zinsfaktoren q_{jE_j} ($E_j = H, S$) die Ungleichungen

$$q_{jH} \leq q_{jS} \qquad \text{für } j = 1,\ldots,n$$

und im Spezialfall der reinen Wertpapiere $\mathbf{K}^j_{E_j}$ des unvollkommenen Kapitalmarkts für die Komponenten $K^j_{E_j,0} = -d_{j,E_j}$ bzw. für die zum Intervall [0,j] gehörigen Diskontierungsfaktoren d_{j,E_j} ($E_j = H, S$) die Ungleichungen

$$d_{jH} \geq d_{jS} \qquad \text{für } j = 1,\ldots,n.$$

Die Ungleichungen für die Supplemente des Spezialfalls ergeben sich auch aus der Arbitragefreiheit (AF) des Kapitalmarkts K.

Wie oben in Teil 2) des Beweises bereits begründet wurde, genügt es für die Konvexität der Bessermengen $W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ bzw. für die Konvexität des linearen Kegels $K_{\text{-D}}$ zu zeigen, dass die Summe $\mathbf{T} := \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2$ zweier Supplemente $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2 \in C_{M^n}$ in $K_{\text{-D}}$ liegt. Aus der Duplizierung der Summe

$$\mathbf{T} := \mathbf{S}^1 + \mathbf{S}^2 \in C_{M^n} + C_{M^n} \subseteq C + C = C$$

mit der homogenen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \mathrel{\dot{\geq}} \mathbf{O}$),

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{T}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{T})), \;\; \mathbf{S}(\mathbf{T}) \in C_{\mathbf{E}} \subseteq H_{\mathbf{E}} \;\text{ mit einem } \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{T}) \in M^n,$$

erhält man nach Linksmultiplikation mit dem Zeilenveltor $\mathbf{P_E}^\mathsf{T}$ die reellwertige Gleichung

$$\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\mathbf{T} = \mathbf{P_E}^\mathsf{T}\mathbf{S}(\mathbf{T}) + \mu(\mathbf{T})\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\mathbf{A}$$

und wegen $\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\mathbf{S}(\mathbf{T}) = 0$, $\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\mathbf{T} \leq 0$ (wegen (**)), $\mathbf{P_E} > \mathbf{O}$, $\mathbf{A} \mathrel{\dot{\geq}} \mathbf{O}$, $\mathbf{P_E}^\mathsf{T}\mathbf{A} > 0$ die Ungleichung

$$\mu(\mathbf{T}) \leq 0.$$

Demzufolge gilt die behauptete Inzidenz

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{T}) + \mu(\mathbf{T})\mathbf{A} \in C_{M^n} - \text{ray } \mathbf{A} = K_{\text{-D}}.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

5.2.6 Abgeschlossenheit der Präferenzordnungen

Im Hinblick auf die fünf Eigenschaften

(H1) Reflexivität,
(H2) Identitivität (Antisymmetrie),
(H3) Transitivität,
(H4) Abgeschlossenheit bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation und
(H5) Abgeschlossenheit bezüglich der Addition

einer Halbordnung eines *Vektorraums* wird jetzt auch für die vorliegenden Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ untersucht, ob diese neben den Eigenschaften (H1) und (H3) auch die Eigenschaften (H4) und (H5) besitzen, also auch abgeschlossen sind bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation und Addition. Dabei ist beispielsweise für die R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ zu prüfen, ob für beliebige Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}', \mathbf{Y}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit den Relationen $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}' \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}'$ und für eine beliebige nichtnegative Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ auch die Relationen für die Vielfachen und Summen gelten:

$$\lambda\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \lambda\mathbf{Y} \quad \text{und}$$
$$\mathbf{X} + \mathbf{X}' \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'$$

In Abschnitt 4.3 wurde gezeigt, dass sich bei einem vollkommenen Kapitalmarkt mit den Konzepten der Duplizierung und Replizierung für den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ der Zahlungsströme nur eine einzige Präferenzordnung ergibt, nämlich die B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ mit ihrer Bewertung nach den Barwerten $B_n(\mathbf{X})$ der Zahlungsströme $\mathbf{X}$. Dort wurde auch gezeigt, dass diese B-Präferenzordnung tatsächlich abgeschlossen ist bezüglich der beiden Verknüpfungen, nämlich bezüglich der Addition und der nichtnegativen Skalarmultiplikation. Des Weiteren wird in Abschnitt 5.3.3 (Satz 5.5 a) gezeigt, dass bei einem vollkommenen Supplementsystem L ($L \subseteq V = K \cap (-K)$; Definition eines vollkommenen Supplementsystems siehe Abschnitt 5.3) auch auf einem unvollkommenen Kapitalmarkt alle D- und R-Präferenzordnungen gleich der B-Präferenzordnung sind und somit abgeschlossen bezüglich dieser beiden Verknüpfungen sind.

Dagegen sind bei einem unvollkommenen Supplementsystem L ($L \nsubseteq V$) auf einem unvollkommenen Kapitalmarkt die nach den Konzepten der Duplizierung und der Replizierung erhaltenen D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ im Allgemeinen nicht abgeschlossen bezüglich der Addition und der nichtnegativen Skalarmultiplikation. Diese Feststellung wird mit den unten angegebenen Beispielen belegt. Nur in einem Spezialfall ist die Abgeschlossenheit der R- bzw. D-Präferenzordnung bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation gegeben:

Abgeschlossenheit der R- bzw. D-Präferenzordnung bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation

Falls bei der Replizierung der Basiszahlungsstrom

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}$$

ist und die zugehörige homogene Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(\mu) = \mathbf{W}(\mu) - \mathbf{U} = \mu\mathbf{A},\ \mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O},\ \mu \in J = \mathbb{R}, \text{ homogen linear}$$

ist, ist auch auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt die R-Präferenzordnung abgeschlossen bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation.

Falls bei der Duplizierung der Bezugszahlungsstrom

$$\mathbf{U} = \mathbf{O}$$

ist und die Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A},\ \mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O},\ \mu \in J = \mathbb{R}, \text{ homogen linear}$$

ist, ist auch auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt die D-Präferenzordnung abgeschlossen bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation.

Beweis für die Abgeschlossenheit der D- und R-Präferenzordnungen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation in einem Spezialfall:

1) Zur Untersuchung der Abgeschlossenheit der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation wird von zwei Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ mit $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}$ und einem $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 0$ ausgegangen. In ihren eindeutigen Replizierungen

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})),\ \ \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{X})} \subseteq C_{M^n}\ ,$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{Y} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{Y})),\ \ \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{Y})} \subseteq C_{M^n}$$

gilt für die Beurteilungsvektoren

$$\mathbf{V}(v(\mathbf{X})) \geq \mathbf{V}(v(\mathbf{Y})).$$

Falls nun der Spezialfall mit

$$\mathbf{U} = \mathbf{B}$$

und einer homogen linearen Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A},\ \mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O},\ \mu \in J = \mathbb{R},$$

vorliegt, erhält man für die Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ die Darstellungen

$$\lambda\mathbf{X} + \lambda\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \lambda\mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{V}(\lambda v(\mathbf{X})) \quad \text{und}$$
$$\lambda\mathbf{Y} + \lambda\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \lambda\mathbf{V}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{V}(\lambda v(\mathbf{Y})).$$

Da $\lambda\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ und $\lambda\mathbf{S}'(\mathbf{Y})$ wegen $\lambda \geq 0$ ebenfalls zulässige Supplemente von C_{M^n} sind, sind die angegebenen Darstellungen die eindeutig bestimmten Replizierungen von $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$. Für die zugehörigen Beurteilungsvektoren gilt also

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(v(\lambda\mathbf{X})) &= \mathbf{V}(\lambda v(\mathbf{X})) = \lambda v(\mathbf{X})\mathbf{A} = \lambda\mathbf{V}(v(\mathbf{X}))\\ &\geq \lambda\mathbf{V}(v(\mathbf{Y})) = \lambda v(\mathbf{Y})\mathbf{A} = \mathbf{V}(\lambda v(\mathbf{Y})) = \mathbf{V}(v(\lambda\mathbf{Y}))\end{aligned}$$

und somit

$$\lambda\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \lambda\mathbf{Y}.$$

Daher ist in dem angegebenen Spezialfall die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ abgeschlossen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation. Es wird durch Beispiele noch gezeigt, dass diese Abgeschlossenheit nicht vorliegt, sobald $\mathbf{U} \neq \mathbf{B}$ ist oder $\mathbf{V}(\mu)$ nichtlinear ist.

2) Bei der Untersuchung der Abgeschlossenheit der D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation geht man analog von zwei Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ mit $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}$ und einem $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \geq 0$ aus. In ihren eindeutigen Duplizierungen

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})),\ \ \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{X})} \subseteq C_{M^n}\ ,$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})),\ \ \mathbf{S}(\mathbf{Y}) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{Y})} \subseteq C_{M^n}$$

gilt für die Beurteilungsvektoren

$$\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})).$$

Falls nun der Spezialfall mit dem Bezugszahlungsstrom

$$\mathbf{U} = \mathbf{O}$$

und einer homogen linearen Beurteilungskurve

$$\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A},\ \mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O},\ \mu \in J = \mathbb{R},$$

vorliegt, erhält man für die Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ die Darstellungen

$$\lambda\mathbf{X} = \lambda\mathbf{S}(\mathbf{X}) + \lambda\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \lambda\mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\lambda\mu(\mathbf{X})) \ \text{und}$$
$$\lambda\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \lambda\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) = \lambda\mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{V}(\lambda\mu(\mathbf{Y})).$$

Da $\lambda\mathbf{S}(\mathbf{X})$ und $\lambda\mathbf{S}(\mathbf{Y})$ wegen $\lambda \geq 0$ ebenfalls zulässige Supplemente von C_{M^n} sind, sind dies die eindeutig bestimmten Duplizierungen von $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$. Für die zugehörigen Beurteilungsvektoren gilt also

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mu(\lambda\mathbf{X})) &= \mathbf{V}(\lambda\mu(\mathbf{X})) = \lambda\mu(\mathbf{X})\mathbf{A} = \lambda\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))\\ &\geq \lambda\mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) = \lambda\mu(\mathbf{Y})\mathbf{A} = \mathbf{V}(\lambda\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{V}(\mu(\lambda\mathbf{Y}))\end{aligned}$$

und somit

$$\lambda\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \lambda\mathbf{Y}.$$

Daher ist in dem betrachteten Spezialfall die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ abgeschlossen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation. Es wird jedoch durch nachfolgende Beispiele gezeigt, dass diese Abgeschlossenheit nicht vorliegt, sobald $\mathbf{U} \neq \mathbf{O}$ ist oder $\mathbf{V}(\mu)$ nichtlinear ist. □

Beispiele für D- und R-Präferenzordnungen, die nicht abgeschlossen sind bezüglich der Addition bzw. der nichtnegativen Skalarmultiplikation

Falls die R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ bezüglich der Addition abgeschlossen ist, ist auch die dazu inverse Relation $\trianglelefteq_{\mathrm{R}W}$ bezüglich der Addition abgeschlossen: Nach der Definition der inversen Relation $\trianglelefteq_{\mathrm{R}W}$ gilt nämlich $\mathbf{Y} \trianglelefteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{X}$ genau dann, wenn $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}$ gilt. Falls mit den Relationen $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}' \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}'$ auch die Relation $\mathbf{X} + \mathbf{X}' \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'$ gilt, folgt aus $\mathbf{Y} \trianglelefteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}' \trianglelefteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{X}'$ auch die Relation $\mathbf{Y} + \mathbf{Y}' \trianglelefteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{X} + \mathbf{X}'$. Aus der Abgeschlossenheit der Relation und der dazu inversen Relation ergibt sich dann auch die Abgeschlossenheit der zugehörigen Indifferenzrelation

$\simeq_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \cap \trianglelefteq_{\mathrm{R}W}$. Analog folgt aus der Abgeschlossenheit der Relation $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation auch die entsprechende Abgeschlossenheit für die dazu inverse Relation $\trianglelefteq_{\mathrm{R}W}$ und die zugehörige Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{R}W}$. Die analogen Aussagen gelten auch für D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$. In den nachfolgend angegebenen Beispielen für die Nichtabgeschlossenheit der Präferenzordnung genügt es also die Nichtabgeschlossenheit der zugehörigen Indifferenzrelation bezüglich der Addition zu begründen.

Beispiel 5.4 Additiv nicht abgeschlossene D- und R-Präferenzordnungen

1) **Eine additiv nicht abgeschlossene D-Präferenzordnung**
Bei der Laufzeit $n = 1$, dem unvollkommenen Supplementsystem $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$ mit der Investition $\mathbf{I} = (-1,q_H)^\mathsf{T}$, der Finanzierung $\mathbf{F} = (1,-q_S)^\mathsf{T}$ und den Zinsfaktoren $q_H, q_S > 0$, $q_H \neq q_S$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ und der homogen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\mu)^\mathsf{T}$, $\mu \in J = \mathbb{R}$, ist nach Abschnitt 8.4 die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und der Replizierung gesichert. Für die Zahlungsströme

$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' = \mathbf{O}$,
$\mathbf{X} = \mathbf{I} = (-1,q_H)^\mathsf{T}$,
$\mathbf{X}' = \mathbf{F} = (1,-q_S)^\mathsf{T}$

gelten die Duplizierungen

$\mathbf{Y} = \mathbf{V}(0)$, $\quad \mathbf{X} = \mathbf{I} + \mathbf{V}(0)$,
$\mathbf{Y}' = \mathbf{V}(0)$, $\quad \mathbf{X}' = \mathbf{F} + \mathbf{V}(0)$

und damit die Relationen

$\mathbf{X} \simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}' \simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}'$.

Die Summe der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{X}'$ hat aber die Duplizierung

$\mathbf{X} + \mathbf{X}' = (0,q_H - q_S)^\mathsf{T} = \mathbf{V}(q_H - q_S) \neq \mathbf{O}$

und ist somit nicht indifferent zur Summe der Zahlungsströme $\mathbf{Y} + \mathbf{Y}' = \mathbf{O} = \mathbf{V}(0)$:

$\mathbf{X} + \mathbf{X}' \not\simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'$.

Demzufolge ist auch im Spezialfall mit einem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ und einer homogen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ die D-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{D}W}$ und nach obiger Überlegung dann auch die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ nicht abgeschlossen bei der Addition.

2) **Eine additiv nicht abgeschlossene R-Präferenzordnung**
Bei $n = 1$, $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$ mit $\mathbf{I} = (-1,q_H)^\mathsf{T}$, $\mathbf{F} = (1,-q_S)^\mathsf{T}$ und $q_H, q_S > 0$, $q_H \neq q_S$, $\mathbf{U} = \mathbf{B} = \mathbf{O}$, $\mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\mu)^\mathsf{T}$, $\mu \in J = \mathbb{R}$, gelten für die Zahlungsströme

$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' = \mathbf{O}$,
$\mathbf{X} = -\,\mathbf{I} = (1,-q_H)^\mathsf{T}$,
$\mathbf{X}' = -\,\mathbf{F} = (-1,q_S)^\mathsf{T}$

die Replizierungen

$\mathbf{Y} = \mathbf{V}(0)$, $\quad \mathbf{X} + \mathbf{I} = \mathbf{V}(0)$,
$\mathbf{Y}' = \mathbf{V}(0)$, $\quad \mathbf{X}' + \mathbf{F} = \mathbf{V}(0)$

und somit die Relationen

$\mathbf{X} \simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}' \simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}'$.

Die Summe der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{X}'$ hat aber die Replizierung

$\mathbf{X} + \mathbf{X}' = (0,q_S - q_H)^\mathsf{T} = \mathbf{V}(q_S - q_H) \neq \mathbf{O}$

und ist somit nicht indifferent zur Summe der Zahlungsströme $\mathbf{Y} + \mathbf{Y}' = \mathbf{O} = \mathbf{V}(0)$:

$\mathbf{X} + \mathbf{X}' \not\simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'$.

Demzufolge ist auch im Spezialfall mit einem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ und einer homogen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ die R-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{R}W}$ und dann auch die R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ nicht abgeschlossen bei der Addition. $\triangle$

Beispiel 5.5 D- und R-Präferenzordnungen, die nicht abgeschlossen sind bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation

1) **Nicht abgeschlossene D-Präferenzordnungen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation**

a) Bei der Laufzeit $n = 1$, dem unvollkommenen Supplementsystem $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$ mit $\mathbf{I} = (-1,q_H)^\mathsf{T}$, $\mathbf{F} = (1,-q_S)^\mathsf{T}$ und den Marktzinsfaktoren q_H, $q_S > 0$, $q_H \neq q_S$, dem Bezugszahlungsstrom

$$\mathbf{U} = -\,\mathbf{I} = (1,-q_H)^\mathsf{T} \neq \mathbf{O},$$

der homogen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,\mu)^\mathsf{T}$, $\mu \in J = \mathbb{R}$, und $\lambda \geq 0$ erhält man für die Zahlungsströme

$$\mathbf{Y} = \mathbf{O},$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{U} + \mathbf{F} = (1,-q_H)^\mathsf{T} + (1,-q_S)^\mathsf{T} = (2,-q_H-q_S)^\mathsf{T}$$

die eindeutig bestimmten Duplizierungen

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} + \mathbf{F} + \mathbf{V}(0),$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} + \mathbf{I} + \mathbf{V}(0)$$

und somit die Relation

$$\mathbf{X} \simeq_{DW} \mathbf{Y}.$$

Zur Ermittlung der Duplizierung von $\lambda\mathbf{X}$ löst man das Gleichungssystem

$$\lambda\mathbf{X} = \mathbf{U} + \kappa\mathbf{F} + \mathbf{V}(\mu)$$

bzw. in der Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} 2\lambda &= 1 + \kappa, \\ \lambda(-q_H-q_S) &= -q_H - \kappa q_S + \mu \end{aligned}$$

und erhält

$$\kappa = 2\lambda - 1 \geq 0 \qquad \text{für } \lambda \geq ½$$

und

$$\mu = (\lambda - 1)(q_S - q_H) \neq 0 \quad \text{für } \lambda \neq 1.$$

Bei einem Transformationsparameter λ mit $\lambda \geq ½$ und $\lambda \neq 1$ erhält man mit dem obigen Ansatz für $\lambda\mathbf{X}$ die Duplizierung und für die Beurteilungsparameter der Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ die Ungleichung

$$\mu(\lambda\mathbf{X}) = \mu \neq 0 = \mu(\lambda\mathbf{Y})$$

und somit für die Zahlungsströme die Relation

$$\lambda\mathbf{X} \not\simeq_{DW} \lambda\mathbf{Y}.$$

Es genügt schon die Tatsache, dass für ein reelles $\lambda \geq 0$ die speziellen Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ indifferent sind. Damit sind in diesem Beispiel mit einem von $\mathbf{O}$ verschiedenen Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ trotz linearer Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ die D-Indifferenzrelation $\simeq_{DW}$ und die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ nicht abgeschlossen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation.

b) Bei $n = 1$, $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$ mit $\mathbf{I} = (-1,q_H)^\mathsf{T}$, $\mathbf{F} = (1,-q_S)^\mathsf{T}$ und q_H, $q_S > 0$, $q_H \neq q_S$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ und der nichtlinearen homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ mit

$$\mathbf{V}(\mu) = \mu\,(1,1)^\mathsf{T} \qquad \text{für } \mu < 1,$$
$$\mathbf{V}(\mu) = (1,1) + (\mu - 1)(1,2)^\mathsf{T} = (\mu,2\mu-1)^\mathsf{T} \qquad \text{für } \mu \geq 1$$

erhält man für die Zahlungsströme

$$\mathbf{X} = \mathbf{F} + \mathbf{V}(1) = (2,1-q_S)^\mathsf{T} \quad \text{und}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{I} + \mathbf{V}(1) = (0,1+q_H)^\mathsf{T}$$

die Relation

$$\mathbf{X} \simeq_{DW} \mathbf{Y}.$$

Weiter wird gezeigt, dass es zumindest ein $\lambda \geq 0$ gibt, für welches

$$\lambda\mathbf{X} \not\simeq_{DW} \lambda\mathbf{Y}$$

gilt. Für $\lambda > 1$ ergeben sich für die Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ die Duplizierungen

$$\lambda\mathbf{X} = \kappa\mathbf{F} + \mathbf{V}(\mu) = \kappa\mathbf{F} + (\mu,2\mu-1)^\mathsf{T},$$

$$\lambda\mathbf{Y} = \alpha\mathbf{I} + \mathbf{V}(\mu') = \alpha\mathbf{I} + (\mu',2\mu'-1)^{\mathsf{T}}$$

mit den Parameterwerten

$\kappa = 2\lambda - \mu$, $\mu = (1 + 2\lambda + q_S\lambda)/(2 + q_S) > 1$, $\kappa = \lambda - 1/(2 + q_S) > 0$,

$\alpha = \mu'$, $\mu' = (1 + \lambda + q_H\lambda)/(2 + q_H) > 1$ $\alpha = \mu' > 0$.

Die Beurteilungsparameter μ und μ' sind genau dann gleich, wenn $\lambda = (q_S - q_H)/(2 + q_S)$ gilt. Für jedes beliebige $\lambda > 1$ ist nun $\lambda > (q_S - q_H)/(2 + q_S)$ und daher $\mu \neq \mu'$. Somit sind die Beurteilungsparameter $\mu = \mu(\lambda\mathbf{X})$ und $\mu' = \mu'(\lambda\mathbf{Y})$ voneinander verschieden und daher die Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ nicht indifferent. Damit sind auch in diesem Beispiel trotz $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ mit einer nichtlinearen homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ die D-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{D}W}$ und die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ nicht abgeschlossen bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation.

2) **Nicht abgeschlossene R-Präferenzordnungen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation**

a) Bei der Laufzeit $n = 1$, dem unvollkommenen Supplementsystem $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$ mit $\mathbf{I} = (-1,q_H)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{F} = (1,-q_S)^{\mathsf{T}}$ und $q_H, q_S > 0$, $q_H \neq q_S$, dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, dem Bezugszahlungsstrom

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} = (-1,q_H)^{\mathsf{T}} \neq \mathbf{O} = \mathbf{B},$$

der homogen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(v) = \hat{\mathbf{V}}(v) = (0,v)^{\mathsf{T}}$, $v \in J = \mathbb{R}$, und $\lambda \geq 0$ erhält man für die Zahlungsströme

$$\mathbf{Y} = \mathbf{O},$$
$$\mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{F} = (-1,q_H)^{\mathsf{T}} + (-1,q_S)^{\mathsf{T}} = (-2,q_H+q_S)^{\mathsf{T}}$$

die eindeutig bestimmten Replizierungen

$$\mathbf{X} + \mathbf{F} = \mathbf{U} + \mathbf{V}(0),$$
$$\mathbf{Y} + \mathbf{I} = \mathbf{U} + \mathbf{V}(0)$$

und somit die Relation

$$\mathbf{X} \simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}.$$

Zur Ermittlung der Replizierung von $\lambda\mathbf{X}$ löst man das Gleichungssystem

$$\lambda\mathbf{X} + \kappa\mathbf{F} = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v)$$

bzw. in der Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} -2\lambda \quad &+ \kappa &&= -1, \\ (q_H+q_S)\lambda \quad &- q_S\kappa &&= q_H \quad + v \end{aligned}$$

und erhält

$\kappa = 2\lambda - 1 \geq 0$ für $\lambda \geq ½$ und

$v = (\lambda - 1)(q_H - q_S) \neq 0$ für $\lambda \neq 1$, $q_S \neq q_H$.

Wegen $v(\lambda\mathbf{X}) = v \neq 0 = v(\lambda\mathbf{Y})$ ist

$\lambda\mathbf{X} \not\simeq_{\mathrm{R}W} \lambda\mathbf{Y}$ für $\lambda \geq ½$ und $\lambda \neq 1$.

Es genügt schon, dass für ein reelles $\lambda \geq 0$ die speziellen Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ nicht indifferent sind. Damit sind in diesem Beispiel mit einem von $\mathbf{B}$ verschiedenen Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U}$ trotz linearer homogener Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ die R-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{R}W}$ und die R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ nicht abgeschlossen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation.

b) Bei $n = 1$, $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$ mit $\mathbf{I} = (-1,q_H)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{F} = (1,- q_S)^{\mathsf{T}}$ und $q_H, q_S > 0$, $q_H \neq q_S$, $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O} = \mathbf{B}$, der nichtlinearen homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(v)$ mit

$\mathbf{V}(v) = v\cdot(1,1)^{\mathsf{T}}$ für $v < 1$,

$\mathbf{V}(v) = (1,1) + (v - 1)(1,2)^{\mathsf{T}} = (v,2v-1)^{\mathsf{T}}$ für $v \geq 1$

erhält man für die Zahlungsströme

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}(1) - \mathbf{F} = (0,1+q_S)^{\mathsf{T}}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}(1) - \mathbf{I} = (2,1-q_H)^{\mathsf{T}}$$

die Replizierungen

$$\mathbf{X} + \mathbf{F} \;= \mathbf{V}(1),$$
$$\mathbf{Y} + \mathbf{I} \;= \mathbf{V}(1)$$

und damit die Relation

$$\mathbf{X} \simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}.$$

Weiter wird gezeigt, dass es zumindest ein $\lambda \geq 0$ gibt, für welches

$$\lambda\mathbf{X} \not\simeq_{\mathrm{R}W} \lambda\mathbf{Y}$$

gilt. Für $\lambda > 1$ ergeben sich für die Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ die Replizierungen

$$\lambda\mathbf{X} + \kappa\mathbf{F} = (v', 2v'-1)^{\mathsf{T}},$$
$$\lambda\mathbf{Y} + \alpha\mathbf{I} = (v'', 2v''-1)^{\mathsf{T}}$$

mit den Parameterwerten

$$\kappa = v', \qquad v' = (1 + \lambda + q_S\lambda)/(2 + q_S),$$
$$\alpha = 2\lambda - v'', \qquad v'' = (1 + \lambda + q_H\lambda)/(2 + q_H).$$

Die Beurteilungsparameter v' und v'' sind genau dann gleich, wenn $(q_S - q_H)(\lambda - 1) = 0$ gilt. Auf Grund der Voraussetzungen $\lambda > 1$ und $q_H \neq q_S$ sind die Beurteilungsparameter $v' = v(\lambda\mathbf{X})$ und $v'' = v(\lambda\mathbf{Y})$ voneinander verschieden und daher die Zahlungsströme $\lambda\mathbf{X}$ und $\lambda\mathbf{Y}$ nicht indifferent. Damit sind auch in diesem Beispiel mit einer nichtlinearen homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(v)$ die R-Indifferenzrelation $\simeq_{\mathrm{R}W}$ und die R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ nicht abgeschlossen bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation. △

5.3 Vielfalt der Präferenzordnungen in Abhängigkeit von der inhomogenen Beurteilungskurve

Im Kapitel 4 wurde gezeigt, dass die Konzepte der Duplizierung und der Replizierung auf dem vollkommenen Kapitalmarkt nur eine einzige Präferenzordnung liefern, nämlich die B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ mit der Bewertung der Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mittels ihrer Barwerte $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ ($\mathbf{P} \in K^{\perp}$, $\mathbf{P} > \mathbf{O}$). Diese Präferenzordnung $\trianglerighteq$ ist nur abhängig vom Preisvektor $\mathbf{P}$ des vollkommenen Kapitalmarkts K $= H_{\mathbf{P},0}$ und unabhängig von der für die Zielsetzung des Entscheiders verwendeten Beurteilungskurve.

Auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt dagegen liefern diese beiden Konzepte eine große Vielfalt von Präferenzordnungen. Bei der in Abschnitt 5.2.2 angegebenen Beschreibung der Indifferenzklassen der D- bzw. R-Präferenzordnungen als affine Kegel mit C_{M^n} bzw. $-C_{M^n}$ als zugehörigen linearen Kegel ergibt sich, dass zu Supplementsystemen L mit verschiedenen Transformationskegeln C_{M^n} auch verschiedene Indifferenzklassen und damit auch verschiedene Präferenzordnungen gehören. Darüber hinaus wird nun gezeigt, dass bei einem fest vorgegebenen Supplementsystem L, für welches für die betrachteten Beurteilungskurven $\mathbf{W} \in B(L)$ die eindeutige Duplizierung und Replizierung nachgewiesen ist, zu verschiedenen Beurteilungskurven im Allgemeinen auch verschiedene Präferenzordnungen gehören. Wann genau beim Zusammenspiel der Beurteilungskurven mit dem Supplementsystem verschiedene Präferenzordnungen resultieren, wird jetzt näher untersucht. Für den Entscheider bleibt dann noch die Aufgabe, ein für ihn zur Verfügung stehendes Supplementsystem L und eine zu seiner Zielsetzung passende Beurteilungskurve $\mathbf{W}(v)$ zu wählen.

Vollkommenes und unvollkommenes Kapitalmarktgeschäft

Für eine hierbei auftretende Fallunterscheidung wird das Supplementsystem L in zwei disjunkte (elementfremde) Teilmengen zerlegt:

$$L = L_V \cup L_U$$

mit der Menge

$$L_V := \{\mathbf{S}_D^j \in L : -\mathbf{S}_D^j \in K\}$$

ihrer sogenannten **vollkommenen Supplemente** und der Menge

$$L_U := \{\mathbf{S}_D^j \in L : -\mathbf{S}_D^j \notin K\}$$

ihrer sogenannten **unvollkommenen Supplemente**.

Allgemein wird hier ein Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{S} \in K$ als ein **vollkommenes Kapitalmarktgeschäft** (ein in K umkehrbares Kapitalmarktgeschäft) bezeichnet, wenn $-\mathbf{S}$ ebenfalls ein Kapitalmarktgeschäft ist, und als ein **unvollkommenes Kapitalmarktgeschäft** (ein in K nicht umkehrbares Kapitalmarktgeschäft) bezeichnet, wenn $-\mathbf{S}$ kein Kapitalmarktgeschäft ist.

Die Gesamtheit der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S}$ ($\mathbf{S} \in K$ und $-\mathbf{S} \in K$ bzw. $\mathbf{S} \in -K$) bildet den sogenannten **Linienraum**

$$V := K \cap (-K)$$

des konvexen linearen Kegels K. Die Menge V enthält alle durch den Nullpunkt $\mathbf{O}$ gehenden Geraden in K und ist der größte in K enthaltene Vektorunterraum (siehe Abschnitte 8.1 und 8.2). V kann daher auch als Linienraum der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte oder Linienraum des Kapitalmarkts bezeichnet werden.
Die Gesamtheit aller unvollkommenen Kapitalmarktgeschäfte ist $U := K \setminus V$. Damit gilt für die Teilmengen L_V und L_U des Supplementsystems:

$$L_V = L \cap V \subseteq V,$$
$$L_U = L \cap U \subseteq U.$$

Mit diesen Bezeichnungen ist der Kapitalmarkt genau dann vollkommen, wenn alle seine Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S} \in K$ vollkommen sind ($V = K$), und genau dann unvollkommen, wenn es mindestens ein unvollkommenes Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{T} \in K$ gibt ($U = K \setminus V \neq \emptyset$).

Vollkommenes, streng unvollkommenes und schwach unvollkommenes Supplementsystem

Das Supplementsystem $L \subseteq K$ wird im

Fall (LV) $\quad L = L_V,\ L_U = \emptyset$

als **vollkommen** bezeichnet, im

Fall (LU) $\quad L = L_U,\ L_V = \emptyset$

als **streng unvollkommen** und im

Fall (LS) $\quad L_V \neq \emptyset \wedge L_U \neq \emptyset$

als **schwach unvollkommen**.

Das Supplementsystem L wird als **unvollkommen** bezeichnet, wenn es streng oder schwach unvollkommen ist, d. h. wenn $L_U \neq \emptyset$ ist.

Charakterisierungen der Fälle (LV), (LU) und (LS)

Für die konischen Hüllen

$$C = \text{cone } L,\ - C = \text{cone } (-L),$$

und die lineare Hülle

$$H := \text{lin } L = C + (-C) = C - C$$

des Supplementsystems L gelten die Inklusionen

$$L \subseteq C \subseteq K,$$
$$L \subseteq C \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Mit der Bezeichnung

$$\complement K := \complement_{\mathbb{R}^{n+1}}(K) := \mathbb{R}^{n+1} \setminus K$$

für das Komplement (die Komplementärmenge) der Menge K bezüglich $\mathbb{R}^{n+1}$ lassen sich die drei möglichen Fälle (LV), (LU) und (LS) für ein Supplementsystem L ($\subseteq C \subseteq K$) durch jeweils eine der nachfolgend angegebenen Bedingungen charakterisieren:

(LV)	a)	$-L \subseteq K$	bzw.	$(-L) \cap \complement K = \emptyset$,
	b)	$-C \subseteq K$	bzw.	$(-C) \cap \complement K = \emptyset$,
	c)	$H \subseteq K$	bzw.	$H \cap \complement K = \emptyset$.
(LU)	d)	$-L \subseteq \complement K$	bzw.	$(-L) \cap K = \emptyset$,
	e)	$(-C) \setminus O \subseteq \complement K$	bzw.	$(-C) \cap K = O$;
(LS)	f)	$(-L) \cap K \neq \emptyset$	$\wedge$	$(-L) \cap \complement K \neq \emptyset$,
	g)	$(-C) \cap K \neq O$	$\wedge$	$(-C) \cap \complement K \neq \emptyset$.

Beweis der Charakterisierungen der drei für ein Supplementsystem möglichen Fälle:

Der Fall (LV) wird beschrieben durch die Bedingung a) $-L \subseteq K$. Da K ein konvexer linearer Kegel ist, folgt aus a) die Bedingung b): $-C = \text{cone }(-L) \subseteq \text{cone } K = K$. Aus demselben Grund folgt aus b) die Bedingung c), da mit $(-C) \subseteq K$ und $C \subseteq K$ auch $H = C + (-C) \subseteq K$ gilt. Aus c) folgt wiederum a), da $-L$ eine Teilmenge von H ist.

Der Fall (LU) wird beschrieben durch die Bedingung d) $(-L) \cap K = \emptyset$. Aus d) kann nun e) geschlossen werden: Dazu nimmt man an, dass e) nicht gilt, dass also $((-C) \cap K) \setminus O \neq \emptyset$ ist. Es gibt also ein nichttriviales Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{T}$ im konvexen Kegel $-C = \text{cone }(-L)$, d. h. mit der Konuskombination

$$\mathbf{T} = \sum_{\substack{j=1,..,n \\ D=H,S}} \lambda_{j,D}(-\mathbf{S}_D^j) \ \in (-C \cap K) \setminus O,$$

$\lambda_{j,D} \geq 0$ für alle $(j,D) \in I_n \times M$, $I_n = \{1,\ldots,n\}$, $M = \{H,S\}$, und mit mindestens einem positiven Koeffizienten $\lambda_{k,E}$, $(k,E) \in I_n \times M$. Da $\mathbf{T}$ und die $\mathbf{S}_D^j \in L$ Kapitalmarktgeschäfte sind und K ein konvexer linearer Kegel ist, ergibt sich aus dieser Darstellung für $\mathbf{T}$, dass auch $-\mathbf{S}_E^k$ ein Kapitalmarktgeschäft ist:

$$-\mathbf{S}_E^k = [\mathbf{T} + \sum_{\substack{(j,D)\in I_n\times M \\ (j,D)\neq(k,E)}} \lambda_{j,D}\mathbf{S}_D^j\,]/\lambda_{k,E} \in K.$$

Da außerdem $-\mathbf{S}_E^k \in -L$ ist, ergibt sich $-\mathbf{S}_E^k \in (-L) \cap K$ im Widerspruch zu d). Daher folgt aus d) auch die Bedingung e). Da $-L$ eine Teilmenge von $-C \setminus O$ ist, folgt aus e) auch d).

Der Fall (LS) wird beschrieben durch die Bedingung f) $(\text{-}L) \cap K \neq \emptyset \wedge (\text{-}L) \cap \complement K \neq \emptyset$, die besagt, dass weder (LU) noch (LV) gilt. Nach den oben bewiesenen Charakterisierungen b) für (LV) und e) für (LU) ist dies gleichbedeutend dazu, dass g) gilt. □

Konische und lineare Hüllen, Linienräume und Linienkegel

Allgemein gelten für die konische Hülle

$$C_{\mathbf{E}} = \text{cone}\, L_{\mathbf{E}},$$

die lineare Hülle

$$H_{\mathbf{E}} = \text{lin}\, L_{\mathbf{E}}$$

des n-Tupels $L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}^1_{E_1}, \ldots, \mathbf{S}^n_{E_n})$ bzw. der n-elementigen Menge $L_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{S}^1_{E_1}, \ldots, \mathbf{S}^n_{E_n}\}$ ($\mathbf{E} \in M^n$) und für die konische Hülle

$$C = \text{cone}\, L$$

und die lineare Hülle

$$H = \text{lin}\, L$$

des Supplementsystems L die Mengeninklusionen

$$L_{\mathbf{E}} \subseteq C_{\mathbf{E}} \subseteq H_{\mathbf{E}} \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$
$$L = \bigcup_{\mathbf{E} \in M^n} L_{\mathbf{E}} \subseteq C_{M^n} = \bigcup_{\mathbf{E} \in M^n} C_{\mathbf{E}} \subseteq C \subseteq H.$$

Jede lineare Hülle $H_{\mathbf{E}} = \text{lin}\, L_{\mathbf{E}}$ von $L_{\mathbf{E}}$ ($\mathbf{E} \in M^n$) ist (wegen Rang $L_{\mathbf{E}} = n$) eine lineare (homogene) Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$. Weiter ist

$$\dim H \geq \dim H_{\mathbf{E}} = n,$$

sodass die lineare Hülle H des Supplementsystems L entweder eine Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ oder der gesamte Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Für die zum Teilsystem L_V der vollkommenen Supplemente von L gehörigen konischen Hüllen

$$C_V := \text{cone}\, L_V \subseteq K,$$
$$\text{-}C_V = \text{cone}(\text{-}L_V) \subseteq K,$$

die zugehörige lineare Hülle

$$H_V := \text{lin}\, L_V = C_V + (\text{-}C_V)$$

und den Linienraum

$$V = K \cap (\text{-}K)$$

von K gelten die Inklusionen

$$L_V \subseteq C_V \subseteq H_V \subseteq V \subseteq K \neq \mathbb{R}^{n+1}:$$

Da die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte ein konvexer linearer Kegel ist, gehören nämlich mit den Mengen L_V und $\text{-}\,L_V$ auch deren konische Hüllen C_V und $\text{-}\,C_V$ zu K und dann auch deren Summe $H_V = C_V + (\text{-}C_V)$ zu K. Da V der größte in K enthaltene lineare Unterraum ist (siehe Abschnitt 8.1 im Beweis von Zusatz 8.1.2), gilt noch $H_V \subseteq V \subseteq K$.

Es wird jetzt bewiesen, dass der von den vollkommenen Supplementen eines Supplementsystems aufgespannte konvexe lineare Kegel $C_V = \text{cone}\, L_V$ genau die vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte des vom gesamten Supplementsystem aufgespannten konvexen linearen Kegels $C = \text{cone } L$ enthält:

$$C_V = C \cap V.$$

Beweis: 1) $C \setminus C_V = C \setminus V$:
„$\supseteq$“: Wegen $C_V \subseteq V$ gilt zunächst die Inklusion $C \setminus C_V \supseteq C \setminus V$.
„$\subseteq$“: Zu zeigen ist nur noch die Inklusion $C \setminus C_V \subseteq C \setminus V$. Für ein beliebiges $\mathbf{T} \in C \setminus C_V$ enthält dessen Konuskombination

$$\mathbf{T} = \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ D=H,S}} \lambda_{j,D} \mathbf{S}_D^j \,,$$

$\lambda_{j,D} \geq 0$ für alle $(j,D) \in I_n \times M$, $I_n = \{1,\dots,n\}$, $M = \{H,S\}$, mindestens einen positiven Koeffizienten $\lambda_{k,F}$, $(k,F) \in I_n \times M$, mit $\mathbf{S}_F^k \in L_U = L \setminus L_V$. Aus der Annahme $\mathbf{T} \notin C \setminus V$, also $\mathbf{T} \in V$ bzw. $-\mathbf{T} \in K$, und der Tatsache, dass K ein konvexer linearer Kegel ist, ergibt sich

$$-\mathbf{S}_F^k = [-\mathbf{T} + \sum_{\substack{(j,D)\in I_n \times M \\ (j,D)\neq(k,F)}} \lambda_{j,D} \mathbf{S}_D^j\,]/\lambda_{k,F} \in K,$$

im Widerspruch zu $\mathbf{S}_F^k \notin L_V$. Daher ist die Annahme $\mathbf{T} \in V$ falsch und es gilt $\mathbf{T} \in C \setminus V$. Es ist damit auch die Inklusion $C \setminus C_V \subseteq C \setminus V$ und insgesamt $C \setminus C_V = C \setminus V$ gezeigt.

2) $C_V = C \cap V$:
Für die Menge C erhält man zu ihren Teilmengen C_V und $C \cap V$ die folgenden disjunkten Zerlegungen:

$$C = (C \setminus C_V) \cup C_V,$$
$$C = (C \setminus V) \cup (C \cap V).$$

Da nach Beweisteil 1) dabei die jeweils ersten Teilmengen übereinstimmen, sind auch die zweiten komplementären Teilmengen gleich:

$$C_V = C \setminus (C \setminus C_V) = C \setminus (C \setminus V) = C \cap V. \qquad \square$$

Für die Linienräume

$$R_V := C_V \cap (-C_V),$$
$$R := C \cap (-C),$$
$$V := K \cap (-K)$$

der konvexen linearen Kegel C_V, C und K ($C_V \subseteq C \subseteq K$) gelten die Inklusionen

$$R_V \subseteq R \subseteq V \subseteq K \neq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Der lineare Unterraum V enthält alle vollkommenen, d. h. in K umkehrbaren, Kapitalmarktgeschäfte. Der lineare Unterraum R enthält alle vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte von C, die sogar in C umkehrbar sind. Entsprechend enthält der lineare Unterraum R_V alle vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte von C_V, die sogar in C_V umkehrbar sind.

Auf Grund der **Arbitragefreiheit** von K und damit auch der Arbitragefreiheit des linearen Unterraums $V \subseteq K$ der in K umkehrbaren Kapitalmarktgeschäfte ($V \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) gibt es nach dem Satz 8.2.3 b) über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel einen positiven Vektor $\mathbf{P} \in V^\perp$ mit

$$R_V \subseteq C_V \subseteq H_V \subseteq V \subseteq H_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} = 0\} \text{ und}$$
$$\dot{\mathbb{R}}^{n+1}_{+0} \subseteq H^{>}_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} > 0\}.$$

Der diesem Satz entsprechende Alternativsatz über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen ist als Satz der Alternativen von Stiemke (1892–1915) bekannt, der wiederum in einem engen Zusammenhang mit dem Minkowski-Farkas-Lemma steht. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 8.2.3 dargestellt. Die Eigenschaft $H_V \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ impliziert, dass das Erzeugendensystem L_V des linearen Unterraums H_V maximal n linear unabhängige Vektoren enthält.

Neben den Linienräumen V, R und R_V wird noch die Teilmenge

$$R_{M^n} := C_{M^n} \cap (-C_{M^n})$$

der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} betrachtet, die alle vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte von C_{M^n} enthält, die sogar in C_{M^n} umkehrbar sind. Sie enthält aber im Allgemeinen nicht alle vollkommenen, d. h. in K umkehrbaren, Supplemente. Beispielsweise könnte in der unten folgenden Abbildung 5.6 das nicht in R_{M^n} liegende Supplement $\mathbf{S}_H^1$ in K umkehrbar sein, also in V liegen. Die Menge R_{M^n} liegt aber jedenfalls in der Menge V aller vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte und damit in der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$. Es gelten die folgenden Inklusionen:

$$R_{M^n} \subseteq R_V \subseteq R \subseteq V \subseteq H_{\mathbf{P},0}.$$

Beweis: Die Inklusion $R_{M^n} \subseteq R_V$ ergibt sich, da für jedes $\mathbf{X} \in R_{M^n}$ auch $\mathbf{X} \in C_{M^n} \subseteq C \subseteq K$ und $\mathbf{X} \in -C_{M^n} \subseteq -C \subseteq -K$ gilt. Folglich ist

$$\mathbf{X} \in K \cap (-K) = V = -V,$$
$$\mathbf{X} \in C \cap V = C_V,\ \mathbf{X} \in -C \cap -V = -C_V$$

und insgesamt

$$\mathbf{X} \in C_V \cap (-C_V) = R_V. \qquad \square$$

Da C_{M^n} und $-C_{M^n}$ lineare Kegel sind, ist auch R_{M^n} als deren Durchschnitt ein linearer Kegel, also abgeschlossen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation. Außerdem ist die Menge R_{M^n} auch abgeschlossen bezüglich der Multiplikation mit -1,

$$-R_{M^n} = R_{M^n},$$

somit insgesamt abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation:

$$\lambda R_{M^n} \subseteq R_{M^n} \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mit einem $\mathbf{T} \in R_{M^n} \setminus O$ ist daher auch die lineare Hülle lin $\mathbf{T}$ von $\mathbf{T}$, also die von $\mathbf{T}$ aufgespannte Gerade durch den Nullpunkt $\mathbf{O}$, in R_{M^n} enthalten, sodass geometrisch gesehen R_{M^n} ein linearer Doppelkegel ist. Der lineare Doppelkegel R_{M^n} enthält also alle in C_{M^n} enthaltenen Geraden durch den Nullpunkt $\mathbf{O}$. Daher kann (in Analogie zur Definition des Linienraums eines *konvexen* linearen Kegels) die Menge R_{M^n} als **Linien(doppel)kegel** des linearen Kegels C_{M^n} bzw. als Linienkegel der vollkommenen zulässigen Supplemente bezeichnet werden. Eine geometrische Veranschaulichung eines linearen Doppelkegels R_{M^n} wird in Abbildung 5.6 gegeben. Wenn C_{M^n} kein *konvexer* linearer Kegel ist, also nicht auch noch abgeschlossen bezüglich der Addition ist, so ist im Allgemeinen R_{M^n} auch kein linearer Unterraum. Der in der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ ($\mathbf{P} \in V^{\perp}$) liegende Linienkegel R_{M^n} der vollkommenen zulässigen Supplemente spielt nachfolgend eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der Vielfalt der Präferenzordnungen in den Fällen (LV), (LU) und (LS). Im Fall (LV) eines vollkommenen Supplementsystems nimmt der Linienkegel seine größtmögliche Ausdehnung $H_{\mathbf{P},0}$ an (Satz 5.2, 2 in Abschnitt 5.3.1) und im Fall (LU) eines streng unvollkommenen Supplementsystems seine kleinstmögliche Gestalt O (Abschnitt 5.3.2). Im Fall (LS) eines schwach unvollkommenen Supplementsystems liegen bei L-äquivalenten Beurteilungskurven alle die beiden Kurven verbindenden Supplemente gemäß der Bedingung (LDÄ1) bzw. (LRÄ1) von Abschnitt 8.3.5 notwendig im Linienkegel R_{M^n}.

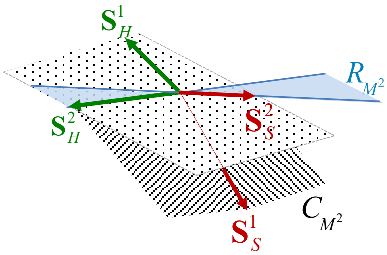


Abb. 5.6 Der Linien(doppel)kegel $R_{M^2} = \text{cone}\{\mathbf{S}_H^2, \text{-}\mathbf{S}_S^2\} \cup \text{cone}\{\text{-}\mathbf{S}_H^2, \mathbf{S}_S^2\}$ für $n = 2$ und den Fall $\mathbf{S}_S^1 \notin \text{lin}\{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_H^2\} = \text{lin}\{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_H^2, \mathbf{S}_S^2\}$ und $\text{-}\mathbf{S}_S^2 \in \text{cone}\{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_H^2\}$

5.3.1 Vielfalt der Präferenzordnungen bei einem vollkommenen Supplementsystem

Im Falle (LV) eines vollkommenen Supplementsystems erhält man aus $L = L_V$ auch die entsprechende Gleichung für die linearen Hüllen $H = \text{lin } L$ und $H_V = \text{lin } L_V$, nämlich $H = H_V$. Diese Bedingung ist auch charakteristisch für das Vorliegen des Falles (LV): Aus $H = H_V$ folgt nämlich umgekehrt auch $L \subseteq \text{lin } L = H = H_V \subseteq V$, also $L = L \cap V = L_V$. Somit gilt

$$L = L_V \Leftrightarrow H = H_V.$$

Bei Verwendung der **Arbitragefreiheit**

(AF) $\qquad K \cap \mathbb{R}_{+0}^{n+1} = O$

des konvexen linearen Kegels K und damit insbesondere der Arbitragefreiheit des darin gelegenen Linienraums $V = K \cap (\text{-}K) \subseteq K$ gibt es nach Satz 8.2.3 b) (Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel) einen positiven Vektor $\mathbf{P} \in V^{\perp}$ mit

$$V \subseteq H_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0\}.$$

Im Falle (LV) folgen dann für jeden Supplementtypvektor $\mathbf{E} \in M^n$ zunächst die Unterraum-Inklusionen

$$H_\mathbf{E} \subseteq H = H_V \subseteq V \subseteq H_{\mathbf{P},0}$$

und dann wegen dim $H_\mathbf{E} = n =$ dim $H_{\mathbf{P},0}$ sogar die Unterraum-Übereinstimmungen

$$H_\mathbf{E} = H = H_V = V = H_{\mathbf{P},0}.$$

Insbesondere liegt also im Fall (LV) die Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ in der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte:

$$H_{\mathbf{P},0} = V \subseteq K.$$

Wegen der weiteren Inklusionen

$$L \subseteq C_{M^n} \subseteq C \subseteq H = H_{\mathbf{P},0},$$

$$R_{M^n} = C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) \subseteq C_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$$

liegen dann auch das Supplementsystem L, die zulässige Supplementmenge (der gesamte Transformationskegel) C_{M^n} und der Linienkegel $R_{M^n} = C_{M^n} \cap (-C_{M^n})$ in der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$. Bei Verwendung der Arbitragefreiheit erhält man somit für den Fall (LV) mit einem Normalenvektor $\mathbf{P} > \mathbf{O}$ die notwendigen Bedingungen:

(LHP) $\quad L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$,

$\quad C_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$,

$\quad R_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$.

Dabei ist die Bedingung (LHP) $L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ auch gleichbedeutend zu

(HHP) $\quad H = H_{\mathbf{P},0}$.

Beweis: Falls $L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ ist, gilt wegen der Unterraumeigenschaft von $H_{\mathbf{P},0}$ auch $H = \text{lin}\, L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$. Da stets dim $H \geq n$ gilt, folgt $H = H_{\mathbf{P},0}$. Falls umgekehrt $H = H_{\mathbf{P},0}$ ist, gilt $L \subseteq C_{M^n} \subseteq C \subseteq H = H_{\mathbf{P},0}$. □

Im nachfolgenden Beweis von Satz 5.2 wird noch gezeigt, dass die Bedingung (LHP) auch äquivalent ist zur Hyperebenenstruktur der zulässigen Supplementmenge C_{M^n}, zum Vorliegen des Falles (LV) und zur Übereinstimmung des Linienkegels R_{M^n} mit der zulässigen Supplementmenge. Zum Beweis dieser Aussagen wird aus (LHP) zunächst in Analogie zum vollkommenen Kapitalmarkt ($K = V$) für beliebige Beurteilungskurven die Übereinstimmung aller D-Präferenzordnungen und die Übereinstimmung aller R-Präferenzordnungen mit der Barwert-Präferenzordnung hergeleitet. Anschließend wird damit die Hyperebenenstruktur der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} und des Linienkegels R_{M^n} und schließlich das Vorliegen des Falles (LV) gefolgert. Weiter wird für den Fall (LV) und auch für die schwächere Voraussetzung $H_V = H_{\mathbf{P},0}$ die Halbraumstruktur des unvollkommenen Kapitalmarkts bewiesen.

Charakterisierung eines vollkommenen Kapitalmarkts durch die Hyperebenenstruktur

Im Spezialfall eines vollkommenen Kapitalmarkts

$$K = V \qquad (V \subsetneq \mathbb{R}^{n+1} \text{ Vektorunterraum}),$$

für den gemäß Abschnitt 5.1.6 ein Supplementsystem existiert, liegt dann für jedes Supplementsystem der Fall (LV) $L = L_V$ vor, sodass im allgemeinen Fall (auch ohne die Voraussetzung (AF)) aus den Inklusionen

$$H = H_V \subseteq V = K \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$$

die Dimensionsungleichungen

$$n \leq \dim H \leq \dim V \leq n$$

folgen, somit $\dim V = n$, $K = V = H_{\mathbf{N},0}$ mit einem $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{O}\}$, also die Hyperebenenstruktur von K.

Bei zusätzlicher Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) ist nach obiger Überlegung $K = V = H_{\mathbf{P},0}$ mit einem $\mathbf{P} > \mathbf{O}$. Für einen vollkommenen Kapitalmarkt K ergibt sich somit die Charakterisierung durch die Hyperebenenstruktur:

$$K = V \quad \Leftrightarrow \quad K = V = H_{\mathbf{N},0} \text{ mit } \mathbf{N} \neq \mathbf{O};$$
$$K = V \ \wedge \text{(AF)} \quad \Leftrightarrow \quad K = V = H_{\mathbf{P},0} \text{ mit } \mathbf{P} > \mathbf{O}.$$

Satz 5.2 Eigenschaften des unvollkommenen Kapitalmarkts mit einem vollkommenen Supplementsystem

Es liege ein (vollkommener oder unvollkommener) Kapitalmarkt vor, bei dem die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Kapitalmarktgeschäfte ein konvexer linearer Kegel ist, der keine Arbitragegelegenheit enthält:

(AF) $\quad K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O \quad$ (Arbitragefreiheit von K).

In der Menge K soll ein Supplementsystem L gemäß der Definition in Abschnitt 5.1.3 existieren. Für die Beurteilungskurven $\mathbf{W} \in B(L)$ (Definition in Abschnitt 8.3.5) soll für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Duplizierung und Replizierung auf genau eine einzige Weise möglich sein.

1) Im Fall (LV) $L = L_V$ eines **vollkommenen Supplementsystems** stimmen die mit den Konzepten der Duplizierung und Replizierung konstruierten D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ für alle beliebigen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ (ohne die zusätzliche Voraussetzung $\mathbf{W} \in B(L)$) jeweils überein mit der B-Präferenzordnung (Barwert-Präferenzordnung) $\trianglerighteq$, welche die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ mittels ihrer Barwerte $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ ($\mathbf{P} \in V^{\perp}$, $\mathbf{P} > \mathbf{O}$) vergleicht:
   $$\trianglerighteq_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq \quad \text{für alle Beurteilungskurven } \mathbf{W}(\mu).$$

2) Der Fall (LV) $L = L_V$ wird auch jeweils charakterisiert durch die nachfolgend angegebenen untereinander äquivalenten Bedingungen (LHP), (CHP) und (RC) für das Supplementsystem L, die zulässige Supplementmenge C_{M^n} und den Linienkegel R_{M^n}:

   a) Das Supplementsystem L liegt in einer Hyperebene mit positivem Normalenvektor $\mathbf{P}$:
   (LHP) $\quad L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ mit einem $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{P} > \mathbf{O}$.

b) Die zulässige Supplementmenge (der gesamte Transformationskegel) C_{M^n} besitzt eine Hyperebenenstruktur mit positivem Normalenvektor:

(CHP) $C_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}$ mit einem $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{P} > \mathbf{O}$.

c) Der Linienkegel R_{M^n} stimmt mit der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} überein:

(RC) $R_{M^n} = C_{M^n}$.

Insbesondere nimmt im Fall (LV) gemäß den Charakterisierungen c) und b) der Linien(doppel)kegel R_{M^n} seine größtmögliche Ausdehnung in Gestalt einer Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ an:

(RHP) $R_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}$.

3) Im Fall (LV) $L = L_V$ eines vollkommenen Supplementsystems auf dem **unvollkommenen Kapitalmarkt** ($K \neq V$, $V = K \cap (-K)$) besitzt die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte eine Halbraumstruktur mit positivem Normalenvektor $\mathbf{P}$:

$$K = H^{\leq}_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} \leq 0\}.$$

Es gilt auch die Umkehrung dieser Aussage, sodass man eine Charakterisierung der Halbraumstruktur eines unvollkommenen Kapitalmarkts K durch die Existenz eines vollkommenen Supplementsystems $L = L_V \subseteq K$ hat.
Die Halbraumstruktur eines unvollkommenen Kapitalmarkt K ist auch gegeben bei der Existenz eines unvollkommenen Supplementsystems $L \neq L_V$ mit der schwächeren Voraussetzung

$$H_V = H_{\mathbf{P},0}.$$

Bei einem vollkommenen Kapitalmarkt $K = V$ ($V \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$ Vektorunterraum) hat dieser eine Hyperebenenstruktur mit positivem Normalenvektor $\mathbf{P}$:

$$K = H_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0\}.$$

Beweis von Teil 2) des Satzes:
a) **Beweis der Äquivalenz von (LHP) und (LV)**: Da zu Beginn von Abschnitt 5.3.1 bereits gezeigt wurde, dass die Bedingung (LHP), nämlich die Lage des Supplementsystems L in der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$, notwendig für den Fall (LV) ist, ist für die Äquivalenz von (LV) und (LHP) nur noch zu zeigen, dass (LHP) auch hinreichend für (LV) ist. Dies erfolgt in den folgenden Beweisschritten α) – γ). Aus Beweisteil α) ergibt sich dann auch **Teil 1)** des Satzes.

α) **Beweis für die Übereinstimmung der Präferenzordnungen unter der Voraussetzung (LHP)**: Bei den Ausführungen in den Abschnitt 4.2 und 4.3 über den arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkt wird für den Nachweis der Übereinstimmung jeder D- und R-Präferenzordnung mit der B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ für beliebige Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ im Wesentlichen nur verwendet, dass alle verwendeten Supplemente $\mathbf{S}$ in einer Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ mit positivem Normalenvektor $\mathbf{P}$ liegen: $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} = 0$. Daher liefern die Konzepte der Duplizierung und Replizierung auch hier auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt bei Verwendung einer zulässigen Supplementmenge C_{M^n} mit der speziellen Eigenschaft

(LHP) $L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ $(\mathbf{P} > \mathbf{O})$

und damit der Eigenschaft

$$C_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$$

für alle Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ jeweils eine eindeutige D- bzw. R-Präferenzordnung und insgesamt nur eine einzige Präferenzordnung, nämlich die B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$:

$$\trianglerighteq_{DW} = \trianglerighteq_{RW} = \trianglerighteq \quad \text{für alle Beurteilungskurven } \mathbf{W}(\mu).$$

Für jeden Supplementtypvektor $\mathbf{E} \in M^n$ ist nämlich $L_{\mathbf{E}} \subseteq L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$, $C_{\mathbf{E}} = \text{cone } L_{\mathbf{E}} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ und dann insgesamt $C_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$. Die Eindeutigkeit der jeweiligen Duplizierung bzw. Replizierung ergibt sich gemäß den Überlegungen in Abschnitt 4.2. Im vorliegenden Spezialfall (LV) muss also nicht wie im allgemeinen Fall von Satz 5.5. c) extra vorausgesetzt werden, dass für die Beurteilungskurve $\mathbf{W}$ die eindeutige Duplizierung und Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gesichert ist. Die Übereinstimmung der Präferenzordnung mit der B-Präferenzordnung erhält man beispielsweise für die R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RW}$ folgendermaßen: Aus den Replizierungsgleichungen

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}°(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})), \qquad \mathbf{S}°(\mathbf{X}) \in C_{M^n},$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{Y} + \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) \in C_{M^n}$$

ergibt sich für die Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X}))$, $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ die Vektorgleichung

$$\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) - \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) = \mathbf{X} + \mathbf{S}°(\mathbf{X}) - \mathbf{Y} - \mathbf{S}°(\mathbf{Y}),$$

mit der Abstandsfunktion $\alpha(\mu) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu)$ (wegen $\mathbf{S}°(\mathbf{X}), \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) \in C_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$, $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}°(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}°(\mathbf{Y}) = 0$) die reellwertige Gleichung

$$\alpha(\nu(\mathbf{X})) - \alpha(\nu(\mathbf{Y})) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} - \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{Y}$$

und die Schlusskette von äquivalenten Aussagen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \trianglerighteq_{RW} \mathbf{Y} &\Leftrightarrow \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) \\
&\Leftrightarrow \nu(\mathbf{X}) \geq \nu(\mathbf{Y}) && (\mathbf{W}(\mu) \text{ monoton steigend}) \\
&\Leftrightarrow \alpha(\nu(\mathbf{X})) \geq \alpha(\nu(\mathbf{Y})) && (\alpha(\mu) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu) \text{ monoton steigend}) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} - \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{Y} = \alpha(\nu(\mathbf{X})) - \alpha(\nu(\mathbf{Y})) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} \geq \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{Y} = B_n(\mathbf{Y}) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y}.
\end{aligned}$$

Analoges gilt für die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$. Die entsprechende Schlusskette findet auch bei der in Abschnitt 5.3.3 noch folgenden Behandlung des Falles (LS) bzw. des allgemeinen Falles ihre Anwendung. Der ausführliche Beweis des zugehörigen Satzes 5.5 erfolgt in Abschnitt 8.3.5. Statt der hier im Fall (LHP) bzw. (LV) auftretenden beliebigen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und beliebigen Supplemente $\mathbf{S} \in C_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ kommen dort aber nur L-äquivalente Beurteilungskurven $\mathbf{W} \sim_L \mathbf{W}'$ und nur Supplemente $\mathbf{S} \in R_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ vor.

β) **Beweis der Hyperebenenstruktur der zulässigen Supplementmenge unter der Voraussetzung (LHP)**: Für die zulässige Supplementmenge C_{M^n} wird nun gezeigt, dass sie unter der Voraussetzung (LHP) $L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ nicht nur in $H_{\mathbf{P},0}$ liegt, sondern gleich der gesamten Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ ist:

$$C_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}.$$

In Abschnitt 4.3.3 wurde gezeigt, dass $H_{\mathbf{P},0}$ übereinstimmt mit der Indifferenzklasse Ind($\mathbf{O}$) des Nullpunkts $\mathbf{O}$ bezüglich der zur B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ gehörigen B-Indifferenzrelation $\simeq$:

$$H_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0\} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \simeq \mathbf{O}\} = \text{Ind}(\mathbf{O}).$$

Auf Grund der in Beweisteil α) unter der Voraussetzung (LHP) für beliebige Beurteilungskurven bewiesenen Übereinstimmung der D- und R-Präferenzordnungen mit der B-Präferenzordnung stimmt insbesondere die B-Indifferenzklasse Ind($\mathbf{O}$) von $\mathbf{O}$ bezüglich der B-Präferenzordnung überein mit der D-Indifferenzklasse $\text{Ind}_{DW}(\mathbf{O})$ von $\mathbf{O}$ bezüglich einer beliebig gewählten Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$. Wählt man speziell eine homogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu)$ ($\mathbf{U} = \mathbf{O}$), so ergibt sich für die Unterlassungsalternative $\mathbf{O}$ die eindeutige Duplizierung

$$\mathbf{O} = \mathbf{S}(\mathbf{O}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{O})), \quad \mathbf{S}(\mathbf{O}) \in C_{M^n},$$

mit

$$\mathbf{S}(\mathbf{O}) = \mathbf{O} \in C_{M^n}, \quad \mathbf{W}(\mu(\mathbf{O})) = \mathbf{V}(0) = \mathbf{O}$$

und damit nach Abschnitt 5.2.2 für die B- und D-Indifferenzklasse von **O** die Darstellung

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{P},0} &= \mathrm{Ind}(\mathbf{O}) \\ &= \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{O}) \\ &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{O})) + C_{M^n} = C_{M^n} , \end{aligned}$$

also

(CHP) $\qquad C_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}.$

γ) **Beweis für das Vorliegen des Falls (LV) unter der Voraussetzung (LHP)**: Auf Grund der in Teil β) nachgewiesenen Hyperebenenstruktur und damit insbesondere der Vektorunterraum-Eigenschaft der zulässigen Supplementmenge folgt

$$-C_{M^n} = C_{M^n}$$

und dann

$$-L \subseteq -C_{M^n} = C_{M^n} \subseteq K,$$

sodass der Fall (LV) vorliegt. Es ist also $L_V = L$, $C_V = C$ und $H_V = H$. Damit ist gezeigt, dass die Bedingung (LHP) auch hinreichend für den Fall (LV) ist. In den Betrachtungen zu Beginn dieses Abschnitts wurde außerdem gezeigt, dass im Fall (LV) mit der Arbitragefreiheit von K notwendig die Bedingung (LHP) folgt. Insgesamt ist daher unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit die Bedingung (LHP) charakteristisch für den Fall (LV):

$$L_V = L \Leftrightarrow L \subseteq H_{\mathbf{P},0}.$$

δ) **Beweis der Hyperebenenstruktur des Linienkegels unter der Voraussetzung (LHP)**: Aus (LHP) und der damit in Beweisteil β) nachgewiesenen Hyperebenenstruktur (CHP) der zulässigen Supplementmenge erhält man wegen der damit verbundenen Unterraum-Eigenschaft zunächst

$$-C_{M^n} = C_{M^n} ,$$

dann für den Linienkegel R_{M^n} die Übereinstimmung mit der zulässigen Supplementmenge und damit seine Hyperebenenstruktur:

$$R_{M^n} = C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) = C_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}.$$

Aus (LHP) folgt also notwendig auch

(RC) $\qquad R_{M^n} = C_{M^n}$

und

(RHP) $\qquad R_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}.$

Da bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) allgemein $K \neq \mathbb{R}^{n+1}$, $R_{M^n} \subseteq V \subseteq K \neq \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$\dim V \leq n$$

ist, hat hier im Falle (LHP) der Linienkegel R_{M^n} mit seiner Hyperebenenstruktur seine größtmögliche Ausdehnung. Damit enthält der Kapitalmarkt K die Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ und ein vollkommenes Supplementsystem $L^* \subseteq H_{\mathbf{P},0}$, das aus einer Basis der Hyperebene konstruierbar ist. Es kann jedoch im Allgemeinen aus (RHP) nicht geschlossen werden, dass auch das vorgegebene Supplementsystem L vollkommenen ist. Aus (RHP) $R_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}$ und den Inklusionen $R_{M^n} \subseteq V \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ können nur die Übereinstimmungen $R_{M^n} = V = H_{\mathbf{P},0}$ und die Inklusion $H_V \subseteq V = H_{\mathbf{P},0}$ geschlossen werden. Gewisse Supplemente $\mathbf{S} \in L$ könnten noch außerhalb $H_{\mathbf{P},0}$ liegen.

b) **Beweis der Äquivalenz von (LV) und (CHP)**:
Nach Teil β) folgt aus (LHP) $L \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ notwendig (CHP) $C_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}$.
Umgekehrt folgt aus (CHP) wegen $L \subseteq C_{M^n}$ auch (LHP): $L \subseteq C_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}$. Insgesamt ist daher (CHP) charakteristisch für (LHP) und nach Teil γ) auch für (LV).

c) **Beweis der Äquivalenz von (LV) und (RC)**:
Nach Teil δ) folgt aus (LHP) auch (RC) $R_{M^n} = C_{M^n}$. Umgekehrt folgt aus (RC) bei vorliegender Arbitragefreiheit wegen $L \subseteq C_{M^n}$ und $R_{M^n} \subseteq V \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ auch (LHP): $L \subseteq C_{M^n} = R_{M^n} = H_{\mathbf{P},0}$. Damit

ist (RC) charakteristisch für (LHP) und dann nach Teil γ) auch für (LV).

Beweis von Teil 3) des Satzes: Für den **Nachweis der Halbraumstruktur** des unvollkommenen Kapitalmarkts K muss nicht notwendig der Fall (LV) vorliegen. Die Halbraumstruktur ergibt sich auch für den allgemeineren Fall, dass ein unvollkommenes Supplementsystem L vorliegt, für welches aber

$$H_V = H_{\mathbf{P},0} \quad (\mathbf{P} > \mathbf{O})$$

gilt und somit seine Teilmenge L_V der vollkommenen Supplemente n linear unabhängige Supplemente enthält. Insbesondere ist dies der Fall, wenn $L_V \supseteq L_\mathbf{E}$ für ein festes $\mathbf{E} \in M^n$ gilt: Für alle $j \in I_n$ und diese fest gewählten E_j ist dann $\mathbf{S}^j_{E_j} \in V$, also $-\mathbf{S}^j_{E_j} \in K$, wobei aber das zugehörige Supplement $\mathbf{S}^j_{F_j}$ ($F_j \in M = \{H,S\}$, $F_j \neq E_j$) nicht in V liegen muss.
Bei einem vollkommenen arbitragefreien Kapitalmarkt K, der eine Hyperebene des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, wäre $H_{\mathbf{P},0} = K$. In dem hier aber betrachteten unvollkommenen Kapitalmarkt K ($\supsetneq V$) gibt es aber zumindest ein unvollkommenes Kapitalmarktgeschäft

$$\mathbf{T} \in K \setminus V \subseteq K \setminus H_V = K \setminus H_{\mathbf{P},0} \qquad (\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T} \neq 0).$$

Aus den Dimensionsungleichungen

$$n = \dim H_{\mathbf{P},0} = \dim H_V \leq \dim V \leq n$$

($V \subsetneq K \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$) folgt zunächst

$$H_{\mathbf{P},0} = H_V = V \subsetneq K,$$

sodass K die Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ enthält. Da K ein konvexer linearer Kegel ist, enthält dann K zumindest den von $H_{\mathbf{P},0}$ und $\mathbf{T}$ aufgespannten Halbraum cone $\{H_{\mathbf{P},0},\mathbf{T}\} = H_{\mathbf{P},0} + \text{ray } \mathbf{T}$. Nachfolgend wird nun gezeigt, dass K genau der Halbraum $H^{\leq}_{\mathbf{P},0}$ ist.

Wegen $\mathbf{T} \in K \setminus H_{\mathbf{P},0}$ ist der Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ die direkte Summe der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ und des eindimensionalen Unterraums $[\mathbf{T}] = \text{lin } \mathbf{T}$:

$$\mathbb{R}^{n+1} = H_{\mathbf{P},0} \oplus [\mathbf{T}]$$

im Sinne von $\mathbb{R}^{n+1} = H_{\mathbf{P},0} + [\mathbf{T}]$ und $H_{\mathbf{P},0} \cap [\mathbf{T}] = O$. Für die Vektoren $\mathbf{Z}$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ gibt es somit jeweils eine einzige additive Zerlegung (Wagner (1981), S. 27; Bröcker (2004), S. 35)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \lambda\mathbf{T} \text{ mit } \mathbf{S} \in H_{\mathbf{P},0} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für einen Zahlungsstrom $\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \lambda\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt nun die Inzidenz

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \lambda\mathbf{T} \in H^{\leq}_{\mathbf{P},0}$$

genau dann, wenn

$$0 \geq \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{Z} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{S} + \lambda\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T} = \lambda\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T},$$

gilt, also $\lambda\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T} \leq 0$ ist. Analog gilt die Inzidenz

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \lambda\mathbf{T} \in H^{>}_{\mathbf{P},0}$$

genau dann, wenn $\lambda\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T} > 0$ gilt.
Es wird nun für den hierbei auftretenden Faktor $\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T}$ ($\neq 0$) die Ungleichung $\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T} < 0$ mit einem Widerspruchsbeweis begründet: Im Falle $\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T} > 0$ würde nämlich die Inzidenz $\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \lambda\mathbf{T} \in H^{>}_{\mathbf{P},0}$ genau für die $\lambda > 0$ gelten: $H^{>}_{\mathbf{P},0} = H_V + (\text{ray } \mathbf{T} \setminus O)$. Demzufolge würde wegen $\mathbf{T} \in K$, $H_{\mathbf{P},0} = H_V \subseteq V \subseteq K$ und der Konvexität von K dann die Inklusion

$$H^{>}_{\mathbf{P},0} = H_V + (\text{ray } \mathbf{T} \setminus O) \subseteq K$$

folgen. Da wegen $\mathbf{P} > \mathbf{O}$ auch noch die Inklusion $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}_{+0} \subseteq H^{>}_{\mathbf{P},0}$ gilt, würde insgesamt $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}_{+0} \subseteq H^{>}_{\mathbf{P},0} \subseteq K$ folgen, im Widerspruch zur Arbitragefreiheit von K.
Also ist

$$\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T} < 0$$

und es gilt

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \lambda\mathbf{T} \in H^{\leq}_{\mathbf{P},0} \qquad \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{S} + \lambda\mathbf{T} \in H_{\mathbf{P},0} + \text{ray } \mathbf{T}.$$

Da $H_{\mathbf{P},0} \subseteq K$ und $\mathbf{T} \in K$ gilt und K ein konvexer linearer Kegel ist, folgt hiermit schon die eine Richtung der Inklusion:

$$H^{\leq}_{\mathbf{P},0} = H_{\mathbf{P},0} + \text{ray } \mathbf{T} \subseteq K.$$

Da $\mathbf{T} \in K \setminus H_{\mathbf{P},0}$ beliebig gewählt war und für dieses Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{T}$ die Ungleichung $\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{T} < 0$ gezeigt wurde, folgt außerdem $K \setminus H_{\mathbf{P},0} \subseteq H_{\mathbf{P},0}^{\leq}$ und damit auch die andere Richtung der Inklusion:

$$K = H_{\mathbf{P},0} \cup (K \setminus H_{\mathbf{P},0}) \subseteq H_{\mathbf{P},0}^{\leq}.$$

Insgesamt ist damit unter der Voraussetzung $H_V = H_{\mathbf{P},0}$ ($\mathbf{P} > \mathbf{O}$) die Halbraumstruktur $K = H_{\mathbf{P},0}^{\leq}$ des unvollkommenen Kapitalmarkts K nachgewiesen.
Insbesondere ist dann auch im spezielleren Fall (LV), dass auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt ein vollkommenes Supplementsystem $L \subseteq K$ existiert, die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte notwendig ein Halbraum des $\mathbb{R}^{n+1}$.
Es wird nun noch begründet, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt, dass also bei Halbraumstruktur des Kapitalmarkts K ein vollkommenes Supplementsystem existiert. Insgesamt hat man dann eine Charakterisierung der Halbraumstruktur der Menge K durch die Existenz eines vollkommenen Supplementsystems $L \subseteq K$. Falls nämlich K ein Halbraum $H_{\mathbf{N},0}^{\leq}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Normalenvektor $\mathbf{N} \neq \mathbf{O}$ ist, liefert die zu einer Basis $S = (\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n)$ der zugehörigen Hyperebene $H = H_{\mathbf{N},0}$ gebildete Menge

$$L^* = \{\pm\,\mathbf{S}^1, \ldots, \pm\,\mathbf{S}^n\}$$

ein vollkommenenes Supplementsystem von K. Eine ausführlichere Begründung dafür, dass L^* ein Supplementsystem ist, findet man in Abschnitt 5.1.6. Damit existiert in dem unvollkommenen Kapitalmarkt K genau dann ein vollkommenes Supplementsystem L, wenn K ein Halbraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.
Auch unter der allgemeineren Voraussetzung eines Supplementsystems L mit $H_V = H_{\mathbf{P},0}$ ($\mathbf{P} > \mathbf{O}$) existiert dann aufgrund der resultierenden Halbraumstruktur $K = H_{\mathbf{P},0}^{\leq}$ ein vollkommenes Supplementsystem L^*. □

Im Fall (LV) eines vollkommenen Supplementsystems L auf einem unvollkommenen Kapitalmarkt K lässt sich nach Satz 5.2 für die beiden Konzepte der Duplizierung und Replizierung die Vorteilhaftigkeit eines Zahlungsstroms mittels der B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ ($= \trianglerighteq_{DW} = \trianglerighteq_{RW}$) in einfacher Weise geometrisch beschreiben. Die Indifferenzklasse

$$\mathrm{Ind}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{D} = 0\} = H_{\mathbf{P},0}$$

der sogenannten Unterlassungsalternative $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ bezüglich der B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ ist im Gegensatz zum vollkommenen Kapitalmarkt hier aber nur der Teilmarkt $H_{\mathbf{P},0}$ und nicht der gesamte Kapitalmarkt $K = H_{\mathbf{P},0}^{\leq}$, wenn ein unvollkommener Kapitalmarkt vorliegt. Legt man sinnvollerweise diese Indifferenzklasse Ind($\mathbf{O}$) als Nulllinie der Bewertung fest, so ist ein Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann vorteilhaft, wenn er im offenen Halbraum $H_{\mathbf{P},0}^{>}$ liegt, also kein Kapitalmarktgeschäft ist. Die Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{X} \in K = H_{\mathbf{P},0}^{\leq}$ dagegen sind für den Entscheider entweder indifferent oder unvorteilhaft. Das Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{X}$ ist genau dann indifferent, also weder vorteilhaft noch unvorteilhaft, wenn es in der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0} \subseteq K$ liegt. Das Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{X}$ ist genau dann unvorteilhaft, wenn es im offenen Halbraum $H_{\mathbf{P},0}^{<} \subseteq K$ liegt. Im Fall eines arbitragefreien unvollkommenen Kapitalmarkts mit zumindest einem vollkommenen Supplementsystem, also bei einem Kapitalmarkt mit Halbraumstruktur und positivem Normalenvektor, gibt es somit auch unvorteilhafte Kapitalmarktgeschäfte und keine unvorteilhaften Zahlungsströme, die nicht Kapitalmarktgeschäfte sind.

5.3.2 Vielfalt der Präferenzordnungen bei einem streng unvollkommenen Supplementsystem

Im Falle (LU) eines streng unvollkommenen Supplementsystems L gilt $L_V = \emptyset$, $H_V = \text{lin}\, L_V = O$ und wegen der Inklusionen $R_{M^n} \subseteq R_V \subseteq C_V \subseteq H_V$ der linearen Kegel dann ihre Trivialität

$$R_{M^n} = R_V = C_V = H_V = O.$$

Diese Trivialität des Linienkegels der zulässigen Supplemente, also seine kleinstmögliche Gestalt $R_{M^n} = O$, wird unten entscheidend beim Beweis für die Verschiedenheit der Präferenzordnungen zu verschiedenen Beurteilungskurven im Falle (LU) verwendet.

Falls zwei R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\text{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\text{R}W'}$ zu verschiedenen Beurteilungskurven W und W' mit eindeutiger Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\mathbf{W}$, $\mathbf{W}' \in B(L)$ gemäß Abschnitt 8.3.5) identisch sind, stimmen auch die zugehörigen inversen Relationen $\trianglelefteq_{\text{R}W}$ und $\trianglelefteq_{\text{R}W'}$ überein und ebenso die zugehörigen Indifferenzrelationen

$$\simeq_{\text{R}W} = \trianglerighteq_{\text{R}W} \cap \trianglelefteq_{\text{R}W} \text{ und } \simeq_{\text{R}W'} = \trianglerighteq_{\text{R}W'} \cap \trianglelefteq_{\text{R}W'}.$$

Für die Verschiedenheit der beiden Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\text{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\text{R}W'}$ genügt es daher zu zeigen, dass die zugehörigen Indifferenzrelationen verschieden sind. Dafür wiederum genügt es zwei spezielle Zahlungsströme $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ anzugeben, die bezüglich der einen Indifferenzrelation $\simeq_{\text{R}W'}$ indifferent und bezüglich der anderen Indifferenzrelation $\simeq_{\text{R}W}$ nicht indifferent sind:

$$\mathbf{X} \simeq_{\text{R}W'} \mathbf{Y} \text{ und } \mathbf{X} \not\simeq_{\text{R}W} \mathbf{Y}.$$

Es wird nun bewiesen, dass im Fall (LU) zwei R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\text{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\text{R}W'}$ verschieden sind, wenn sie mittels zweier Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(v)$ und $\mathbf{W}'(v)$ verschiedener Beurteilungskurven W und W' mit eindeutiger Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gebildet werden. Die analoge Aussage gilt für zwei D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\text{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\text{D}W'}$. Somit gibt es bei fest vorgegebenem streng unvollkommenen Supplementsystem L genau so viele R-Präferenzordnungen bzw. D-Präferenzordnungen wie es Beurteilungskurven als P-Äquivalenzklassen mit eindeutiger Duplizierung und Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gibt:

$$\trianglerighteq_{\text{R}W} \neq \trianglerighteq_{\text{R}W'} \text{ und } \trianglerighteq_{\text{D}W} \neq \trianglerighteq_{\text{D}W'},$$
$$\text{falls } \mathbf{W} \nsim_P \mathbf{W}' \text{ bzw. } \mathbf{W}(J) \neq \mathbf{W}'(J).$$

Eine kürzere Begründung für diese Aussage wird unten noch im Anschluss an die Definition 5.4 der L-Äquivalenz von Beurteilungskurven in Abschnitt 5.3.3 mit Hilfe des Linienkegels R_{M^n} angegeben: Wegen des trivialen Linienkegels $R_{M^n} = O$ liegt eine L-Äquivalenz infolge der dafür notwendigen Bedingung (LDÄ1) $\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) \subseteq R_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ nur in Form der trivialen L-Äquivalenz ($\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) = O$) bzw. der P-Äquivalenz vor, sodass gleiche Präferenzordnungen genau dann auftreten, wenn die Beurteilungskurven die gleiche Spur haben.

Beweis: In den Abschnitten 8.3.2 und 8.3.4 wird begründet, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit für die beiden Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(v)$ und $\mathbf{W}'(v)$ von Beurteilungskurven das gleiche Definitionsintervall $J' = J$ verwenden kann und dass die (als Äquivalenzklassen) verschiedenen Beurteilungskurven auch verschiedene Spuren besitzen:

$$\mathbf{W}(J) \neq \mathbf{W}'(J).$$

Demzufolge ist $\mathbf{W}(J) \setminus \mathbf{W}'(J) \neq \emptyset$ oder $\mathbf{W}'(J) \setminus \mathbf{W}(J) \neq \emptyset$. Für die beiden Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(v)$ und $\mathbf{W}'(v)$ wird jetzt also ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Existenz eines Parameterwerts $v_0 \in J$ mit

$$\mathbf{W}(v_0) \in \mathbf{W}(J) \setminus \mathbf{W}'(J)$$

vorausgesetzt. Andernfalls wählt man ein $\mathbf{W}'(v_0) \in \mathbf{W}'(J) \setminus \mathbf{W}(J)$.

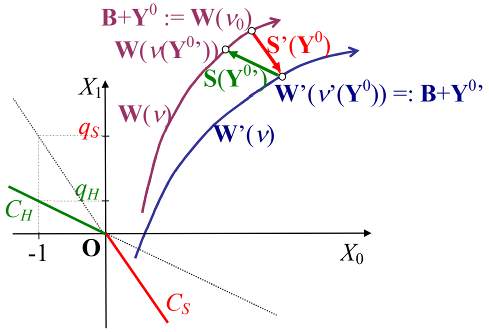


Abb. 5.7 Die Zahlungsströme $\mathbf{Y}^0$ und $\mathbf{Y}^{0'}$ mit unterschiedlichen Vergleichsergebnissen bezüglich der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RW}$ und $\trianglerighteq_{RW'}$ im Fall (LU) für die Laufzeit $n = 1$ und ein streng unvollkommenes Supplementsystem $L = \{\mathbf{I},\mathbf{F}\}$, $\mathbf{I} = \mathbf{S}^1_H = (-1,q_H)^\mathsf{T}$, $\mathbf{F} = \mathbf{S}^1_S = (1,-q_S)^\mathsf{T}$, mit den Marktzinsfaktoren q_H, q_S ($q_S > q_H > 0$)

Als Erstes wird die Verschiedenheit der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RW}$ und $\trianglerighteq_{RW'}$ bewiesen. Dazu wird für zwei geeignet gewählte Zahlungsströme $\mathbf{Y}^0$ und $\mathbf{Y}^{0'}$ gezeigt, dass

$$\mathbf{Y}^0 \simeq_{RW'} \mathbf{Y}^{0'} \text{ und } \mathbf{Y}^0 \not\simeq_{RW} \mathbf{Y}^{0'}$$

gilt. Für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{Y}^0 := \mathbf{W}(v_0) - \mathbf{B}$$

erhält man bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(v)$ die Replizierung

(0) $$\mathbf{B} + \mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}^0) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{Y}^0)} \subseteq C_{M^n},$$

mit $\mathbf{S}(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{O}$ und $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{W}(v_0)$ und bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(v)$ die Replizierung

(1) $$\mathbf{B} + \mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \in C_{\mathbf{E}'(\mathbf{Y}^0)} \subseteq C_{M^n}.$$

Wegen $\mathbf{B} + \mathbf{Y}^0 = \mathbf{W}(v_0) \notin \mathbf{W}'(J)$ gilt für das hier verwendete Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \neq \mathbf{O}$. Damit erhält man im vorliegenden Fall (LU)

$$-\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \in -C_{\mathbf{E}'(\mathbf{Y}^0)} \setminus O \subseteq \complement K.$$

Für den weiteren Zahlungsstrom

$$\mathbf{Y}^{0'} := \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}^0)) - \mathbf{B}$$

erhält man bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(v)$ die Replizierung

(2) $$\mathbf{B} + \mathbf{Y}^{0'} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^{0'}) = \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}^{0'})), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^{0'}) \in C_{\mathbf{E}'(\mathbf{Y}^{0'})},$$

mit $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^{0'}) = \mathbf{O}$ und $\mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}^{0'})) = \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}^0))$ und somit die Relation

$$\mathbf{Y}^0 \simeq_{RW'} \mathbf{Y}^{0'}.$$

Bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(v)$ ergibt sich für $\mathbf{Y}^{0'}$ die Replizierung

$$\mathbf{B} + \mathbf{Y}^{0'} + \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0'}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^{0'})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0'}) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{Y}^{0'})}.$$

Aus diesen Replizierungsgleichungen (0), (1) und (2) erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^0)) + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}) &= \mathbf{B} + \mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}) && \text{(Verwend. v. (0))}\\
&= \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}^0)) + \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}) && \text{(Verwend. v. (1))}\\
&= \mathbf{B} + \mathbf{Y}^{0\prime} + \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}) && \text{(Def. v. } \mathbf{Y}^{0\prime})\\
&= \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^{0\prime})) && \text{(Verwend. v. (2))}
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^{0\prime})) - \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}).$$

Aus der Annahme $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^{0\prime})) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^0))$ würde daher

$$-\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}) \in (-C_{\mathbf{E}'(\mathbf{Y}^0)}) \cap C_{\mathbf{E}(\mathbf{Y}^{0\prime})} \subseteq R_{M^n}$$

folgen, was aber wegen $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \neq \mathbf{O}$ hier im Fall (LU) im Widerspruch zur Trivialität des Linienkegels R_{M^n} steht ($R_{M^n} = O$). Daher gilt, wie in Abbildung 5.7 dargestellt ist, $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^{0\prime})) \neq \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^0))$ und

$$\mathbf{Y}^0 \not\simeq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}^{0\prime}.$$

Damit ist die Verschiedenheit der Indifferenzrelationen $\simeq_{\mathrm{R}W}$ und $\simeq_{\mathrm{R}W'}$ und auch die Verschiedenheit der Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ nachgewiesen.

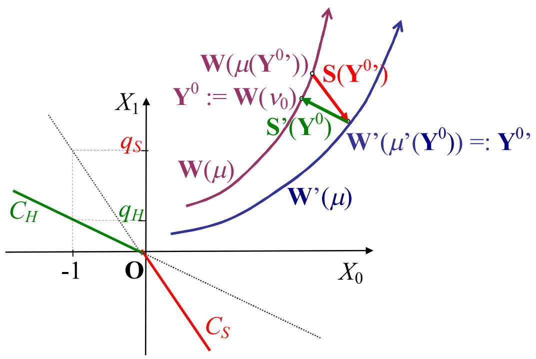


Abb. 5.8 Die Zahlungsströme $\mathbf{Y}^0$ und $\mathbf{Y}^{0\prime}$ mit unterschiedlichen Vergleichsergebnissen bezüglich der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$ im Fall (LU) für die Laufzeit $n = 1$ und die Marktzinsfaktoren q_H, q_S ($q_S > q_H > 0$)

Als Zweites wird die Verschiedenheit der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$ bewiesen. Für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{Y}^0 := \mathbf{W}(v_0) \in \mathbf{W}(J) \setminus \mathbf{W}'(J)$$

ergeben sich bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(v)$ die Duplizierung

(o) $$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}^0) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{Y}^0)} \subseteq C_{M^n},$$

mit $\mathbf{S}(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{O}$ und $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{W}(v_0) = \mathbf{Y}^0$ und bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(v)$ die Duplizierung

(i) $$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \in C_{\mathbf{E}'(\mathbf{Y}^0)} \subseteq C_{M^n}.$$

Da $\mathbf{Y}^0$ nicht auf der Spur $\mathbf{W}'(J)$ der Kurve $\mathbf{W}'(v)$ liegt, gilt für das hier verwendete Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \neq \mathbf{O}$.

Für den weiteren Zahlungsstrom

$$\mathbf{Y}^{0\prime} := \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0))$$

erhält man bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(v)$ die Duplizierung

$$\mathbf{Y}^{0\prime} = \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^{0\prime}) + \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^{0\prime})), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^{0\prime}) \in C_{\mathbf{E}'(\mathbf{Y}^{0\prime})},$$

mit $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^{0\prime}) = \mathbf{O}$ und $\mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^{0\prime})) = \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0))$ und somit die Relation

$$\mathbf{Y}^0 \simeq_{\mathrm{D}W'} \mathbf{Y}^{0\prime}.$$

Bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(v)$ erhält man für $\mathbf{Y}^{0\prime}$ die Duplizierung

(ii) $\mathbf{Y}^{0\text{‘}} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\text{‘}}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0\text{‘}})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\text{‘}}) \in C_{\mathbf{E}(\mathbf{Y}^{0\text{‘}})}$.

Aus diesen Duplizierungsgleichungen (o), (i) und (ii) erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0\text{‘}})) + \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\text{‘}}) + \mathbf{S}\text{‘}(\mathbf{Y}^{0}) &= \mathbf{Y}^{0\text{‘}} + \mathbf{S}\text{‘}(\mathbf{Y}^{0}) && \text{(Verw. v. (ii), Def. v. } \mathbf{Y}^{0\text{‘}}\text{)} \\ &= \mathbf{W}\text{’}(\mu\text{‘}(\mathbf{Y}^{0})) + \mathbf{S}\text{‘}(\mathbf{Y}^{0}) && \text{(Verw. v. (i))} \\ &= \mathbf{Y}^{0} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0})) && \text{(Verwend. v. (o))} \end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0})) - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0\text{‘}})) = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\text{‘}}) + \mathbf{S}\text{‘}(\mathbf{Y}^{0}).$$

Aus der Annahme $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0\text{‘}}))$ würde daher

$$- \mathbf{S}\text{‘}(\mathbf{Y}^{0}) = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\text{‘}}) \in (- C_{\mathbf{E}\text{'}(\mathbf{Y}^{0\text{‘}})}) \cap C_{\mathbf{E}(\mathbf{Y}^{0})} \subseteq R_{M^n}$$

folgen, was aber wegen $\mathbf{S}\text{‘}(\mathbf{Y}^{0}) \neq \mathbf{O}$ hier im Fall (LU) im Widerspruch zu $R_{M^n} = O$ steht. Daher gilt, wie in Abbildung 5.8 dargestellt ist, $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0})) \neq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0\text{‘}}))$ und

$$\mathbf{Y}^{0} \not\simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}^{0\text{‘}}.$$

Damit ist auch die Verschiedenheit der Indifferenzrelationen $\simeq_{\mathrm{D}W}$ und $\simeq_{\mathrm{D}W\text{‘}}$ und die Verschiedenheit der Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W\text{‘}}$ nachgewiesen. □

Satz 5.3 Eigenschaften des unvollkommenen Kapitalmarkts mit einem streng unvollkommenen Supplementsystem

Im Falle (LU) eines streng unvollkommenen Supplementsystems $L = L \setminus L_V$ ist der Linienkegel der zulässigen Supplemente kleinstmöglich:

$$R_{M^n} = O.$$

In diesem Fall liefern sowohl das Konzept der Duplizierung als auch das Konzept der Replizierung zu verschiedenen Beurteilungskurven W und W‘ mit jeweils gesicherter eindeutiger Duplizierung und Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ auch unterschiedliche Präferenzordnungen. Für zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}, \mathbf{W}\text{’} \in B(L)$ (mit eindeutiger Duplizierung und Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$; Definition von $B(L)$ in Abschnitt 8.3.5) mit verschiedenen Spuren $\mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{W}\text{‘}(J)$ sind also die zugehörigen D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W\text{‘}}$ und auch die zugehörigen R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W\text{‘}}$ verschieden:

$$\mathbf{W} \not\sim_{P} \mathbf{W}\text{‘} \;\Rightarrow\; \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \neq \trianglerighteq_{\mathrm{D}W\text{‘}} \;\text{ und }\; \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \neq \trianglerighteq_{\mathrm{R}W\text{‘}}.$$

Zahlenbeispiele hierzu werden für die Laufzeit $n = 1$ in Kapitel 2 gegeben. So befasst sich Beispiel 2.3 – Fortsetzung 1 mit der Duplizierung und der Beurteilungskurve zum Endvermögensstreben, Beispiel 2.3 – Fortsetzung 2 mit der Replizierung und der gleichen Beurteilungskurve. Ein Zahlenbeispiel für die Laufzeit $n = 2$ und das Konzept der Replizierung mit den zwei verschiedenen Beurteilungskurven zum Vermögensstreben und zum Einkommensstreben findet man bei Kruschwitz (1998), S. 75–77. Dieses wird nachfolgend mit der hier in Kapitel 5 verwendeten Vektorschreibweise dargestellt.

Beispiel 5.6 Beispiel von Kruschwitz zum Vergleich von Zahlungsströmen mit verschiedenen Zielsetzungen bei der Replizierung

Zum Thema der Abhängigkeit der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(v)$ gibt Kruschwitz (1998), S. 75–77, ein Beispiel für die Laufzeit $n = 2$. Es sollen dabei die beiden Zahlungsströme (Investitionen)

$\mathbf{X} = (-1000;1460;0)^{\mathsf{T}}$ und

$\mathbf{Y} = (-1200;0;2280)^{\mathsf{T}}$

unter zwei verschiedenen Zielsetzungen, nämlich dem Vermögens- und dem Einkommensstreben, verglichen werden. Dazu werden für ein streng unvollkommenes Supplementsystem

$$L = \{\mathbf{I}^1,\mathbf{I}^2,\mathbf{F}^1,\mathbf{F}^2\}$$

die einperiodischen Kapitalmarktgeschäfte (Kruschwitz (1998), S. 48–57)

$$\mathbf{I}^1 = \mathbf{T}_H^1 = (-1;q_{1H};0)^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{I}^2 = \mathbf{T}_H^2 = (0;-1;q_{2H})^\mathsf{T},$$

$$\mathbf{F}^1 = -\mathbf{T}_S^1 = (1;-q_{1S};0)^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{F}^2 = -\mathbf{T}_S^2 = (0;1;-q_{2S})^\mathsf{T}$$

mit den positiven Haben- und Soll-Marktzinsfaktoren

$$q_{j,H} = q_H = 1{,}1 \text{ und}$$

$$q_{j,S} = q_S = 1{,}4 \ (> q_{jH})$$

für die Zeitintervalle $[j\text{-}1,j]$ ($j = 1{,}2$) verwendet und noch der Basiszahlungsstrom

$$\mathbf{B} = (500;0;200)^\mathsf{T}$$

mit in die Rechnung einbezogen. Das Beispiel wird jetzt mit den hier verwendeten Bezeichnungen formuliert und gerechnet.

Für das im Beispiel verwendete spezielle Vermögensstreben ergibt sich die Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}'(v) = \mathbf{U}' + \mathbf{V}'(v)$$

mit

$$\mathbf{U}' = 40\cdot(1{,}00;1{,}10;1{,}21)^\mathsf{T} = (40;44;48{,}4)^\mathsf{T},$$

$$\mathbf{V}'(v) = \hat{\mathbf{V}}\ (v) = (0{,}0{,}v)^\mathsf{T}$$

und der Endentnahme v als Parameter.

Für das verwendete spezielle Einkommensstreben erhält man die Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}''(v) = \mathbf{U}'' + \mathbf{V}''(v)$$

mit

$$\mathbf{U}'' = 250\cdot(0;0;1)^\mathsf{T} = (0;0;250)^\mathsf{T},$$

$$\mathbf{V}''(v) = v\cdot(1{,}00;1{,}10;1{,}21)^\mathsf{T}$$

und dem Einkommesniveau v als Parameter.

Beim **Vermögensstreben** ist für die Glattstellung des Zahlungsstroms **Y** das Gleichungssystem

$$\mathbf{B} + \mathbf{Y} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \mathbf{U}' + \mathbf{V}'(v'(\mathbf{Y})), \ \ \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) \in C_{M^n}\ ,$$

bzw. das umgestellte Gleichungssystem

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) - \mathbf{V}'(v'(\mathbf{Y})) = \mathbf{U}' - \mathbf{B} - \mathbf{Y} = (740;44;-2431{,}6)^\mathsf{T}$$

zu lösen. Mit dem Versuch des sukzessiven Auflösens kommt man hier auf den Ansatz

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \kappa_1\mathbf{F}^1 + \kappa_2\mathbf{F}^2 = \kappa_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -q_{1S} \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q_{2S} \end{pmatrix}$$

und erhält in der Komponentenschreibweise das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lllll} \kappa_1 & & & & = 740; \\ -1{,}4\kappa_1 & + \kappa_2 & & & = 44; \\ & -1{,}4\kappa_2 & & - v' & = -2431{,}6 \end{array}$$

mit der Lösung $\kappa_1 = 740$, $\kappa_2 = 1080$, $v'(\mathbf{Y}) = v' = 919{,}6$. Zu dem neben der Mindestmarge **U'** zu erzielenden Endvermögen $v'(\mathbf{Y})$ gehört der Beurteilungsvektor

$$\hat{\mathbf{V}}\ (v'(\mathbf{Y})) = (0;0;919{,}6)^\mathsf{T}.$$

Entsprechend erhält man beim Vermögensstreben für die Glattstellung des Zahlungsstroms **X** das Gleichungssystem

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) - \mathbf{V}'(v'(\mathbf{X})) = \mathbf{U}' - \mathbf{B} - \mathbf{X} = (540;-1416;-151{,}6)^\mathsf{T}$$

und mit dem Ansatz

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \kappa_1\mathbf{F}^1 + \alpha_2\mathbf{I}^2 = \kappa_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -q_{1S} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ q_{2H} \end{pmatrix}$$

das Gleichungssystem in der Komponentenschreibweise

$$\begin{array}{llll} \kappa_1 & & & = 540; \\ -\,1{,}4\kappa_1 & -\,\alpha_2 & & = -1416; \\ & +\,1{,}1\alpha_2 & -\,v' & = -151{,}6 \end{array}$$

mit der Lösung $\kappa_1 = 540$, $\alpha_2 = 660$, $v'(\mathbf{X}) = v' = 877{,}6 < 919{,}6 = v'(\mathbf{Y})$ und

$$\hat{\mathbf{V}}\ (v'(\mathbf{X})) = (0;0;877{,}6)^{\mathsf{T}} \lessdot \hat{\mathbf{V}}\ (v'(\mathbf{Y})).$$

Demnach ist bei der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ des Vermögensstrebens der Zahlungsstrom **Y** besser als der Zahlungsstrom **X**:

$$\mathbf{Y} \vartriangleright_{\mathrm{R}W'} \mathbf{X}.$$

Beim **Einkommensstreben** ist für die Glattstellung von **X** das Gleichungssystem

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}''(\mathbf{X}) = \mathbf{U}'' + \mathbf{V}''(v''(\mathbf{X})),\ \ \mathbf{S}''(\mathbf{X}) \in C_{M''},$$

bzw.

$$\mathbf{S}''(\mathbf{X}) - \mathbf{V}''(v''(\mathbf{X})) = \mathbf{U}'' - \mathbf{B} - \mathbf{X} = (500;-1460;50)^{\mathsf{T}}$$

zu lösen. Mit dem Supplementansatz

$$\mathbf{S}''(\mathbf{X}) = \mathbf{S}^1(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{S}^j(\mathbf{X}) = \lambda_{jH,S}\mathbf{T}^j{}_{H,S}\ (j = 1,2),$$

$\mathbf{T}^1{}_{H,S} = (-1;q_{1H,S};0)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{T}^2{}_{H,S} = (0;-1;q_{2H,S})^{\mathsf{T}}$, erhält man vier lineare Gleichungssysteme, wenn man für den Zinsfaktor $q_{j,H,S}$ $(j = 1,2)$ jeweils q_H oder q_S einsetzt. In der Komponentenschreibweise lautet das Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} -\lambda_{1,H/S} & & -\,v'' & = 500; \\ \lambda_{1,H/S}\,q_{1,H/S} & -\,\lambda_{2,H/S} & -\,1{,}1v'' & = -1460; \\ & +\,\lambda_{2,H/S}\,q_{2,H/S} & -\,1{,}21v'' & = 50. \end{array}$$

Durch das Lösen dieser Gleichungssysteme für die Parameter λ_1, λ_2 und v'' findet man, dass nur der Fall $q_1 = q_S$, $q_2 = q_H$ ein reales Supplement $\mathbf{S}''(\mathbf{X})$ liefert:

$$\lambda_1 = \lambda_{1S} = -698{,}48 < 0;\ \lambda_2 = \lambda_{2H} = 263{,}79 > 0.$$

Ein reales Supplement $\mathbf{S}''(\mathbf{X}) \in C_{M''}$ erhält man beim Supplementansatz mit den Zahlungsströmen $\mathbf{T}^j{}_{H,S}$ genau dann, wenn der jeweils zugehörige Faktor $\lambda_{jH,S}$ negativ beim Zinssatztyp S und nichtnegativ beim Zinssatztyp H ist. Das zugehörige Einkommensniveau ist

$$v''(\mathbf{X}) = 198{,}48.$$

Eine zweite Lösungsmöglichkeit für dieses Gleichungssystem erhält man nach Kruschwitz, indem man die Nullstelle der (mit der dritten Gleichung gebildeten) Hilfsfunktion

$$\lambda_3(v'') := \lambda_2\,q_2 - 1{,}21v'' - 50$$

iterativ bestimmt. Dabei wird zu fest vorgegebenem Argument v'' der Funktionswert $\lambda_3 = \lambda_3(v'')$ unter Verwendung der ersten beiden Gleichungen des Gleichungssystems folgendermaßen rekursiv bestimmt:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -\,v'' - 500; & q_1 = q_{1,H} = 1{,}1 \text{ bei } \lambda_1 \geq 0,\ q_1 = q_{1,S} = 1{,}4 \text{ bei } \lambda_1 < 0; \\ \lambda_2 = \lambda_1 q_1 - 1{,}1v'' + 1460; & q_2 = q_{2,H} = 1{,}1 \text{ bei } \lambda_2 \geq 0,\ q_2 = q_{2,S} = 1{,}4 \text{ bei } \lambda_2 < 0; \\ \lambda_3 = \lambda_2\,q_2 - 1{,}21v'' - 50. & \end{array}$$

Die Nullstelle der Funktion $\lambda_3(v'')$ kann man beispielsweise in Microsoft Excel mit der im Menü Daten befindlichen Was-wäre-wenn-Analyse/Zielwertsuche bestimmen, indem als Zielzelle die Zelle mit der Berechnung des Funktionswerts $\lambda_3(v'')$, als Zielwert die Zahl 0 und als veränderbare Zelle die Zelle mit dem Wert für v'' wählt. Die Zielwertsuche liefert für v'' den Wert 198,48.

Die entsprechende Glattstellung von **Y**,

$$\mathbf{S}''(\mathbf{Y}) - \mathbf{V}''(v''(\mathbf{Y})) = \mathbf{U}'' - \mathbf{B} - \mathbf{Y} = (700;0;-2230)^{\mathsf{T}},$$

liefert nur im Fall $q_1 = q_S$, $q_2 = q_S$ ein reales Supplement $\mathbf{S}''(\mathbf{Y})$:

$$\lambda_1 = -882{,}17 < 0;\ \lambda_2 = -1435{,}41 < 0.$$

Das zugehörige Einkommensniveau ist

$$v``(\mathbf{Y}) = 182{,}17 < 198{,}48 = v``(\mathbf{X}).$$

Demnach ist bei der Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W``}$ des Einkommensstrebens der Zahlungsstrom **X** besser als der Zahlungsstrom **Y**:

$$\mathbf{X} \vartriangleright_{\mathrm{R}W``} \mathbf{Y}.$$

Beim Konzept der Replizierung liefern also bei gespaltenen Marktzinsfaktoren die verwendeten speziellen Zielsetzungen von Vermögens- und Einkommensstreben für diese speziellen Zahlungsströme **X** und **Y** verschiedene Vergleichsergebnisse.
Dieses Beispiel illustriert außerdem, dass bei den von Kruschwitz verwendeten speziellen Beurteilungskurven $\mathbf{W}'(v)$ und $\mathbf{W}``(v)$ und den speziellen einperiodischen Supplementen mit positiven Zinsfaktoren stets eine eindeutige Replizierung existiert. Den allgemeinen Beweis hierfür findet man bei Kruschwitz (1976), S. 18–20, oder auf der Autoren-Website www.pleier-r.de. △

5.3.3 Vielfalt der Präferenzordnungen bei einem schwach unvollkommenen Supplementsystem

Die jetzt anschließende Untersuchung des übriggebliebenen Falles (LS) eines schwach unvollkommenen Supplementsystems behandelt eigentlich den allgemeinen Fall eines beliebigen Supplementsystems und umfasst damit auch die einfacheren Spezialfälle (LV) und (LU). Für die Beschreibung der Vielfalt der durch das Konzept der Duplizierung bzw. der Replizierung erzeugten Präferenzordnungen bzw. zur Unterscheidung der beiden Fälle, ob zwei verschiedene Beurteilungskurven W und $W‘$ die gleiche Präferenzordnung oder verschiedene Präferenzordnungen liefern, wird nun zu einem fest vorgegebenen Supplementsystem $L \subseteq K$ nach einer entsprechenden Relation für die Beurteilungskurven gesucht. Soll die Übereinstimmung von zwei D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W‘}$ ($\subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$) gleichbedeutend zu einer Relation $\sim_{L\mathrm{D}}$ für die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}, \mathbf{W}' \in B(L)$ der verwendeten Beurteilungskurven sein (Beurteilungskurven mit eindeutiger Duplizierung bzw. Replizierung; Definition von $B(L)$ in Abschnitt 8.3.5), so ist diese Relation $\sim_{L\mathrm{D}}$ notwendig eine Äquivalenzrelation: Aus der Bedingung

$$\trianglerighteq_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}W‘} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{W} \sim_{L\mathrm{D}} \mathbf{W}‘$$

und der Tatsache, dass die Mengenidentität „=“ der Teilmengen

$$\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}, \trianglerighteq_{\mathrm{D}W‘} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

eine Äquivalenzrelation ist, übertragen sich nämlich deren drei Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und Symmetrie auch auf die Relation $\sim_{L\mathrm{D}} \subseteq B(L) \times B(L)$. Analog kann die Übereinstimmung von zwei R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W‘}$ nur durch eine Äquivalenzrelation $\sim_{L\mathrm{R}}$ für die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}, \mathbf{W}' \in B(L)$ beschrieben werden. Bei der Herleitung entsprechender Relationen $\sim_{L\mathrm{D}}$ und $\sim_{L\mathrm{R}}$ in Abschnitt 8.3.5 zeigt sich, dass diese sogar übereinstimmen:

$$\sim_{L\mathrm{D}} = \sim_{L\mathrm{R}} \;=: \sim_L.$$

Mit dem Begriff dieser L-Äquivalenz $\sim_L$ bzw. der L-Disäquivalenz $\nsim_L$ zweier Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}‘(\mu)$ von Beurteilungskurven W und $W‘$ kann nun auch im Falle (LS) eines schwach unvollkommenen Supplementsystems L die Vielfalt der Präferenzordnungen im nachfolgenden Satz 5.5 c) beschrieben werden.

Die Herleitung der L-Äquivalenz $\sim_L$ wird im Abschnitt 8.3.5 des mathematischen Anhangs durchgeführt. Dazu wird als Erstes für die Übereinstimmung zweier D-Präferenzordnungen die notwendige Bedingung (LDÄ) hergeleitet und dann gezeigt, dass diese Bedingung auch hinreichend für die Übereinstimmung ist. Analog dazu wird die für die Übereinstimmung zweier R-Präferenzordnungen charakteristische Bedingung (LRÄ) bewiesen.

Weiter wird gezeigt, dass die beiden Bedingungen (LDÄ) und (LRÄ) gleichwertig sind. Auf diese Weise erhält man die nachfolgend angegebene Definition der L-Äquivalenz $\sim_L$ mittels der Bedingungen (LDÄ) und (LRÄ) und mit der Eigenschaft, dass Parameterdarstellungen $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}' \in B(L)$ von Beurteilungskurven genau dann L-äquivalent sind, wenn die zugehörigen D- und R-Präferenzordnungen übereinstimmen:

$$\mathbf{W} \sim_L \mathbf{W}' \;\Leftrightarrow\; \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}W'},\ \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}.$$

Zur Bezeichnungsweise der L-Äquivalenz ist noch anzumerken, dass bei der Untersuchung verschiedener Supplementsysteme L und L‘ es exakter wäre, statt von der L-Äquivalenz besser von der C_{M^n}-Äquivalenz zu sprechen. Die Bedingungen (LDÄ) und (LRÄ) hängen nämlich nur von der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} ab und verschiedene Supplementsysteme L, L‘ mit gleicher zulässiger Supplementmenge

(GZS) $\qquad C_{M^n}(L) = C_{M^n}(L')$

ergeben dieselben Bedingungen. Da aber meist bei der Betrachtung das Supplementsystem L fest fixiert ist, wird der kürzeren Bezeichnung L-Äquivalenz $\sim_L$ der Vorzug gegeben.

Definition 5.4 *L*-Äquivalenz zweier Beurteilungskurven

1) Zwei Parameterdarstellungen

$$\mathbf{W}: \quad J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\mathbf{W}': \quad J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

von Beurteilungskurven (o. E. mit demselben Definitionsintervall J) mit eindeutiger Duplizierung und Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\mathbf{W}$, $\mathbf{W}' \in B(L)$) heißen ***L*-äquivalent**,

$$\mathbf{W} \sim_L \mathbf{W}',$$

wenn bei der Duplizierung der Kurvenpunkte $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ mittels der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ die Bedingung

(LDÄ) $\qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n}$ für jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$

erfüllt ist oder gleichbedeutend dazu bei der Replizierung der Kurvenpunkte $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ die Bedingung

(LRÄ) $\qquad \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n}$ für jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$

erfüllt ist. Die L-Äquivalenz $\sim_L$ ist auf der Menge der Parameterdarstellungen von

Beurteilungskurven eine Äquivalenzrelation.

2) Zwei Parameterdarstellungen **W**, **W'** $\in B(L)$) heißen **trivial *L*-äquivalent**, wenn die folgende Mengengleichung erfüllt ist:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) = O \text{ bzw. } \mathbf{S}^*{}'(\mathbf{W}(J)) = O.$$

Die triviale L-Äquivalenz $\sim_{tL}$ stimmt mit der P-Äquivalenz $\sim_P$ ($\mathbf{W}(J) = \mathbf{W}'(J)$) überein:

$$\sim_{tL} = \sim_P.$$

Die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ heißen **echt (nichttrivial) *L*-äquivalent**, wenn sie L-äquivalent und nicht trivial L-äquivalent bzw. nicht P-äquivalent sind:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \ \forall\, \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J) \wedge \mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) \neq O \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{S}^*{}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \ \forall\, \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J) \wedge \mathbf{S}^*{}'(\mathbf{W}(J)) \neq O.$$

3) Zwei Beurteilungskurven W und W', die als P-Äquivalenzklassen (bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_P$; siehe Abschnitt 8.3) von Parameterdarstellungen definiert sind, heißen L-äquivalent,

$$W \sim_L W',$$

wenn es Repräsentanten $\mathbf{W} \in W$ und $\mathbf{W}' \in W'$ der P-Äquivalenzklassen gibt, die L-äquivalent sind.

Die Ergebnisse über die Vielfalt der mit den Konzepten Duplizierung und Replizierung definierten Präferenzordnungen in Abhängigkeit von der verwendeten Beurteilungskurve werden nun im nachfolgenden mathematischen Satz 5.5 zusammengefasst. Die Unterscheidung der beiden Fälle, ob zwei verschiedene Beurteilungskurven die gleiche Präferenzordnung oder verschiedene Präferenzordnungen liefern, kann demnach mit dem Begriff der L-Äquivalenz $\sim_L$ bzw. der L-Disäquivalenz $\nsim_L$ erfolgen, der einen Zusammenhang zwischen den verwendeten Beurteilungskurven beschreibt. Die Vielfalt der Präferenzordnungen entspricht damit genau der Vielfalt der L-Äquivalenzklassen der Beurteilungskurven. Die Fälle (LV) eines vollkommenen Supplementsystems und (LU) eines streng unvollkommenen Supplementsystems ordnen sich als Spezialfälle ein:

Im Fall (LV) existiert nach Satz 5.2 1) genau eine Präferenzordnung nach den Konzepten der Duplizierung oder Replizierung und dementsprechend genau eine L-Äquivalenzklasse, die alle Beurteilungskurven enthält. Beliebige Paare von Parameterdarstellungen **W** und **W'** von Beurteilungskurven sind also L-äquivalent und erfüllen beispielsweise die Bedingung (LDÄ):

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \text{für jedes } \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J).$$

Diese Eigenschaft für die speziellen $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n}$ ergibt sich auch nochmals aus dem Ergebnis, dass im Fall (LV) die zulässige Supplementmenge C_{M^n} mit der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ übereinstimmt und dann aufgrund der Unterraumeigenschaft für C_{M^n} die Beziehung

$$\mathbf{S} + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \text{für jedes } \mathbf{S} \in C_{M^n}$$

gilt: Für jedes $\mathbf{S} \in C_{M^n}$ ist nämlich auch $-\mathbf{S} \in C_{M^n}$,

$$\mathbf{S} + C_{M^n} \subseteq C_{M^n},$$

$$-\mathbf{S} + C_{M^n} \subseteq C_{M^n},$$

$$C_{M^n} = \mathbf{S} - \mathbf{S} + C_{M^n} \subseteq \mathbf{S} + C_{M^n}$$

und dann insgesamt

$$\mathbf{S} + C_{M^n} \subseteq C_{M^n} \subseteq \mathbf{S} + C_{M^n},$$

$$\mathbf{S} + C_{M^n} = C_{M^n}.$$

Im Fall (LU) eines stark unvollkommenen Supplementsystems L liegt stets ein trivialer Linienkegel der zulässigen Supplemente vor (Begründung in Abschnitt 5.3.2):

$$R_{M^n} = O.$$

Daraus folgt jetzt mit dem Begriff der L-Äquivalenz ohne längeren Beweis (wie für Satz 5.3), dass für L-äquivalente Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven nach der in Abschnitt 8.3.5 angegebenen notwendigen Bedingung (LDÄ1) stets

$$\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) \subseteq R_{M^n} = O$$

gilt, also nur die triviale L-Äquivalenz ($\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) = O$) bzw. die P-Äquivalenz ($\mathbf{W}(J) = \mathbf{W}'(J)$) auftreten kann. Demnach sind hier im Fall (LU) Parameterdarstellungen $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}' \in B(L)$ von Beurteilungskurven, die verschiedene Spuren aufweisen bzw. nicht P-äquivalent sind, auch nicht L-äquivalent. Sie führen also zu verschiedenen D- bzw. R-Präferenzordnungen. Es gibt in diesem Fall also genau so viele L-Äquivalenzklassen und D- bzw. R-Präferenzordnungen wie es Beurteilungskurven mit verschiedenen Spuren gibt.

Auf die Fragen, wie sich verschiedene D-Präferenzordnungen unterscheiden, wie sich verschiedene R-Präferenzordnungen unterscheiden und wie sich die zur selben Beurteilungskurve gebildete D- und R-Präferenzordnung unterscheiden, wird im späteren Abschnitt 5.4 noch eingegangen.

Satz 5.5 Vielfalt der mittels Duplizierung und Replizierung erhaltenen Präferenzordnungen in Abhängigkeit von der Beurteilungskurve

Es liege ein Kapitalmarkt vor, bei dem die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Kapitalmarktgeschäfte ein konvexer linearer Kegel ist, der keine Arbitragegelegenheit enthält:

(AF) $\quad K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O \quad$ (Arbitragefreiheit von K).

In der Menge K soll ein fest ausgewähltes Supplementsystem

$$L = \{\mathbf{S}_H^1, \ldots, \mathbf{S}_H^n, \mathbf{S}_S^1, \ldots, \mathbf{S}_S^n\} \subseteq K$$

aus n Investitionen $\mathbf{S}_H^j$ und n Finanzierungen $\mathbf{S}_S^j$ $(j = 1,\ldots,n)$ existieren, für welches jedes der 2^n n-Tupel

$$L_\mathbf{E} = (\mathbf{S}_{E_1}^1,\ldots,\mathbf{S}_{E_n}^n) \in L_1 \times \ldots \times L_n,$$

$$L_j = \{\mathbf{S}_H^j, \mathbf{S}_S^j\},\ M = \{H,S\},\ \mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n)^\mathsf{T} \in M^n,$$

von Kapitalmarktgeschäften $\mathbf{S}_{E_j}^j$ des Systems L aus n linear unabhängigen Zahlungsströmen besteht. Weiter soll die als Vereinigung der Transformationskegel

$$C_\mathbf{E} = \text{cone}\, L_\mathbf{E}$$

gebildete zulässige Supplementmenge, der gesamte Transformationskegel,

$$C_{M^n} = \bigcup_{\mathbf{E}\in M^n} C_\mathbf{E}$$

zusammen mit der jeweils verwendeten homogenen Beurteilungskurve

$$\mathbf{V} : \mu \in J =]a,b[\longrightarrow \mathbf{V}(\mu) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

den gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ aufspannen:

$$C_{M^n} + \mathbf{V}(J) = \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{für die Duplizierung,}$$

$$C_{M^n} - \mathbf{V}(J) = \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{für die Replizierung.}$$

Bei der Replizierung ist noch ein beliebiger Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n+1}$ fest vorgegeben. Die dadurch für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mögliche Duplizierung bzw. Replizierung mittels zulässiger Supplementmenge und inhomogener Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$$

soll jeweils nur auf eine einzige Weise möglich sein: $\mathbf{W} \in B(L)$ (gemäß der Definition in Abschnitt 8.3.5). Zur Beschreibung der Vielfalt der mit den Konzepten der Duplizierung und Replizierung definierten D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RW}$ in Abhängigkeit von der Beurteilungskurve werden drei Fälle unterschieden:

a) Im Fall (LV) eines **vollkommenen Supplementsystems** existiert ein positiver Normalenvektor $\mathbf{P} \in V^\perp$ $(V = K \cap (-K))$, sodass die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte im abgeschlossenen homogenen Halbraum $H_{\mathbf{P},0}^{\leq}$ liegt:

$$K \subseteq H_{\mathbf{P},0}^{\leq} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} \leq 0\}.$$

In diesem Spezialfall (LV) muss für die Beurteilungskurven $\mathbf{W}$ und $\mathbf{W}'$ die eindeutige Duplizierung bzw. Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ nicht extra vorausgesetzt werden. Die Menge K der Kapitalmarktgeschäfte ist dabei im Falle eines vollkommenen Kapitalmarkts gleich der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ und im Falle eines unvollkommenen Kapitalmarkts gleich dem Halbraum $H_{\mathbf{P},0}^{\leq}$. In beiden Fällen stimmen sämtliche D- und R-Präferenzordnungen mit der B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ überein, welche die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mittels ihrer Barwerte $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ vergleicht. Es gibt also genau eine L-Äquivalenzklasse, die alle Parameterdarstellungen von Beurteilungskurven enthält, und genau eine D- bzw. R-Präferenzordnung. Für alle Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven gilt also

$$\mathbf{W} \sim_L \mathbf{W}'$$

und für alle D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$, $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$ und alle R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$, $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ gilt

$$\trianglerighteq_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}W'} = \trianglerighteq = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}.$$

b) Im Fall (LU) eines **streng unvollkommenen Supplementsystems** gehören zu verschiedenen Beurteilungskurven W und W' mit jeweils eindeutiger Duplizierung und Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$, die als P-Äquivalenzklassen verschieden sind bzw. die verschiedene Spuren besitzen, auch verschiedene R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ und verschiedene D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$. Somit gibt es genau so viele R-Präferenzordnungen bzw. D-Präferenzordnungen wie es Beurteilungskurven $\mathbf{W} \in B(L)$ gibt. Jede L-Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen stimmt mit einer P-Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen $\mathbf{W} \in B(L)$ der Beurteilungskurven überein. Für alle Parameterdarstellungen $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}' \in B(L)$ von Beurteilungskurven gilt also

$$\mathbf{W} \nsim_P \mathbf{W}' \;\Rightarrow\; \mathbf{W} \nsim_L \mathbf{W}' \;\Rightarrow\; \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \neq \trianglerighteq_{\mathrm{D}W'} \text{ und } \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \neq \trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}.$$

c) Im Fall (LS) eines **schwach unvollkommenen Supplementsystems** und auch allgemein im Fall eines beliebigen Supplementsystems gehören zu zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}' \in B(L)$ von Beurteilungskurven genau dann gleiche R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ bzw. gleiche D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$, wenn die Parameterdarstellungen L-äquivalent sind:

$$\begin{aligned} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}W'} \quad & \text{bzw. } \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W'} \\ & \Leftrightarrow \mathbf{W} \sim_L \mathbf{W}' \\ & \Leftrightarrow \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \;\; \forall\, \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J). \end{aligned}$$

Bei der letzten Bedingung ist $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0)$ das eindeutig bestimmte Supplement des Kurvenpunkts $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ bei der Duplizierung mittels Supplementsystem L und Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$. Eine äquivalente Bedingung kann mit dem Supplement $\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0)$ bei der Replizierung von $\mathbf{Y}^0$ mittels Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$, Supplementsystem L und Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ angegeben werden. Es gibt also genau so viele D-Präferenzordnungen bzw. genau so viele R-Präferenzordnungen, wie es L-Äquivalenzklassen von Parameterdarstellungen $\mathbf{W} \in B(L)$ der Beurteilungskurven gibt.

Dieser mathematische Satz liefert auch einen schönen Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen Gebieten der Mathematik, nämlich zwischen speziellen Relationen des Vektorraums $\mathbb{R}^{n+1}$ und speziellen Kurven im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$. Bei fest vorgegebenem Supplementsystem L besteht ein bijektiver Zusammenhang zwischen der Menge der mittels des Konzepts der Replizierung bzw. Duplizierung erzeugten Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RW}$ bzw. $\trianglerighteq_{DW}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ und der Menge der L-Äquivalenzklassen von Beurteilungskurven $\mathbf{W} \in B(L)$ im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$, für welche die eindeutige Replizierung und Duplizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gesichert ist. Der Teil a) des Satzes entspricht der Aussage von Satz 5.2 1) und 3), der Teil b) entspricht der Aussage von Satz 5.3. Für Teil c) des Satzes mit dem allgemeinen Fall erfolgt der Beweis in Abschnitt 8.3.5. Anzumerken ist hierzu, dass bei dieser Charakterisierung der Übereinstimmung der D- bzw. R-Präferenzordnungen durch die L-Äquivalenz der Beurteilungskurven die Arbitragefreiheit (AF) von K nur für die Beweisrichtung verwendet wird, bei der aus der L-Äquivalenz auf die Übereinstimmung der D- bzw. R-Präferenzordnungen geschlossen wird. Eine schöne **Anwendung** von Satz 5.5 erfolgt in Abschnitt 6.3.6 bei der Beschreibung der Vielfalt der zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten m und m' gehörigen verallgemeinerten Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$, die als spezielle R-Präferenzordnungen interpretiert werden können. Hier werden im Beweis von Satz 6.1 2) für die konkreten Beurteilungskurven der Zeitwert-Präferenzordnungen die verbindenden Supplemente $\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0)$ berechnet und die mengentheoretische Bedingung (LRÄ) für die LR-Äquivalenz nachgerechnet.

Anmerkung zur echten *L*-Äquivalenz

Im Fall (LV) eines vollkommenen Supplementsystems stimmen nach Satz 5.2 1) in Abschnitt 5.3.1 die D-und R-Präferenzordnungen für alle Beurteilungskurven $\mathbf{W} \in B(L)$ überein. Nach Abschnitt 8.3.5 bedeutet dies, dass alle diese Beurteilungskurven zueinander L-äquivalent sind. Demzufolge sind in diesem Fall beliebige *verschiedene* Beurteilungskurven (mit verschiedenen Spuren) zueinander auch *echt* L-äquivalent.

Im Spezialfall der Laufzeit $n = 1$ kann aber die echte L-Äquivalenz verschiedener Beurteilungskurven nur im Fall (LV) eines vollkommenen Supplementsystems auftreten. Dazu wird nämlich nachfolgend gezeigt, dass im Falle eines unvollkommenen Supplementsystems $L \neq L_V$ und der Laufzeit $n = 1$ der Linienkegel notwendig trivial ist,

$$R_{M^n} = O,$$

und somit für Beurteilungskurven $\mathbf{W}$ und $\mathbf{W}'$ nur die triviale L-Äquivalenz ($\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) = O$) bzw. P-Äquivalenz auftreten kann. Im Fall $n = 1$ und $L \neq L_V$ bietet also der Raum $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2$ nicht ausreichend Platz für das Auftreten eines nichttrivialen Linienkegels R_{M^n} und der echten L-Äquivalenz:

$$n = 1, L \neq L_V, \mathbf{W} \sim_L \mathbf{W}' \Rightarrow R_{M^n} = O, \mathbf{W} \sim_P \mathbf{W}'.$$

Durch ein nachfolgendes Beispiel wird gezeigt, dass jedoch ab einer Laufzeit $n \geq 2$ auch für ein unvollkommenes Supplementsystem L tatsächlich eine echte L-Äquivalenz von Beurteilungskurven auftreten kann. Für dieses Beispiel sind das unvollkommenene Supplementsystem, die zulässige Supplementmenge, der Linienkegel und die beiden L-äquivalenten Beurteilungskurven in Abbildung 5.9 dargestellt.

Beweis für das Nichtauftreten der echten L-Äquivalenz bei $n = 1$ und $L = \{\mathbf{S}_H, \mathbf{S}_S\} \neq L_V$: Da L ein Supplementsystem und somit $\mathbf{S}_H$ eine Investition und $\mathbf{S}_S$ eine Finanzierung ist, gilt ray $\mathbf{S}_H \neq$ ray $\mathbf{S}_S$ (siehe Abschnitt 5.1.3) und ray $\mathbf{S}_H \cap$ ray $\mathbf{S}_S = O$. Nimmt man an, dass der Linienkegel R_{M^1} des gesamten Transformationskegel C_{M^1} nichttrivial ist, so gibt es ein Supplement $\mathbf{T} \in R_{M^1} \setminus O$ mit

$$\mathbf{T}, -\mathbf{T} \in \text{lin } \mathbf{T} \subseteq R_{M^1} \subseteq C_{M^1} = \text{ray } \mathbf{S}_H \cup \text{ray } \mathbf{S}_S .$$

Ist o. E. $\mathbf{T} \in$ ray $\mathbf{S}_H$ (der Fall $\mathbf{T} \in$ ray $\mathbf{S}_S$ wird analog behandelt), so ist $-\mathbf{T} \notin$ ray $\mathbf{S}_H$, also $-\mathbf{T} \in$ ray $\mathbf{S}_S$ und dann

$$-\mathbf{S}_H, -\mathbf{S}_S \in \text{lin } \mathbf{T} \subseteq R_{M^1} \subseteq C_{M^1} \subseteq K.$$

Es gilt also $\mathbf{S}_H, \mathbf{S}_S \in L \cap V = L_V$ und somit $L = L_V$. Bei nichttrivialem Linienkegel R_{M^1} liegt also notwendig der Fall (LV) vor.
Falls nun der Fall (LV) nicht vorliegt, so ist der Linienkegel trivial:

$$L \neq L_V \Rightarrow R_{M^1} = O.$$

Für L-äquivalente Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven gilt dann nach der notwendigen Bedingung (LDÄ1) von Abschnitt 8.3.5 stets

$$\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) \subseteq R_{M^1} = O,$$

sodass nur die triviale L-Äquivalenz auftreten kann. □

Beispiel 5.7 Zwei echt L-äquivalente Beurteilungskurven bei einem unvollkommenen Supplementsystem

Bei der Laufzeit $n = 2$ existiere auf dem Kapitalmarkt das unvollkommene Supplementsystem

$$L = \{ \mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_S^1, \mathbf{S}_H^2, \mathbf{S}_S^2 \}$$

mit Termingeschäften des im Abschnitt 8.4 beschriebenen Typs:

$$\mathbf{S}_H^1 = (-1, q_{1H}, 0)^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{S}_S^1 = (1, -q_{1S}, 0)^\mathsf{T},$$
$$\mathbf{S}_H^2 = (0, -1, q_{2,H})^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{S}_S^2 = (0, 1, -q_{2,S})^\mathsf{T}$$

und den Zinsfaktoren $q_{1S} = q_{1H} > 0$, $q_{2,S} > q_{2,H} > 0$. Das zum Index $j = 1$ gehörige Supplementpaar $\mathbf{S}_H^1$, $\mathbf{S}_S^1 = -\mathbf{S}_H^1$ ist hier linear abhängig und spannt eine durch den Nullpunkt gehende Gerade G auf:

$$G := \text{lin } \mathbf{S}_S^1 = \text{ray } \mathbf{S}_H^1 \cup \text{ray } \mathbf{S}_S^1 \subseteq C_{M^2} .$$

Für die Transformationskegel $C_\mathbf{E}$, $\mathbf{E} \in \mathrm{M}^2$, folgt daher

$$\begin{aligned} C_{(H,H)} \cup C_{(S,H)} &= (\text{ray } \mathbf{S}_H^1 + \text{ray } \mathbf{S}_H^2) \cup (\text{ray } \mathbf{S}_S^1 + \text{ray } \mathbf{S}_H^2) \\ &= (\text{ray } \mathbf{S}_H^1 \cup \text{ray } \mathbf{S}_S^1) + \text{ray } \mathbf{S}_H^2) \\ &= G + \text{ray } \mathbf{S}_H^2 =: H^H \end{aligned}$$

und analog

$$C_{(H,S)} \cup C_{(S,S)} = G + \text{ray } \mathbf{S}_S^2 =: H^S.$$

Der gesamte Transformationskegel C_{M^2} ist daher die Vereinigung der beiden Halbebenen H^H und H^S,

$$C_{M^2} = H^H \cup H^S,$$

und insbesondere abgeschlossen bezüglich der Translation mit dem Translationsvektor (Verschiebungsvektor) $\mathbf{S}_S^1$:

$$\mathbf{S}_S^1 + C_{M^2} = C_{M^2} .$$

Der Linienkegel R_{M^2} der vollkommenen zulässigen Supplementmenge C_{M^2} ist gleich der Geraden G und daher nichttrivial. Für die speziellen Beurteilungskurven

$$\mathbf{W}'(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = (0,0,\mu)^\mathsf{T},$$

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{W}'(\mu) - \mathbf{S}_H^1$$

und jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ gilt daher

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^0 &= \mathbf{W}(\mu_0) = \mathbf{W}'(\mu_0) - \mathbf{S}_H^1 \\ &= \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0))\end{aligned}$$

mit $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) = - \mathbf{S}_H^1 = \mathbf{S}_S^1$ und $\mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{W}'(\mu_0)$. Demnach ist die Bedingung (LDÄ) erfüllt:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \text{für alle } \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J).$$

Die beiden Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ sind also echt L-äquivalent. △

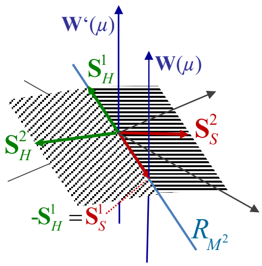


Abb. 5.9 Ein nichttrivialer Linienkegel R_{M^n} und zwei echt L-äquivalente Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ bei einem unvollkommenen Supplementsystem L für die Laufzeit $n = 2$

5.4 Vergleich verschiedener D- und R-Präferenzordnungen

Die geometrische Charakterisierung einer Halbordnung $\geq_H$ eines Vektorraums V mit dem zugehörigen spitzen konvexen linearen Kegel K_+ aller $\geq_H$-nichtnegativen Vektoren von V wird in Abschnitt 8.1 behandelt. Für zwei Vektoren $x, y \in V$ lässt sich die Relation $x \geq_H y$ charakterisieren durch die Bedingung, dass der Differenzvektor $x - y$ der Vektoren x und y im Kegel K_+ liegt. Die Bessermenge $W_+(y)$ von y, also die Menge aller $x \in V$ mit $x \geq_H y$ (x ist mit y bezüglich der Relation $\geq_H$ vergleichbar, x ist größer oder gleich y bezüglich $\geq_H$), ist also gleich dem spitzen konvexen affinen Kegel

$$W_+(y) = y + K_+,$$

wobei y der Scheitelpunkt (die Spitze) des Kegels und

$$K_+ = \{u \in V : u \geq_H o\}$$

der von y unabhängige spitze konvexe lineare Kegel aller $\geq_H$–nichtnegativen Vektoren von V ist.

Analog dazu werden in Abschnitt 5.2.4 für die in $\mathbb{R}^{n+1}$ mittels dem Konzept der Duplizierung bzw. Replizierung gewonnenen Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ bei gesicherter **Monotonie der Präferenzordnung** die Bessermengen $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ und $W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ geometrisch als affine Kegel beschrieben:

$$W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}, \qquad K_{+\mathrm{D}} := C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0},$$

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+\mathrm{R}}, \qquad K_{+\mathrm{R}} := - C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0}.$$

Allgemein gilt, dass zwei Relationen $\succcurlyeq$ und $\succcurlyeq^*$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ genau dann gleich sind, wenn ihre Bessermengen übereinstimmen. Denn es ist

$$\succcurlyeq \; = \; \succcurlyeq^* \quad (\subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$$

genau dann, wenn $\mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}$ gleichbedeutend zu $\mathbf{X} \succcurlyeq^* \mathbf{Y}$ ist bzw. wenn

$$\mathbf{X} \in W_+(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{Y}\}$$

gleichbedeutend zu

$$\mathbf{X} \in W_+^*(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \succcurlyeq^* \mathbf{Y}\}$$

ist. Die letzte Aussage bedeutet aber

$$W_+(\mathbf{Y}) = W_+^*(\mathbf{Y}) \text{ für jedes } \mathbf{Y} \in WB_{\succcurlyeq},$$

wobei

$$WB_{\succcurlyeq} = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{Es gibt ein } \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } (\mathbf{C},\mathbf{D}) \in \succcurlyeq\}$$

der Wertebereich (Wertevorrat) der Relation $\succcurlyeq$ ist (Gellert et al. (1990), S. 484f.). Bei einer *Präferenz*relation $\succcurlyeq \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ ist der Wertebereich gleich dem ganzen $\mathbb{R}^{n+1}$. Ein Unterschied der Relationen lässt sich daher durch den Unterschied bei den Bessermengen beschreiben und geometrisch darstellen. Nachfolgend wird dazu die **symmetrische Differenz** der Bessermengen für die Laufzeit $n = 1$ bzw. $n = 2$ grafisch dargestellt.

5.4.1 Vergleich von D-Präferenzordnungen

Der Vergleich der zu einem festen unvollkommenen Supplementsystem L ($L \neq L_V$), für welches noch die **Monotonie der D-Präferenzordnungen** gesichert sein soll, und zu den Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ gehörigen D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}^*$ wird nun durch Unterschiede bei den Bessermengen beschrieben und geometrisch veranschaulicht. Zu einem festem Zahlungsstrom $\mathbf{Y}$ werden daher die Differenzmengen der Bessermengen betrachtet:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{D}-\mathrm{D}^*}(\mathbf{Y}) &:= W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) \setminus W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y}) \\ &= (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}) \setminus (\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}), \\ P_{\mathrm{D}^*-\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) &:= W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y}) \setminus W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) \\ &= (\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}) \setminus (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}). \end{aligned}$$

Die Menge $P_{\mathrm{D}-\mathrm{D}^*}(\mathbf{Y})$ ist die Menge aller Zahlungsströme $\mathbf{X}$, die bezüglich der Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ mindestens so günstig sind wie $\mathbf{Y}$, aber bezüglich der Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}^*$ nicht so günstig wie $\mathbf{Y}$ bzw. ungünstiger als $\mathbf{Y}$ sind. Auf der Menge $P_{\mathrm{D}-\mathrm{D}^*}(\mathbf{Y})$ liefert also beim Vergleich von $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{Y}$ die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}^*$ eine stärkere Bedingung als die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$. Analog ist auf der Menge $P_{\mathrm{D}^*-\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ eine stärkere Bedingung als die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}^*$.

Insgesamt liefern die beiden Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}^*$ **unterschiedliche Vergleichsergebnisse** für $\mathbf{X}$ mit dem fest gedachten $\mathbf{Y}$ genau auf der Vereinigung der beiden Mengen $P_{\mathrm{D}-\mathrm{D}^*}(\mathbf{Y})$ und $P_{\mathrm{D}^*-\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$, welche auch als die symmetrische Differenz der Bessermengen $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ und $W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y})$ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}\mathrm{symdiff}_{\mathrm{D,D*}}(\mathbf{Y}) &:= P_{\mathrm{D-D*}}(\mathbf{Y}) \cup P_{\mathrm{D*-D}}(\mathbf{Y})\\ &= (W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})\backslash W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y})) \cup (W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y})\backslash W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}))\\ &= (W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})\cup W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y})) \setminus (W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})\cap W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y})).\end{aligned}$$

Übereinstimmende Vergleichsergebnisse der beiden Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}^*$ erhält man beim Vergleich mit dem fest gedachten $\mathbf{Y}$ für die $\mathbf{X} \in W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) \cap W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y})$ mit

$$\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y} \;\text{ und }\; \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W}^* \mathbf{Y},$$

und für die $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) \cup W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y}))$ mit

$$\mathbf{X} \vartriangleleft_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y} \;\text{ und }\; \mathbf{X} \vartriangleleft_{\mathrm{D}W}^* \mathbf{Y},$$

also insgesamt in der Menge

$$(W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) \cap W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y})) \cup (\mathbb{R}^{n+1} \setminus (W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) \cup W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y}))).$$

Falls die Beurteilungspunkte von $\mathbf{Y}$ übereinstimmen,

$$\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})),$$

stimmen die Bessermengen von $\mathbf{Y}$ bezüglich der beiden D-Präferenzordnungen überein:

$$W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y}) = W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}).$$

Für keinen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ liefern dann die beiden Präferenzordnungen unterschiedliche Ergebnisse beim Vergleich mit $\mathbf{Y}$. Die Differenzmengen der Bessermengen sind leer:

$$P_{\mathrm{D-D*}}(\mathbf{Y}) = P_{\mathrm{D*-D}}(\mathbf{Y}) = \emptyset,\;\; \mathrm{symdiff}_{\mathrm{D,D*}}(\mathbf{Y}) = \emptyset.$$

Falls die Beurteilungspunkte von $\mathbf{Y}$ nicht übereinstimmen,

$$\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) \neq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})),$$

erhält man je nach der Lage von $\mathbf{Y}$ bezüglich der inhomogenen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ verschiedene Formen für die Differenzmengen $P_{\mathrm{D-D*}}(\mathbf{Y})$ und $P_{\mathrm{D*-D}}(\mathbf{Y})$.

Grafische Darstellung der Differenzmengen für die Laufzeit $n = 1$

Beispielhaft wird hierzu der Fall der Laufzeit $n = 1$ mit den Kapitalmarktgeschäften

$$\mathbf{I} = (-1,q_H)^\mathsf{T},\; \mathbf{F} = (1,-q_S)^\mathsf{T},$$

den Marktzinsfaktoren $q_H, q_S \in \mathbb{R}$ ($q_S > q_H$, $q_S > 0$: Bedingungen für die Arbitragefreiheit und ein unvollkommenes Supplementsystem nach Beispiel 5.1 in Abschnitt 5.1.2), dem unvollkommenen Supplementsystem

$$L = \{\mathbf{I}, \mathbf{F}\}$$

und der zugehörigen zulässigen Supplementmenge

$$C_{M^1} = \mathrm{ray}\,\mathbf{I} \cup \mathrm{ray}\,\mathbf{F}$$

noch näher geometrisch beschrieben. In diesem Fall ist der lineare Kegel $K_{+\mathrm{D}}$ der Bessermengen gegeben durch

$$K_{+\mathrm{D}} = C_{M^1} + \mathbb{R}^2_{+0} = I^{+0} \cup F^{+0}$$

mit den homogenen Halbebenen

$$\begin{aligned} I^{+0} &= \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{P}_H^\mathsf{T}\mathbf{Z} \geq 0\} \qquad (\mathbf{P}_H = (q_H,1)^\mathsf{T}),\\ F^{+0} &= \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{P}_S^\mathsf{T}\mathbf{Z} \geq 0\} \qquad (\mathbf{P}_S = (q_S,1)^\mathsf{T}).\end{aligned}$$

Falls $\mathbf{Y}$ rechts von den beiden inhomogenen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ liegt, sind die Supplemente $\mathbf{S}(\mathbf{Y})$ und $\mathbf{S}^*(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ beide Finanzierungen. Es wird jetzt o. B. d. A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) der Fall betrachtet, dass $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ näher bei $\mathbf{Y}$ gelegen ist als $\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y}))$. Ansonsten vertauscht man die Rollen von $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$. Für die Streifen $P_{\mathrm{D-D*}}(\mathbf{Y})$ und $P_{\mathrm{D*-D}}(\mathbf{Y})$ des unterschiedlichen Vergleichs durch die beiden Präferenzordnungen erhält man mit dem Differenzvektor

$$\mathbf{\Omega}^*(\mathbf{Y}) := \mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) - \mathbf{S}^*(\mathbf{Y})$$

die Darstellungen

$$P_{\mathrm{D-D*}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \theta \cdot \mathbf{\Omega}^*(\mathbf{Y}) + \alpha \mathbf{I},\ 0 \le \theta < 1,\ \alpha \ge 0\},$$
$$P_{\mathrm{D*-D}}(\mathbf{Y}) = \emptyset.$$

Falls **Y** links von den beiden inhomogenen Beurteilungskurven und o. B. d. A. näher bei $\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y}))$ als bei $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ liegt, sind die Supplemente $\mathbf{S}(\mathbf{Y})$ und $\mathbf{S}^*(\mathbf{Y})$ von **Y** beide Investitionen. Mit dem Differenzvektor

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{Y}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) = \mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) - \mathbf{S}(\mathbf{Y})$$

erhält man für die Streifen mit unterschiedlichem Vergleichsergebnis der Präferenzordnungen die Darstellung

$$P_{\mathrm{D-D*}}(\mathbf{Y}) = \emptyset,$$
$$P_{\mathrm{D*-D}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} = \mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) + \theta \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{Y}) + \kappa \mathbf{F},\ 0 \le \theta < 1,\ \kappa \ge 0\}.$$

Falls **Y** zwischen den beiden Beurteilungskurven liegt und o. B. d. A. links der Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ und rechts der Kurve $\mathbf{W}^*(\mu)$, ist $\mathbf{S}(\mathbf{Y})$ eine Investition und $\mathbf{S}^*(\mathbf{Y})$ eine Finanzierung. Für die Streifen unterschiedlichen Vergleichs hat man die Darstellung

$$P_{\mathrm{D-D*}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} = \mathbf{Y} - \theta \cdot \mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) + \alpha \mathbf{I},\ 0 \le \theta < 1,\ \alpha \ge 0\},$$
$$P_{\mathrm{D*-D}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} = \mathbf{Y} - \theta \cdot \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \kappa \mathbf{F},\ 0 \le \theta < 1,\ \kappa \ge 0\}.$$

Die Differenzmengen für die verschiedenen Fälle sind in Abbildung 5.10 dargestellt.

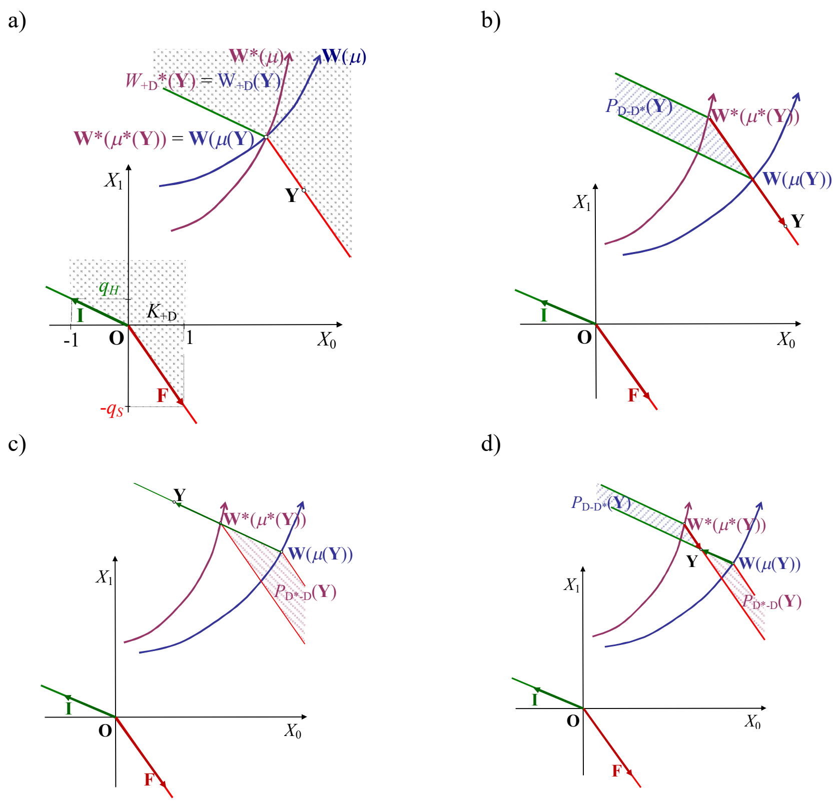


Abb. 5.10 Der Fall $\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ mit der gleichen Bessermenge $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) = W_{+\mathrm{D}}^*(\mathbf{Y})$ für die verschiedenen D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W^*}$; der Fall $\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{Y})) \neq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ mit den drei Fällen für die Differenzmengen $P_{\mathrm{D-D*}}(\mathbf{Y})$ und $P_{\mathrm{D*-D}}(\mathbf{Y})$ in Abhängigkeit von der Lage von **Y** zu den Beurteilungskurven

5.4.2 Vergleich von R-Präferenzordnungen

Zu einem festen unvollkommenen Supplementsystem L, für welches die **Monotonie der R-Präferenzordnungen** gesichert ist, und zu den verschiedenen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ werden nun die zugehörigen R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}{}^*$ durch die Unterschiede bei den Bessermengen verglichen.

Übereinstimmende Vergleichsergebnisse der beiden R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}{}^*$ erhält man für $\mathbf{X} \in W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \cap W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y})$:

$$\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y} \text{ und } \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W}{}^* \mathbf{Y},$$

und für $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \cup W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y}))$:

$$\mathbf{X} \triangleleft_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y} \text{ und } \mathbf{X} \triangleleft_{\mathrm{R}W}{}^* \mathbf{Y}.$$

Unterschiedliche Vergleichsergebnisse für $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ ergeben sich genau auf der Vereinigung der beiden Differenzmengen

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{R-R}^*}(\mathbf{Y}) &:= W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \setminus W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y}) \\ &= (\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+\mathrm{R}}) \setminus (\mathbf{W}^*(v^*(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+\mathrm{R}}), \\ P_{\mathrm{R}^*-\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) &:= W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y}) \setminus W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \\ &= (\mathbf{W}^*(v^*(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+\mathrm{R}}) \setminus (\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+\mathrm{R}}). \end{aligned}$$

welche auch als die symmetrische Differenz der Bessermengen $W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ und $W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y})$ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \mathrm{symdiff}_{\mathrm{R,R}^*}(\mathbf{Y}) &:= P_{\mathrm{R-R}^*}(\mathbf{Y}) \cup P_{\mathrm{R}^*-\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \\ &= (W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \setminus W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y})) \cup (W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y}) \setminus W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})) \\ &= (W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \cup W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y})) \setminus (W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \cap W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y})). \end{aligned}$$

Falls die Beurteilungspunkte von $\mathbf{Y}$ übereinstimmen,

$$\mathbf{W}^*(v^*(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})),$$

stimmen die Bessermengen von $\mathbf{Y}$ bezüglich der beiden R-Präferenzordnungen überein,

$$W_{+\mathrm{R}}{}^*(\mathbf{Y}) = W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}),$$

und die beiden Differenzmengen der Bessermengen sind leer,

$$P_{\mathrm{R-R}^*}(\mathbf{Y}) = P_{\mathrm{R}^*-\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) = \emptyset, \quad \mathrm{symdiff}_{\mathrm{R,R}^*}(\mathbf{Y}) = \emptyset.$$

Falls die Beurteilungspunkte von $\mathbf{Y}$ nicht übereinstimmen,

$$\mathbf{W}^*(v^*(\mathbf{Y})) \neq \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})),$$

erhält man je nach der Lage von $\mathbf{Y}$ bezüglich der inhomogenen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ verschiedene Formen für die Differenzmengen $P_{\mathrm{R-R}^*}(\mathbf{Y})$ und $P_{\mathrm{R}^*-\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$.

Grafische Darstellung der Differenzmengen für die Laufzeit $n = 1$

Beispielhaft wird dazu wieder der Fall der Laufzeit $n = 1$ mit dem unvollkommenen Supplementsystem

$$L = \{\mathbf{I}, \mathbf{F}\},$$

den Kapitalmarktgeschäften

$$\mathbf{I} = (-1, q_H)^{\mathsf{T}}, \; \mathbf{F} = (1, -q_S)^{\mathsf{T}}$$

und den Marktzinsfaktoren $q_H, q_S \in \mathbb{R}$ ($q_S > q_H$, $q_S > 0$: Bedingungen für die Arbitragefreiheit und ein unvollkommenes Supplementsystem) noch näher geometrisch beschrieben. In diesem Fall ist der lineare Kegel $K_{+\mathrm{R}}$ der Bessermengen gegeben durch

$$K_{+\mathrm{R}} = -\,C_{M^1} + \mathbb{R}^2_{+0} = I^{+0} \cap F^{+0}$$

mit den homogenen Halbebenen

$I^{+0} \quad = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{P}_H^\mathsf{T}\mathbf{Z} \geq 0\} \qquad (\mathbf{P}_H = (q_H,1)^\mathsf{T}),$

$F^{+0} \quad = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{P}_S^\mathsf{T}\mathbf{Z} \geq 0\} \qquad (\mathbf{P}_S = (q_S,1)^\mathsf{T}).$

Falls $\mathbf{B} + \mathbf{Y}$ rechts von den beiden inhomogenen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ liegt, sind die Supplemente $\mathbf{S}'(\mathbf{Y})$ und $\mathbf{S}'^*(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ beide Investitionen. Es wird jetzt o. B. d. A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) der Fall betrachtet, dass $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ näher bei $\mathbf{Y}$ gelegen ist als $\mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{Y}))$. Ansonsten vertauscht man die Rollen von $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$. Für die Streifen $P_{\mathrm{R-R^*}}(\mathbf{Y})$ und $P_{\mathrm{R^*-R}}(\mathbf{Y})$ des unterschiedlichen Vergleichs durch die beiden Präferenzordnungen erhält man mit dem Differenzvektor

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{Y}) := \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{Y})) = \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) - \mathbf{S}'^*(\mathbf{Y})$$

die Darstellungen

$$P_{\mathrm{R^*-R}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} = \mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{Y}))-\mathbf{B}+\theta\cdot\mathbf{\Omega}(\mathbf{Y})-\kappa\mathbf{F},\ 0 \leq \theta < 1,\ \kappa \geq 0\},$$

$$P_{\mathrm{R-R^*}}(\mathbf{Y}) = \emptyset.$$

Falls $\mathbf{B} + \mathbf{Y}$ links von den beiden inhomogenen Beurteilungskurven und o. B. d. A. näher bei $\mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{Y}))$ als bei $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ liegt, sind die Supplemente $\mathbf{S}'(\mathbf{Y})$ und $\mathbf{S}'^*(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ beide Finanzierungen. Mit dem Differenzvektor

$$\mathbf{\Omega}^*(\mathbf{Y}) := \mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) = \mathbf{S}'^*(\mathbf{Y}) - \mathbf{S}'(\mathbf{Y})$$

erhält man für die Streifen mit unterschiedlichem Vergleichsergebnis der Präferenzordnungen die Darstellung

$$P_{\mathrm{R^*-R}}(\mathbf{Y}) = \emptyset,$$

$$P_{\mathrm{R-R^*}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + \theta\cdot\mathbf{\Omega}^*(\mathbf{Y}) - \alpha\mathbf{I},\ 0 \leq \theta < 1,\ \alpha \geq 0\}.$$

Falls $\mathbf{B} + \mathbf{Y}$ zwischen den beiden Beurteilungskurven liegt und o. B. d. A. links der Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ und rechts der Kurve $\mathbf{W}^*(\mu)$, ist $\mathbf{S}'(\mathbf{Y})$ eine Finanzierung und $\mathbf{S}'^*(\mathbf{Y})$ eine Investition. Für die Streifen unterschiedlichen Vergleichs hat man die Darstellung

$$P_{\mathrm{R^*-R}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \theta\cdot\mathbf{S}'^*(\mathbf{Y}) - \kappa\mathbf{F},\ 0 \leq \theta < 1,\ \kappa \geq 0\},$$

$$P_{\mathrm{R-R^*}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \theta\cdot\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) - \alpha\mathbf{I},\ 0 \leq \theta < 1,\ \alpha \geq 0\}.$$

Die Differenzmengen für die verschiedenen Fälle sind in Abbildung 5.11 dargestellt.

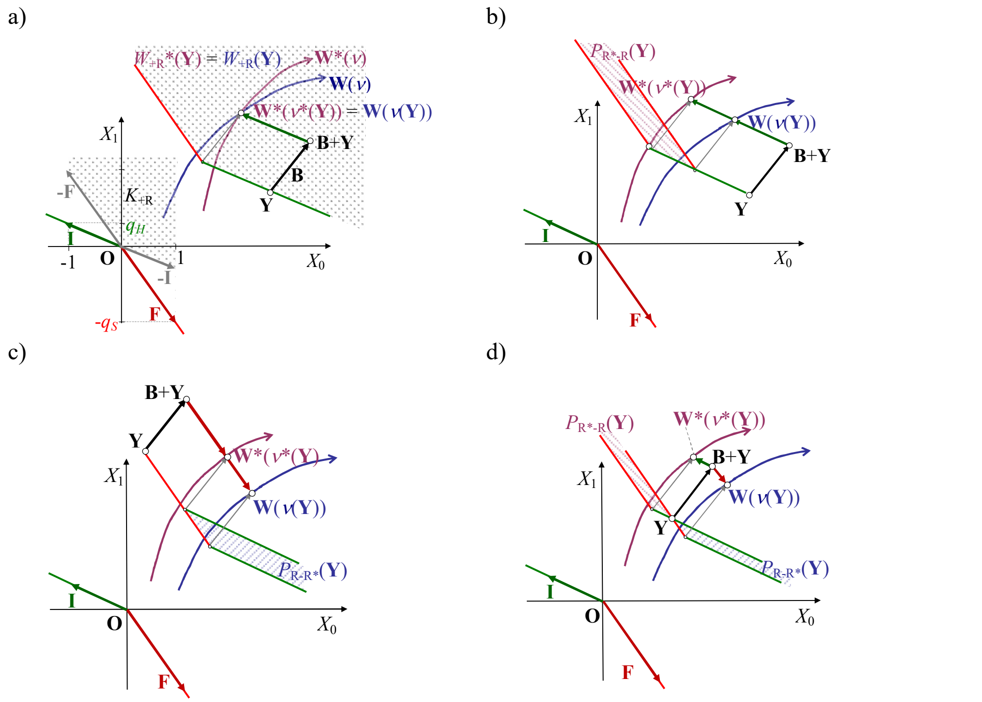


Abb. 5.11 Der Fall $\mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ mit der gleichen Bessermenge $W_{+R}(\mathbf{Y}) = W_{+R}^*(\mathbf{Y})$ für die verschiedenen R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RW}$ und $\trianglerighteq_{RW^*}$; der Fall $\mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{Y})) \neq \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ mit den drei Fällen für die Differenzmengen $P_{R-R^*}(\mathbf{Y})$ und $P_{R^*-R}(\mathbf{Y})$ in Abhängigkeit von der Lage von $\mathbf{Y}$ zu den Beurteilungskurven

5.4.3 Vergleich der D-Präferenzordnung mit der R-Präferenzordnung bei gleicher Beurteilungskurve

Zu einem fest vorgegebenen unvollkommenen Supplementsystem L und zu einer fest gewählten Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$, für welche die **Monotonie der D-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{DW}$ **und der R-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{RW}$ gesichert sein soll, wird nun die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ mit der zugehörigen R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RW}$ durch die Unterschiede bei den Bessermengen

$$W_{+D}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+D} \quad \text{und}$$
$$W_{+R}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+R}$$

verglichen. **Unterschiedliche Vergleichsergebnisse** der beiden Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und $\trianglerighteq_{RW}$ für $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ ergeben sich genau für die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ in der symmetrischen Differenz $\text{symdiff}_{D,R}(\mathbf{Y})$ der Bessermengen $W_{+D}(\mathbf{Y})$ und $W_{+R}(\mathbf{Y})$, also in der Vereinigung der beiden Differenzmengen

$$P_{D-R}(\mathbf{Y}) := W_{+D}(\mathbf{Y}) \setminus W_{+R}(\mathbf{Y})$$
$$= (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+D}) \setminus (\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+R}),$$
$$P_{R-D}(\mathbf{Y}) := W_{+R}(\mathbf{Y}) \setminus W_{+D}(\mathbf{Y})$$

$$= (\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} + K_{+\mathrm{R}}) \setminus (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}).$$

Zur Vereinfachung der Beschreibung der Differenzmengen der Bessermengen wird nachfolgend nur der Spezialfall mit einem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ betrachtet.

Für diesen **Spezialfall**

$$\mathbf{B} = \mathbf{O}$$

wird nun gezeigt, dass für jedes $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ der R-Beurteilungspunkt $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y}))$ auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ vor dem D-Beurteilungspunkt $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ liegt, also für die R- und D-Beurteilungspunkte bzw. R- und D-Beurteilungsparameter die folgende Ungleichung gilt:

(UBP) $\quad \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) \leq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ bzw. $v(\mathbf{Y}) \leq \mu(\mathbf{Y}) \;\; \forall\, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Weiter wird gezeigt, dass die beiden Beurteilungspunkte von $\mathbf{Y}$ genau dann übereinstimmen, wenn $\mathbf{Y}$ in einem der längs der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ aufgereihten affinen Doppelkegel liegt, deren linearer Doppelkegel jeweils der Linienkegel R_{M^n} der zulässigen Supplemente ist:

(GBP) $\quad \mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Y} \in \mathbf{W}(J) + R_{M^n}$,

(SBP) $\quad \mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Y} \notin \mathbf{W}(J) + R_{M^n}$.

Insbesondere gilt im Spezialfall der Laufzeit $n = 1$ und eines unvollkommenen Supplementsystems L ($L \neq L_V$), bei dem nach Abschnitt 5.5.4 der Linienkegel $R_{M^1} = O$ ist, die Beziehung

$$\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) = \mathbf{O} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Y} \in \mathbf{W}(J).$$

Schließlich wird noch gezeigt, dass für einen Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Eigenschaft (GBP) $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ die folgende Inklusion für dessen R- und D-Bessermenge gilt:

(IBM) $\quad$ (GBP) $\Rightarrow W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \subseteq W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$.

Demzufolge ist für ein derartiges $\mathbf{Y}$ die Differenzmenge $P_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{Y}) = W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \setminus W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ leer:

$$P_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{Y}) = \emptyset.$$

Dieses Ergebnis wird unten noch beim Vergleich der D-Vorteilhaftigkeit mit der R-Vorteilhaftigkeit verwendet, indem man den festen Vergleichspunkt $\mathbf{Y} = \mathbf{U}$ zweckmäßigerweise auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ wählt und somit nur noch eine nichtleere Differenzmenge, nämlich $P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{Y})$, vorliegen hat. Neben den Zahlungsströmen $\mathbf{X} \in W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}) \cap W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$, für welche der D-Vergleich mit $\mathbf{Y}$ dasselbe Ergebnis „mindestens so vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$“ liefert wie der R-Vergleich, tritt dann nur der nichtleere Bereich $P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{Y})$ auf, in dem die R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ eine strengere Bedingung als die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ darstellt. Es gibt keine Zahlungsströme $\mathbf{X}$ im Bereich $P_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{Y})$, in dem die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ eine strengere Bedingung als die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ liefert. Die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ kann dann als strenger als die Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ bezeichnet werden.

Beweis: 1) **Beweis der Ungleichung** (UBP):

Aus der Duplizierung

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}) \in C_{M^n},$$

und der Replizierung (mit $\mathbf{B} = \mathbf{O}$)

$$\mathbf{Y} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) \in C_{M^n},$$

von $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ folgt die Beziehung

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) \in C_{M^n} + C_{M^n} \subseteq K + K \subseteq K,$$

wegen der Arbitragefreiheit (AF) von K ($K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) dann

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \underset{\cdot}{\not>} \mathbf{O}$$

und wegen der Monotonie der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ schließlich

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \leq \mathbf{O}.$$

2) **Beweis der Charakterisierung der Übereinstimmung von R- und D-Beurteilungspunkt**:

„⇒”: Falls $\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ ist, folgt $\mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}) = \mathbf{O}$,

$$\mathbf{S}(\mathbf{Y}) = -\,\mathbf{S}'(\mathbf{Y}) \in C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) = R_{M^n}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S}(\mathbf{Y})\\ &\in \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + R_{M^n}\\ &\subseteq \mathbf{W}(J) + R_{M^n}\ .\end{aligned}$$

„⇐": Ist umgekehrt $\mathbf{Y} = \mathbf{Q} + \mathbf{S}$ mit $\mathbf{Q} \in \mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{S} \in R_{M^n} \subseteq C_{M^n}$, so erhält man mit $\mathbf{S}' := -\,\mathbf{S} \in R_{M^n} \subseteq C_{M^n}$ auf Grund der Eindeutigkeit der Duplizierung

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q} + \mathbf{S}$$

und der Eindeutigkeit der Replizierung

$$\mathbf{Y} + \mathbf{S}' = \mathbf{Q}$$

die Übereinstimmung von R- und D-Beurteilungspunkt:

$$\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) = \mathbf{Q} = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})).$$

3) **Beweis der Inklusion für die R- und D-Bessermenge bei Gleichheit der Beurteilungspunkte von $\mathbf{Y}$**: Falls (GBP) $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ für $\mathbf{Y}$ gilt, folgt für jedes $\mathbf{X} \in W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ mit der stets für $\mathbf{X}$ gültigen Ungleichung (UBP) $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \geq \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X}))$ auch die Ungleichung

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \geq \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$$

und die Inzidenz $\mathbf{X} \in W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$. Somit gilt für die Bessermengen die Inklusion

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) \subseteq W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y}).$$

□

Beschreibung der Differenzmengen $P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{Y})$ und $P_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{Y})$ für eine beliebige Laufzeit $n \in \mathbb{N}$

Mit Verwendung des Verbindungsvektors

$$\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$$

der Beurteilungspunkte $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ und $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ vereinfachen sich die Differenzmengen der Bessermengen hierbei zu

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{Y}) &= (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}) \setminus (\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{R}})\\ &= (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}}) \setminus (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) + K_{+\mathrm{R}})\\ &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + (K_{+\mathrm{D}} \setminus (-\,\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) + K_{+\mathrm{R}}))\\ &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}))\ \text{ mit}\\ Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y})) &:= K_{+\mathrm{D}} \setminus (-\,\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) + K_{+\mathrm{R}}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{Y}) &= (\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{R}}) \setminus (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}})\\ &= (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - \mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) + K_{+\mathrm{R}}) \setminus (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\mathrm{D}})\\ &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + ((-\,\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) + K_{+\mathrm{R}}) \setminus K_{+\mathrm{D}})\\ &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}))\ \text{ mit}\\ Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y})) &:= (-\,\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) + K_{+\mathrm{R}}) \setminus K_{+\mathrm{D}}.\end{aligned}$$

Für die Beschreibung der Differenzmengen $P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{Y})$ und $P_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{Y})$ genügt es jeweils den zweiten Summanden in der Minkowski-Summe näher zu beschreiben. Für ein fest gedachtes $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{\Theta} := \mathbf{\Theta}(\mathbf{Y})$ werden jetzt für die einfacheren Differenzmengen $Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{\Theta})$ und $Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{\Theta})$ die folgenden Parameterdarstellungen hergeleitet:

Im Fall $\mathbf{\Theta} = \mathbf{O}$ ($\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$) erhält man mit einer beliebigen Richtung $\mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ die Parameterdarstellungen

$$Q_{\text{D–R}}(\mathbf{O}) = K_{+\text{D}} \setminus K_{+\text{R}}$$
$$= \{\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \rho\mathbf{A} : \mathbf{S} \in C_{M^n},\ 0 \leq \rho < -\nu(\mathbf{S})\} \neq \emptyset,$$
$$Q_{\text{R–D}}(\mathbf{O}) = K_{+\text{R}} \setminus K_{+\text{D}} = \emptyset.$$

Es wird unten auch noch bewiesen, dass die Differenzmenge $Q_{\text{D–R}}(\mathbf{O}) = K_{+\text{D}} \setminus K_{+\text{R}}$ nach Hinzunahme des linearen Kegels $-C_{M^n}$ ein linearer Doppelkegel und die Differenzmenge $P_{\text{D–R}}(\mathbf{Y})$ nach Hinzunahme des affinen Kegels $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) - C_{M^n}$ ein affiner Doppelkegel ist. Wegen

$$P_{\text{R–D}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + Q_{\text{R–D}}(\mathbf{O}) = \emptyset$$

treten hier unterschiedliche Vergleichsergebnisse für $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ genau in der Differenzmenge

$$P_{\text{D–R}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + Q_{\text{D–R}}(\mathbf{O}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + K_{+\text{D}} \setminus K_{+\text{R}} \neq \emptyset$$

auf. Da auf $P_{\text{D–R}}(\mathbf{Y})$ die Relationen

$$\mathbf{X} \trianglerighteq_{\text{D}W} \mathbf{Y} \quad \text{und} \quad \mathbf{X} \triangleleft_{\text{R}W} \mathbf{Y}$$

gelten, liefert insgesamt beim Vergleich mit $\mathbf{Y}$ die **R-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{\text{R}W}$ **eine strengere Bedingung als die D-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{\text{D}W}$. Auf Grund dieser vereinfachenden Beziehung zwischen D- und R-Präferenzordnung wird unten beim Vergleich von D- und R-Vorteilhaftigkeit der feste Vergleichspunkts $\mathbf{Y} = \mathbf{U}$ speziell auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$, also mit der Eigenschaft $\mathbf{\Theta}(\mathbf{U}) = \mathbf{O}$, gewählt.

Im Fall $\mathbf{\Theta} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ ($\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$) erhält man mit der speziellen Richtung $\mathbf{A} = \mathbf{\Theta} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ die Parameterdarstellungen

$$Q_{\text{D–R}}(\mathbf{\Theta}) = K_{+\text{D}} \setminus (-\mathbf{\Theta} + K_{+\text{R}})$$
$$= \{\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \rho\mathbf{\Theta} : \mathbf{S} \in C_{M^n},\ 0 \leq \rho < -\nu(\mathbf{S})-1\} \neq \emptyset,$$
$$Q_{\text{R–D}}(\mathbf{\Theta}) = (-\mathbf{\Theta} + K_{+\text{R}}) \setminus K_{+\text{D}}$$
$$= \{\mathbf{Z} = \mathbf{R} + (\sigma-1)\mathbf{\Theta} : \mathbf{R} \in -C_{M^n},\ 0 \leq \sigma < -\mu(\mathbf{R})+1\} \neq \emptyset.$$

In diesem Fall gibt es beim Vergleich der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{Y}$ also sowohl einen nichtleeren Bereich $P_{\text{D–R}}(\mathbf{Y})$, in dem die **R-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{\text{R}W}$ **eine strengere Bedingung als die D-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{\text{D}W}$ darstellt, als auch einen nichtleeren Bereich $P_{\text{R–D}}(\mathbf{Y})$, in dem die **D-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{\text{D}W}$ **eine strengere Bedingung als die R-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{\text{R}W}$ liefert.

Beweis: 1) **Der Fall $\mathbf{\Theta} = \mathbf{O}$**:

1a) **Beweis der Parameterdarstellung der Differenzmenge** $Q_{\text{D–R}}(\mathbf{O}) = K_{+\text{D}} \setminus K_{+\text{R}}$:

Nach Abschnitt 5.2.4 lassen sich bei gesicherter Monotonie der D- und R-Präferenzordnung die linearen Kegel $K_{+\text{D}}$ und $K_{+\text{R}}$ als spezielle Bessermengen $V_{+\text{D}}(\mathbf{O})$ und $V_{+\text{R}}(\mathbf{O})$ und spezielle Minkowski-Summen darstellen. Mit der homogenen linearen Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$ ($\mathbf{U} = \mathbf{O}$, $\mathbf{A} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$) und dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ erhält man

$$K_{+\text{D}} = V_{+\text{D}}(\mathbf{O}) = C_{M^n} + \text{ray}\,\mathbf{A},$$

$$K_{+\mathrm{R}} = V_{+\mathrm{R}}(\mathbf{O}) \;\; = - \; C_{M^n} \;\; + \text{ray } \mathbf{A}.$$

Ein Zahlungsstrom $\mathbf{Z} \in K_{+\mathrm{D}}$ hat somit die Parameterdarstellung

$$\mathbf{Z} \;\; = \mathbf{Z}_\rho := \mathbf{S} + \rho\mathbf{A}$$

mit $\mathbf{S} \in C_{M^n}$, d. h. $\mathbf{S} = L_{\mathbf{E}}\boldsymbol{\lambda}$, $L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}^1_{E_1}, \ldots, \mathbf{S}^n_{E_n})$, $\mathbf{E} \in M^n$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n_{+0}$, und $\rho \geq 0$. Diese Parameterdarstellung von $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\rho$ ist wegen der Eindeutigkeit der Duplizierung gleichzeitig auch die Duplizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{Z}$ bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ und es gilt $\mathbf{S}(\mathbf{Z}_\rho) = \mathbf{S}$ und

$$\mu(\mathbf{Z}_\rho) = \rho.$$

Bevor nun auch die Replizierung von $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\rho$ bestimmt wird, wird zuerst die Replizierung eines fest fixierten Supplements $\mathbf{S} \in C_{M^n}$ zum Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ und zur Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$ betrachtet:

$$\mathbf{S} + \mathbf{S}'(\mathbf{S}) = \nu(\mathbf{S})\mathbf{A}, \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{S}) \in C_{M^n} \, .$$

Die oben bewiesene Ungleichung (UBP) für die Beurteilungspunkte ergibt hier speziell mit $\mathbf{Y} = \mathbf{S} \in C_{M^n}$ und $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{S})) = \mathbf{O}$ für die Beurteilungsparameter die Ungleichung

$$\nu(\mathbf{S}) \leq \mu(\mathbf{S}) = 0.$$

Weiter gilt die strenge Ungleichung (SBP)

$$\mathbf{V}(\nu(\mathbf{S})) \underset{\cdot}{<} \mathbf{V}(\mu(\mathbf{S})) = \mathbf{O} \quad \text{bzw.} \;\; \nu(\mathbf{S}) < \mu(\mathbf{S}) = 0$$

genau dann, wenn $\mathbf{S} \notin \mathbf{V}(\mu(\mathbf{S})) + R_{M^n} = R_{M^n}$. Es gilt also

$$C_{M^n} \setminus R_{M^n} = \{\mathbf{S} \in C_{M^n} : \nu(\mathbf{S}) < 0\}.$$

ist. Da ein unvollkommenes Supplementsystem L vorausgesetzt ist, ist nach Satz 5.2, 2c) $R_{M^n} \neq C_{M^n}$ und damit $C_{M^n} \setminus R_{M^n} \neq \emptyset$. Daher treten tatsächlich auch Supplemente $\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$, also $\mathbf{S} \in C_{M^n}$ mit $\nu(\mathbf{S}) < 0$ auf. Mit dieser Aussage wird nachfolgend begründet, dass die Differenzmenge $Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{O})$ nicht leer ist.

Die Replizierung von $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\rho = \mathbf{S} + \rho\mathbf{A}$ erhält man nun wegen der Linearität der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ aus der Replizierung von $\mathbf{S}$ zu

$$\mathbf{Z}_\rho + \mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho) = \nu(\mathbf{Z}_\rho)\mathbf{A}, \;\; \mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho) \in C_{M^n} \, ,$$

mit dem Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho) = \mathbf{S}'(\mathbf{S})$ und dem Beurteilungsparameter

$$\nu(\mathbf{Z}_\rho) = \nu(\mathbf{S}) + \rho.$$

Daher gilt

$$\mathbf{Z}_\rho \in K_{+\mathrm{R}} = V_{+\mathrm{R}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \nu(\mathbf{X}) \geq 0\}$$

genau dann, wenn

$$\nu(\mathbf{Z}_\rho) = \nu(\mathbf{S}) + \rho \geq 0 \text{ bzw. } \rho \geq - \nu(\mathbf{S})$$

ist. Insgesamt erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\rho = \mathbf{S} + \rho\mathbf{A} \in K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}} &\Leftrightarrow \mu(\mathbf{Z}_\rho) = \rho \geq 0 \wedge \nu(\mathbf{Z}_\rho) = \nu(\mathbf{S}) + \rho < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \rho < - \nu(\mathbf{S}) \end{aligned}$$

und für die Differenzmenge $Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{O}) = K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}$ die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{O}) &= K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}} \\ &= \{\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \rho\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{S} \in C_{M^n}, \, 0 \leq \rho < - \nu(\mathbf{S})\} \qquad (\nu(\mathbf{S}) < 0) \\ &= \{\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \rho\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}, \, 0 \leq \rho < - \nu(\mathbf{S})\}. \end{aligned}$$

Da Supplemente $\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n} \neq \emptyset$ (mit $\nu(\mathbf{S}) < 0$) existieren, ist die Differenzmenge $K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}$ nicht leer.

1b) **Beweis der Kegelstruktur von** $(C_{M^n} \setminus R_{M^n}) \cup O$:

Da C_{M^n} und R_{M^n} lineare Kegel sind, ist mit einem $\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ auch $\lambda\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ für jedes $\lambda > 0$: Aus der Annahme $\lambda\mathbf{S} \in R_{M^n}$ und $\lambda > 0$ würde nämlich auch $\mathbf{S} = (1/\lambda)\lambda\mathbf{S} \in R_{M^n}$ folgen, im Widerspruch zu $\mathbf{S} \notin R_{M^n}$. Daher ist die Menge

$$(C_{M^n} \setminus R_{M^n}) \cup O$$

ein linearer Kegel. Die Mengendifferenz $C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ selbst ist ohne die Hinzunahme des Nullpunkts **O** ein Kegel gemäß der Definition von Rockafellar (1970), S. 13, der nur bezüglich der *positiven* (statt der nichtnegativen) Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, hier also ein linearer Kegel abzüglich des Nullpunkts.

Aus dieser Kegelstruktur wird jetzt noch eine Aussage hergeleitet, die unten im Teil 2) des Beweises verwendet wird, um zu begründen, dass die Differenzmenge $Q_{D-R}(\mathbf{\Theta})$ nicht leer ist. Zu jedem $\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ besitzt jedes positive Vielfache $\mathbf{T} = \lambda\mathbf{S}$ ($\lambda > 0$) von **S** auf Grund der Linearität der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$ und der Voraussetzung $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ die Replizierung

$$\mathbf{T} + \mathbf{S}'(\mathbf{T}) = v(\mathbf{T})\mathbf{A}, \ \ \mathbf{S}'(\mathbf{T}) \in C_{M^n},$$

mit dem Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{T}) = \lambda\mathbf{S}'(\mathbf{S})$ und dem Beurteilungsparameter $v(\mathbf{T}) = \lambda v(\mathbf{S})$. Da es Supplemente $\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n} \neq \emptyset$ gibt und diese **S** einen negativen Beurteilungsparameter $v(\mathbf{S})$ aufweisen, gibt es auch Supplemente $\mathbf{T} = \lambda\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ ($\lambda > 0$), deren Beurteilungsparameter $v(\mathbf{T}) = \lambda v(\mathbf{S})$ negativ und betragsmäßig beliebig groß bzw. beliebig klein ist.

1c) **Beweis der Kegelstruktur von** $(K_{+D} \setminus K_{+R}) \cup O$:
Dazu wird nun gezeigt, dass auch die Differenzmenge $K_{+D} \setminus K_{+R}$ abgeschlossen bezüglich der positiven Skalarmultiplikation ist. Für $\mathbf{Z} \in K_{+D} \setminus K_{+R}$, also nach Teil 1a)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\rho = \mathbf{S} + \rho\mathbf{A} \text{ mit } \mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}, \ 0 \le \rho < -v(\mathbf{S}),$$

und beliebigem $\lambda > 0$ erhält man für $\lambda\mathbf{Z} = \lambda\mathbf{Z}_\rho$ die Duplizierung

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{Z}_\rho &= \lambda\mathbf{S} + \lambda\rho\mathbf{A} \\ &= \mathbf{S}(\lambda\mathbf{Z}_\rho) + \mu(\lambda\mathbf{Z}_\rho)\mathbf{A} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{S}(\lambda\mathbf{Z}_\rho) = \lambda\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ (nach Teil 1b), $\mu(\lambda\mathbf{Z}_\rho) = \lambda\rho \ge 0$ und die Replizierung

$$\begin{aligned} v(\lambda\mathbf{Z}_\rho)\mathbf{A} = \lambda v(\mathbf{Z}_\rho)\mathbf{A} &= \lambda\mathbf{Z}_\rho + \lambda\mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho) \\ &= \lambda\mathbf{Z}_\rho + \mathbf{S}'(\lambda\mathbf{Z}_\rho) \end{aligned}$$

mit $\mathbf{S}'(\lambda\mathbf{Z}_\rho) = \lambda\mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho) \in C_{M^n}$, $v(\lambda\mathbf{Z}_\rho) = \lambda v(\mathbf{Z}_\rho) = \lambda\cdot(v(\mathbf{S}) + \rho) < 0$ (nach Teil 1a).

Wegen $\mu(\lambda\mathbf{Z}_\rho) \ge 0$ und $v(\lambda\mathbf{Z}_\rho) < 0$ folgt

$$\lambda\mathbf{Z}_\rho \in V_{+D}(\mathbf{O}) \setminus V_{+R}(\mathbf{O}) = K_{+D} \setminus K_{+R}.$$

Die um den Nullpunkt **O** ergänzte Menge $(K_{+D} \setminus K_{+R}) \cup O$ ist dann abgeschlossen bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation, also ein linearer Kegel.

1d) **Beweis der Doppelkegelstruktur von** $(K_{+D} \setminus K_{+R}) \cup (-C_{M^n})$:

Die Menge $(K_{+D} \setminus K_{+R}) \cup (-C_{M^n})$ ist als Vereinigung der beiden linearen Kegel $(K_{+D} \setminus K_{+R})$ und $-C_{M^n}$ auch selbst ein linearer Kegel. Zum Nachweis der Doppelkegelstruktur ist noch zu zeigen, dass die Menge mit **Z** auch **- Z** enthält.
Hierzu wird als Erstes gezeigt, dass mit $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\rho = \mathbf{S} + \rho\mathbf{A} \in K_{+D} \setminus K_{+R}$ auch $\mathbf{Z}' = -\mathbf{Z} \in (K_{+D} \setminus K_{+R}) \cup (-C_{M^n})$ gilt. Für $\rho = 0$ ist $\mathbf{Z} = \mathbf{S} \in C_{M^n}$ und $\mathbf{Z}' = -\mathbf{S} \in -C_{M^n}$. Für $\rho > 0$ erhält man aus der Replizierung von $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\rho$,

$$\mathbf{Z}_\rho + \mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho) = v(\mathbf{Z}_\rho)\mathbf{A}, \ \ \mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho) \in C_{M^n},$$

die Duplizierung von $\mathbf{Z}'$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}' = -\mathbf{Z}_\rho &= \mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho) - v(\mathbf{Z}_\rho)\mathbf{A} \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{Z}') + \mu(\mathbf{Z}')\mathbf{A} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{S}(\mathbf{Z}') = \mathbf{S}'(\mathbf{Z}_\rho)$, $\mu(\mathbf{Z}') = -\nu(\mathbf{Z}_\rho) = -\nu(\mathbf{S}) - \rho > 0$ (nach Teil a), und aus der Duplizierung von $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_\rho = \mathbf{S} + \rho\mathbf{A}$ die Replizierung von $\mathbf{Z}'$,

$$\nu(\mathbf{Z}')\mathbf{A} = -\rho\mathbf{A} = -\mathbf{Z} + \mathbf{S} = \mathbf{Z}' + \mathbf{S}'(\mathbf{Z}')$$

mit $\mathbf{S}'(\mathbf{Z}') = \mathbf{S}$, $\nu(\mathbf{Z}') = -\rho < 0$. Aus $\mu(\mathbf{Z}') \geq 0$ und $\nu(\mathbf{Z}') < 0$ folgt $\mathbf{Z}' \in V_{+\mathrm{D}}(\mathbf{O}) \setminus V_{+\mathrm{R}}(\mathbf{O}) = K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}$.
Als Zweites wird noch für $\mathbf{Z} = -\mathbf{S} \in -C_{M^n}$ gezeigt, dass $\mathbf{Z}' = -\mathbf{Z} = \mathbf{S} \in (K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}) \cup (-C_{M^n})$ gilt.
Dazu werden zwei Fälle unterschieden:
i) Falls $\mathbf{S} \in R_{M^n} = C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) \subseteq -C_{M^n}$ ist, gilt auch $\mathbf{Z}' = \mathbf{S} \in R_{M^n} \subseteq (K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}) \cup (-C_{M^n})$.
ii) Falls $\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ ist, gilt nach Teil a) $\nu(\mathbf{S}) < 0$ und nach der in Teil a) des Beweises angegebenen Parameterdarstellung von $K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}$ mit $\rho = 0$ die Inzidenz $\mathbf{Z}' = \mathbf{S} \in K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}} \subseteq (K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}) \cup (-C_{M^n})$.
Damit ist nachgewiesen, dass die Menge $K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}$ nach Hinzunahme des linearen Kegels $-C_{M^n}$ ein linearer Doppelkegel ist.

1e) **Beweis für** $Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{O}) = \emptyset$:
Jeder Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in K_{+\mathrm{R}} = -C_{M^n} + \operatorname{ray} \mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \mathrel{\dot{>}} \mathbf{O}$) hat die Parameterdarstellung

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\sigma := \mathbf{R} + \sigma\mathbf{A}$$

mit $\mathbf{R} = -\mathbf{S} \in -C_{M^n}$ und $\sigma \geq 0$. Diese Parameterdarstellung von $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\sigma$ ist wegen der Eindeutigkeit der Replizierung gleichzeitig auch die Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{Y}_\sigma$ mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Y}_\sigma + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}_\sigma) = \nu(\mathbf{Y}_\sigma)\mathbf{A}$$

mit dem R-Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}_\sigma) = \mathbf{S} = -\mathbf{R} \in C_{M^n}$ und dem R-Beurteilungsparameter

$$\nu(\mathbf{Y}_\sigma) = \sigma.$$

Speziell für $\mathbf{Y} = \mathbf{R} \in -C_{M^n}$ erhält man $\nu(\mathbf{R}) = 0$.
Zur Bestimmung der Duplizierung von $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\sigma = \mathbf{R} + \sigma\mathbf{A}$ wird zuerst die Duplizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{R} = -\mathbf{S} \in -C_{M^n}$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{A}$ notiert:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}) + \mu(\mathbf{R})\mathbf{A},\ \ \mathbf{S}(\mathbf{R}) \in C_{M^n}.$$

Die Duplizierung von $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\sigma = \mathbf{R} + \sigma\mathbf{A} \in K_{+\mathrm{R}}$ erhält man dann wegen der Linearität der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ aus der Duplizierung von $\mathbf{R}$ zu

$$\mathbf{Y}_\sigma = \mathbf{S}(\mathbf{Y}_\sigma) + \mu(\mathbf{Y}_\sigma)\mathbf{A},$$

mit dem D-Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{Y}_\sigma) = \mathbf{S}(\mathbf{R})$ und dem D-Beurteilungsparameter

$$\mu(\mathbf{Y}_\sigma) = \mu(\mathbf{R}) + \sigma.$$

Daher gilt für $\mathbf{Y}_\sigma \in K_{+\mathrm{R}}$ die Inzidenz

$$\mathbf{Y}_\sigma \in K_{+\mathrm{D}} = V_{+\mathrm{D}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mu(\mathbf{X}) \geq 0\}$$

genau dann, wenn

$$\mu(\mathbf{Y}_\sigma) = \mu(\mathbf{R}) + \sigma \geq 0 \text{ bzw. } \sigma \geq -\mu(\mathbf{R})$$

ist. Insgesamt erhält man die folgende Beschreibung der Differenzmenge $K_{+\mathrm{R}} \setminus K_{+\mathrm{D}}$ durch die R- und D-Beurteilungsparameter $\nu(\mathbf{Y}_\sigma)$ und $\mu(\mathbf{Y}_\sigma)$ seiner Elemente $\mathbf{Y}_\sigma$:

$$\mathbf{Y}_\sigma = \mathbf{R} + \sigma\mathbf{A} \in K_{+\mathrm{R}} \setminus K_{+\mathrm{D}} \Leftrightarrow \nu(\mathbf{Y}_\sigma) = \sigma \geq 0\ \wedge\ \mu(\mathbf{Y}_\sigma) = \mu(\mathbf{R}) + \sigma < 0.$$

Die Differenzmenge $Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{O}) = K_{+\mathrm{R}} \setminus K_{+\mathrm{D}}$ ist demnach leer, wenn

$$\mu(\mathbf{Y}_\sigma) = \mu(\mathbf{R}) + \sigma \geq 0 \text{ für jedes } \mathbf{Y}_\sigma \in K_{+\mathrm{R}}$$

gilt. Dies wiederum ist wegen $\sigma \geq 0$ erfüllt, da nachfolgend bewiesen wird, dass

$$\mu(\mathbf{R}) \geq 0 \text{ für jedes } \mathbf{R} \in -C_{M^n}.$$

Die Aussage $K_{+\mathrm{R}} \setminus K_{+\mathrm{D}} = \emptyset$ erhält man auch aus der in Abschnitt 5.2.4 bewiesenen Inklusion $K_{+\mathrm{R}} \subseteq K_{+\mathrm{D}}$ für die linearen Kegel der Bessermengen. Es wurde hier aber der Beweis mittels der Formeln für die R- und D-Beurteilungsparameter $\nu(\mathbf{Y}_\sigma)$ und $\mu(\mathbf{Y}_\sigma)$ geführt, da diese Formeln auch im nachfolgenden Teil 2b) des Beweises verwendet werden.

Aus der Duplizierungsgleichung von $\mathbf{R} \in -C_{M^n} \subseteq -K$ wird jetzt die eben bereits verwendete Ungleichung $\mu(\mathbf{R}) \geq 0$ und noch eine weitere Aussage hergeleitet, die unten im Teil 2) des Beweises verwendet wird, um zu begründen, dass dort die Differenzmenge $Q_{\text{R–D}}(\mathbf{\Theta})$ nicht leer ist. Etwas allgemeiner erhält man aus der Duplizierungsgleichung eines $\mathbf{R} = -\mathbf{S} \in -K$ die Inzidenz

$$-\mu(\mathbf{R})\mathbf{A} = \mathbf{S}(\mathbf{R}) + \mathbf{S} \in C_{M^n} + K \subseteq K \qquad (\mathbf{S}(\mathbf{R}) \in C_{M^n})$$

und wegen der Arbitragefreiheit (AF) von K ($K \cap \mathbb{R}^n_{+0} = O$) die Ungleichung $-\mu(\mathbf{R})\mathbf{A} \not\gtrdot \mathbf{O}$ bzw.

$$\mu(\mathbf{R}) \geq 0.$$

Weiter ergeben sich für jedes $\mathbf{R} \in -K$ aus der Duplizierungsgleichung

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}) + \mu(\mathbf{R})\mathbf{A}, \;\; \mathbf{S}(\mathbf{R}) \in C_{M^n},$$

die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{R}) = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{R} \in (-K) \cap C_{M^n} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{R}) > 0 &\Leftrightarrow \mu(\mathbf{R}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{R} \neq \mathbf{S}(\mathbf{R}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{R} \notin (-K) \cap C_{M^n} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{R} \in (-K) \setminus ((-K) \cap C_{M^n}) = (-K) \setminus C_{M^n}. \end{aligned}$$

Speziell für die $\mathbf{R} \in -C_{M^n}$ $(\subseteq -K)$ erhält man

$$\mu(\mathbf{R}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}) \in (-C_{M^n}) \cap C_{M^n} = R_{M^n} \quad \text{und}$$

$$\mu(\mathbf{R}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{R} \in (-C_{M^n}) \setminus R_{M^n}.$$

Da ein unvollkommenes Supplementsystem L vorausgesetzt ist, ist nach Satz 5.2 $-R_{M^n} = R_{M^n} \neq C_{M^n}$ bzw. $R_{M^n} \neq -C_{M^n}$ und damit

$$(-C_{M^n}) \setminus R_{M^n} \neq \emptyset.$$

Daher treten tatsächlich auch Zahlungsströme $\mathbf{R} \in (-C_{M^n}) \setminus R_{M^n}$ auf mit $\mu(\mathbf{R}) > 0$.

Da $(-C_{M^n}) \setminus R_{M^n} = -(C_{M^n} \setminus R_{M^n})$ ebenso wie $C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ ein linearer Kegel abzüglich des Nullpunkts ist, gibt es außerdem Zahlungsströme $\mathbf{T} = \lambda\mathbf{R} \in (-C_{M^n}) \setminus R_{M^n}$ $(\lambda > 0)$, deren D-Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{T}) = \lambda\mu(\mathbf{R})$ positiv und beliebig groß bzw. beliebig klein ist.

2) **Der Fall $\mathbf{\Theta} \gtrdot \mathbf{O}$**: Für die Herleitung der Parameterdarstellungen im Fall $\mathbf{\Theta} \gtrdot \mathbf{O}$ nimmt man jetzt in den Summendarstellungen von $K_{+\text{D}}$ und $K_{+\text{R}}$ den speziellen nichtnegativen Strahl ray $\mathbf{A}$ mit der Richtung $\mathbf{A} = \mathbf{\Theta} \gtrdot \mathbf{O}$.

2a) **Beweis der Parameterdarstellung der Differenzmenge** $Q_{\text{D–R}}(\mathbf{\Theta}) = K_{+\text{D}} \setminus (-\mathbf{\Theta} + K_{+\text{R}})$:
Für jedes

$$\mathbf{Z}_\rho = \mathbf{S} + \rho\mathbf{\Theta} \in K_{+\text{D}} = C_{M^n} + \text{ray } \mathbf{\Theta},$$

$(\mathbf{S} \in C_{M^n}, \rho \geq 0)$ gilt die weitere Inzidenz

$$\mathbf{Z}_\rho = \mathbf{S} + \rho\mathbf{\Theta} \in -\mathbf{\Theta} + K_{+\text{R}}$$

genau dann, wenn

$$\mathbf{Z}_\rho' := \mathbf{Z}_\rho + \mathbf{\Theta} = \mathbf{S} + (\rho+1)\mathbf{\Theta} = \mathbf{Z}_{\rho+1} \in K_{+\text{R}} = V_{+\text{R}}(\mathbf{O})$$

gilt. Daher gilt $\mathbf{Z}_\rho \in -\mathbf{\Theta} + K_{+\text{R}}$ genau dann, wenn der zur Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{\Theta}$ gehörige R-Beurteilungsparameter

$$\nu(\mathbf{Z}_\rho') = \nu(\mathbf{Z}_{\rho+1}) = \nu(\mathbf{S}) + \rho + 1 \geq 0$$

($\nu(\mathbf{S})$ von Teil 1a) mit $\mathbf{A} = \mathbf{\Theta}$) ist bzw. wenn

$$\rho \geq -\nu(\mathbf{S}) - 1$$

ist. Insgesamt erhält man die Beziehung

$$\mathbf{Z}_\rho \in K_{+\mathrm{D}} \setminus (-\,\mathbf{\Theta} + K_{+\mathrm{R}}) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq \rho < -\,\nu(\mathbf{S}) - 1$$

und für die Differenzmenge $Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{\Theta}) = K_{+\mathrm{D}} \setminus (-\,\mathbf{\Theta} + K_{+\mathrm{R}})$ die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{\Theta}) &= K_{+\mathrm{D}} \setminus (-\,\mathbf{\Theta} + K_{+\mathrm{R}}) \\ &= \{\mathbf{Z} = \mathbf{S} + \rho\mathbf{\Theta} : \mathbf{S} \in C_{M^n},\ 0 \leq \rho < -\,\nu(\mathbf{S}) - 1\}. \end{aligned}$$

Da nach Beweisteil 1b) Supplemente $\mathbf{S} \in C_{M^n} \setminus R_{M^n}$ mit beliebig großem $-\nu(\mathbf{S}) > 0$ existieren, also insbesondere auch mit $-\,\nu(\mathbf{S}) - 1 > 0$, ist die Differenzmenge $Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{\Theta})$ nicht leer.

2b) **Beweis der Parameterdarstellung der Differenzmenge** $Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{\Theta}) = (-\,\mathbf{\Theta} + K_{+\mathrm{R}}) \setminus K_{+\mathrm{D}}$:
Für jedes

$$\mathbf{Z} = -\,\mathbf{\Theta} + \mathbf{Y}_\sigma \in -\,\mathbf{\Theta} + K_{+\mathrm{R}}$$

($\mathbf{Y}_\sigma = \mathbf{R} + \sigma\mathbf{\Theta} \in K_{+\mathrm{R}} = -\,C_{M^n} + \mathrm{ray}\,\mathbf{\Theta}$, $\mathbf{R} \in -\,C_{M^n}$, $\sigma \geq 0$) erhält man die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= -\,\mathbf{\Theta} + \mathbf{Y}_\sigma = -\,\mathbf{\Theta} + \mathbf{R} + \sigma\mathbf{\Theta} \\ &= \mathbf{R} + (\sigma - 1)\mathbf{\Theta} = \mathbf{Y}_{\sigma-1}, \end{aligned}$$

die auch gleichzeitig die Replizierungsgleichung für $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_{\sigma-1}$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{\Theta}$ liefert: Das R-Supplement ist dabei $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{R} \in C_{M^n}$ und der R-Beurteilungsparameter $\nu(\mathbf{Z}) = \nu(\mathbf{Y}_{\sigma-1}) = \sigma - 1$.
Aus der Duplizierung von $\mathbf{R}$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{\Theta}$,

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}(\mathbf{R}) + \mu(\mathbf{R})\mathbf{\Theta}$$

mit dem D-Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ und dem D-Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{R})$, ergibt sich auch die Duplizierung von $\mathbf{Y}_\sigma$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\sigma &= \mathbf{R} + \sigma\mathbf{\Theta} \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{R}) + (\mu(\mathbf{R}) + \sigma)\mathbf{\Theta} \end{aligned}$$

mit dem D-Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{Y}_\sigma) = \mathbf{S}(\mathbf{R})$ und dem D-Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{Y}_\sigma) = \mu(\mathbf{R}) + \sigma$, und die Duplizierung von $\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= -\,\mathbf{\Theta} + \mathbf{Y}_\sigma \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{R}) + (\mu(\mathbf{R}) + \sigma - 1)\mathbf{\Theta} \end{aligned}$$

mit dem D-Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{Z}) = \mathbf{S}(\mathbf{R})$ und dem D-Beurteilungsparameter

$$\mu(\mathbf{Z}) = \mu(\mathbf{R}) + \sigma - 1.$$

Mit dem D-Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{Z})$ erhält man die Inzidenzaussage

$$\mathbf{Z} \in K_{+\mathrm{D}} = V_{+\mathrm{D}}(\mathbf{O}) \;\Leftrightarrow\; \mu(\mathbf{Z}) = \mu(\mathbf{R}) + \sigma - 1 \geq 0 \text{ bzw. } \sigma \geq -\,\mu(\mathbf{R}) + 1.$$

Insgesamt erhält man die Beziehung

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + (\sigma - 1)\mathbf{\Theta} \in (-\,\mathbf{\Theta} + K_{+\mathrm{R}}) \setminus K_{+\mathrm{D}} \;\Leftrightarrow\; \sigma \geq 0 \;\wedge\; \sigma < -\,\mu(\mathbf{R}) + 1$$

und für die Differenzmenge $Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{\Theta}) = (-\,\mathbf{\Theta} + K_{+\mathrm{R}}) \setminus K_{+\mathrm{D}}$ die Parameterdarstellung

$$Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{\Theta}) = \{\mathbf{Z} = \mathbf{R} + (\sigma - 1)\mathbf{\Theta} : \mathbf{R} \in -\,C_{M^n},\ 0 \leq \sigma < -\,\mu(\mathbf{R}) + 1\}.$$

Da nach Beweisteil 1e) Zahlungsströme $\mathbf{R} \in (-\,C_{M^n}) \setminus R_{M^n}$ mit beliebig kleinem D-Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{R}) > 0$, also insbesondere mit $\mu(\mathbf{R}) < 1$ existieren, ist die Differenzmenge $Q_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{\Theta})$ nicht leer.

□

Grafische Darstellung der Differenzmengen für die Laufzeit $n = 1$

Die nachfolgende Abbildung 5.12 gibt eine grafische Darstellung der Differenzmengen für die Laufzeit $n = 1$ und ein unvollkommenes Supplementsystem

$$L = \{\mathbf{I}, \mathbf{F}\},$$

mit den Kapitalmarktgeschäften

$$\mathbf{I} = (-1, q_H)^\mathsf{T},\ \mathbf{F} = (1, -q_S)^\mathsf{T}$$

und den Marktzinsfaktoren $q_H, q_S \in \mathbb{R}$ ($q_S > q_H$, $q_S > 0$: Bedingungen für die Arbitragefreiheit und ein unvollkommenes Supplementsystem).

Im Fall $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ ist $P_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{Y}) = \emptyset$ und $P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{Y})$ der zwischen den Geraden $\mathbf{Y} + \mathrm{lin}\,\mathbf{I}$ und $\mathbf{Y} + \mathrm{lin}\,\mathbf{F}$ gelegene 2-dimensionale affine Doppelkegel) und zwar inklusive der D-Indifferenzkurve

$$\mathbf{Y} + (\text{ray } \mathbf{I} \cup \text{ray } \mathbf{F})$$

und ohne die R-Indifferenzkurve

$$\mathbf{Y} + (\text{ray } (\mathbf{-I}) \cup \text{ray } (\mathbf{-F})).$$

Im Fall $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y})) \lesssim \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$ setzt sich die erste Differenzmenge

$$P_{\text{D–R}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + (K_{+\text{D}} \setminus (-\,\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) + K_{+\text{R}}))$$

zusammen aus den beiden halboffenen affinen Kegeln

$$\mathbf{Y} + (\text{cone } \{\mathbf{S}(\mathbf{Y}),\mathbf{-S'}(\mathbf{Y})\} \setminus \text{ray } (\mathbf{-S'}(\mathbf{Y})) = \{\mathbf{Y}+\sigma\mathbf{S}(\mathbf{Y})-\tau\mathbf{S'}(\mathbf{Y}) : \sigma > 0,\ \tau \geq 0\}$$

und

$$\mathbf{Y'} + (\text{cone } \{\mathbf{-S}(\mathbf{Y}),\mathbf{S'}(\mathbf{Y})\} \setminus \text{ray } (\mathbf{-S}(\mathbf{Y})) = \{\mathbf{Y'}-\sigma\mathbf{S}(\mathbf{Y})+\tau\mathbf{S'}(\mathbf{Y}) : \sigma \geq 0,\ \tau > 0\},$$

wobei hier noch der Hilfspunkt $\mathbf{Y'}$ verwendet wird:

$$\mathbf{Y'} := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \mathbf{S'}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} - \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{S'}(\mathbf{Y}).$$

Die zweite Differenzmenge

$$P_{\text{R–D}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + ((-\,\mathbf{\Theta}(\mathbf{Y}) + K_{+\text{R}}) \setminus K_{+\text{D}})$$

ist das von den vier Punkten $\mathbf{Y}$, $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))$, $\mathbf{Y'}$ und $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ gebildete halboffene Parallelogramm

$$\{\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) + \sigma\mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \tau\mathbf{S'}(\mathbf{Y}) : 0 < \sigma,\ \tau \leq 1\},$$

also ohne die Seiten $[\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})),\mathbf{Y}]$ und $[\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})),\mathbf{Y'}]$.

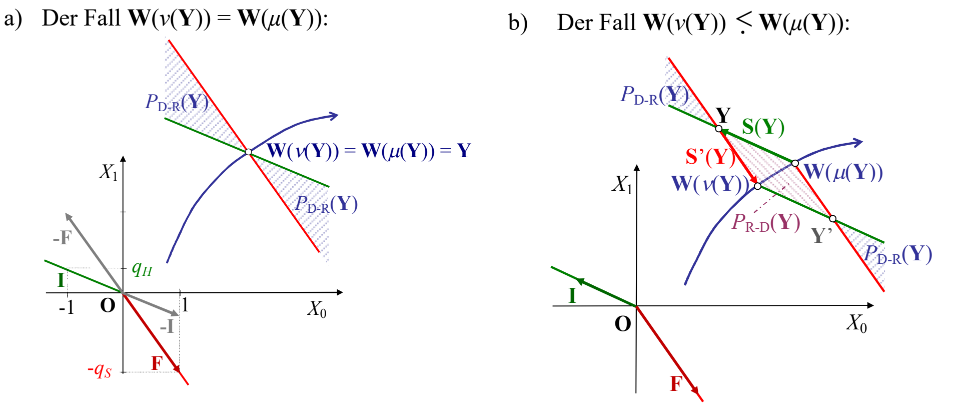


Abb. 5.12 Der Fall a) $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ mit der Differenzmenge $P_{\text{D–R}}(\mathbf{Y})$ und der Fall b) $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \gtrsim \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ mit den Differenzmengen $P_{\text{D–R}}(\mathbf{Y})$ und $P_{\text{R–D}}(\mathbf{Y})$ für die Laufzeit $n = 1$ und ein unvollkommenes Supplementsystem

Grafische Darstellung der Differenzmengen für die Laufzeit $n = 2$

Weitere grafische Darstellungen der auf den Nullpunkt verschobenen Differenzmengen $Q_{\text{D–R}}(\mathbf{\Theta})$ und $Q_{\text{R–D}}(\mathbf{\Theta})$ bzw. von deren Begrenzungsflächen C_{M^2} und $-\,\mathbf{\Theta} - C_{M^2}$ werden für die Laufzeit $n = 2$ und ein unvollkommenes Supplementsystem $L = \{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_H^2, \mathbf{S}_S^1, \mathbf{S}_S^2\}$ gegeben. In der Abbildung 5.13 wird für den Fall $\mathbf{\Theta} = \mathbf{O}$ ein Supplementsystem L gewählt mit der Eigenschaft

$$-\mathbf{S}_S^2 \in \text{cone } \{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_H^2\} = C_{(H,S)},$$

$$\mathbf{S}_S^1 \notin \text{lin } \{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_H^2\}$$

und damit dem nichttrivialen Linienkegel $R_{M^2} = \text{cone } \{\mathbf{S}_H^2, \mathbf{-S}_S^2\} \cup \text{cone } \{\mathbf{-S}_H^2, \mathbf{S}_S^2\}$.

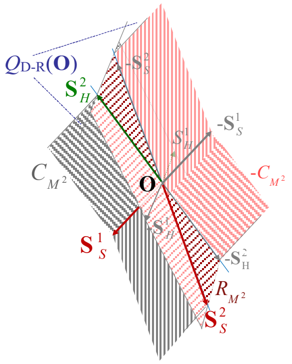


Abb. 5.13 Der Fall $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ mit der Differenzmenge $Q_{\text{D–R}}(\mathbf{O})$ für die Laufzeit $n = 2$ und ein unvollkommenes Supplementsystem L mit nichttrivialem Linienkegel R_{M^2}

In der Abbildung 5.14 wird für die Fälle $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{O}$ und $\boldsymbol{\Theta} \gtrdot \mathbf{O}$ ein unvollkommenes Supplementsystem L mit trivialem Linienkegel R_{M^2} verwendet. Zur grafischen Darstellung kam die Funktion Plot3D des Softwaresystems Mathematica von Wolfram Research zum Einsatz.

a) Der Fall $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{O}$: b) Der Fall $\boldsymbol{\Theta} \gtrdot \mathbf{O}$:

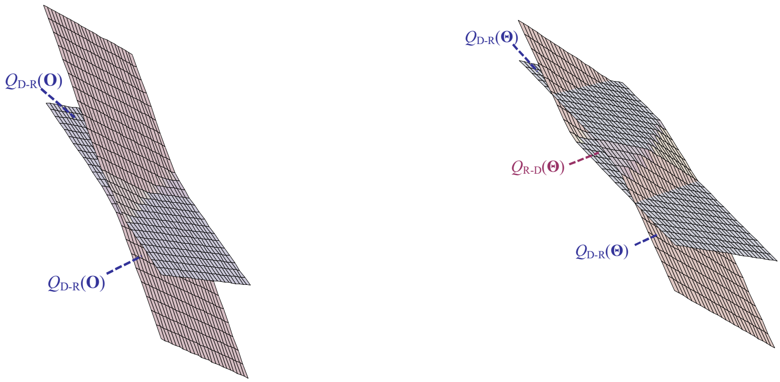


Abb. 5.14 Der Fall a) $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ mit der Differenzmenge $Q_{\text{D–R}}(\mathbf{O})$ und der Fall b) $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \gtrdot \mathbf{W}(\nu(\mathbf{Y}))$ mit den Differenzmengen $Q_{\text{D–R}}(\boldsymbol{\Theta})$ und $Q_{\text{R–D}}(\boldsymbol{\Theta})$ für die Laufzeit $n = 2$ und ein unvollkommenes Supplementsystem L mit trivialem Linienkegel R_{M^2}

Vergleich der D-Vorteilhaftigkeit mit der R-Vorteilhaftigkeit

Wählt man nun den Kurvenpunkt $\mathbf{U} = \mathbf{W}(0) \in \mathbf{W}(J)$ als Vergleichspunkt (Nullpunkt der Bewertung) und die zugehörige Indifferenzklasse $\text{Ind}_{\text{D}W}(\mathbf{U})$ bzw. $\text{Ind}_{\text{R}W}(\mathbf{U})$ als **Nulllinie der jeweiligen Bewertung**, so können die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ nicht nur untereinander verglichen, sondern auch für sich bewertet werden. Im Spezialfall $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ liegt eine homogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu)$ vor.

Ein Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ ist genau dann **D-vorteilhaft** im Sinne von D-vorteilhafter als der Bezugspunkt $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{X} \rhd_{\text{D}W} \mathbf{U},$$

wenn sein inhomogener D-Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ größer als $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{U})) = \mathbf{W}(0) = \mathbf{U}$,

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{U},$$

bzw. sein homogener D-Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$ schwach positiv,

$$\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{O},$$

bzw. sein D-Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ positiv ist,

$$\mu(\mathbf{X}) > 0.$$

Analog ist im Spezialfall $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ ein Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ genau dann **R-vorteilhaft** im Sinne von R-vorteilhafter als $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{X} \rhd_{\mathrm{R}W} \mathbf{U},$$

wenn sein Glattstellungskurvenpunkt $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X}))$ größer als $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{U})) = \mathbf{W}(0) = \mathbf{U}$,

$$\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{U},$$

bzw. sein homogener R-Beurteilungspunkt $\mathbf{V}(\nu(\mathbf{X}))$ schwach positiv ist,

$$\mathbf{V}(\nu(\mathbf{X})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{O},$$

bzw. sein R-Beurteilungsparameter $\nu(\mathbf{X})$ positiv ist,

$$\nu(\mathbf{X}) > 0.$$

Bei dieser speziellen Wahl des festen Vergleichspunkts $\mathbf{Y} = \mathbf{U} \in \mathbf{W}(J)$ auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ liegt der oben beschriebene Fall $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{U})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{U}))$ $(= \mathbf{U})$ bzw. $\mathbf{\Theta}(\mathbf{U}) = \mathbf{O}$ vor, für den nur eine der beiden Differenzmengen nichtleer ist:

$$P_{\mathrm{R-D}}(\mathbf{U}) = W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{U}) \setminus W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{U}) = \emptyset,$$
$$P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{U}) = W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{U}) \setminus W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{U}) \neq \emptyset.$$

Mit der für jedes $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gültigen Ungleichung (UBP) $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \leq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ folgt aus $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{U}$ nämlich stets auch $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{U}$ und somit für die Bessermengen von $\mathbf{U}$ die Inklusion

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{U}) \subseteq W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{U}).$$

Außerdem folgt aus der R-Vorteilhaftigkeit

$$\mathbf{X} \rhd_{\mathrm{R}W} \mathbf{U} \text{ bzw. } \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{U} \text{ bzw. } \nu(\mathbf{X}) > 0$$

auch die D-Vorteilhaftigkeit

$$\mathbf{X} \rhd_{\mathrm{D}W} \mathbf{U} \text{ bzw. } \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \underset{\cdot}{>} \mathbf{U} \text{ bzw. } \mu(\mathbf{X}) > 0.$$

Die Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ hinsichtlich seiner Vorteilhaftigkeit mittels der R-Präferenzordnung $\unrhd_{\mathrm{R}W}$ ist also strenger als die Beurteilung mittels der D-Präferenzordnung $\unrhd_{\mathrm{D}W}$. Präzisiert wird der Unterschied bei der Beurteilung mit den beiden Präferenzordnungen durch die nichtleere Differenzmenge $P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{U})$ der Bessermengen $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{U})$ und $W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{U})$,

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{U}) &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{U})) + Q_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{O}) \\ &= \mathbf{U} + (K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}) \qquad \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Diese Differenzmenge $P_{\mathrm{D-R}}(\mathbf{U})$ enthält genau die Zahlungsströme $\mathbf{X}$, die **D-vorteilhaft und nicht R-vorteilhaft** sind. Sie ist nach Hinzunahme von $\mathbf{U}$ ein affiner Kegel mit dem Vergleichspunkt $\mathbf{U}$ als Scheitelpunkt (Spitze) des Kegels und $(K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}) \cup O$ als zugehörigem linearen Kegel. Nach Hinzunahme des affinen Kegels $\mathbf{U} - C_{M^n}$ ist sie ein affiner Doppelkegel mit $(K_{+\mathrm{D}} \setminus K_{+\mathrm{R}}) \cup (-C_{M^n})$ als zugehörigem linearen Doppelkegel. Eine geometrische Darstellung der Differenzmenge wird in Abbildung 5.15 angegeben.

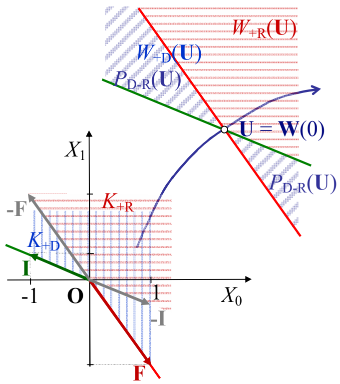


Abb. 5.15 Der Vergleich der D- und R-Vorteilhaftigkeit zum Vergleichspunkt $\mathbf{U} \in \mathbf{W}(J)$ mittels der Differenzmenge $P_{D-R}(\mathbf{U}) = W_{+D}(\mathbf{U}) \setminus W_{+R}(\mathbf{U})$ für die Laufzeit $n = 1$ und ein unvollkommenes Supplementsystem $L = \{\mathbf{I}, \mathbf{F}\}$

Die alternative Wahl eines festen Vegleichspunkts

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}} \notin \mathbf{W}(J) + R_{M^n}$$

als Nullpunkt der Bewertung wäre unzweckmäßig, da dann in der symmetrischen Differenz $\text{symdiff}_{D,R}(\mathbf{Y})$ der Bessermengen $W_{+D}(\mathbf{Y})$ und $W_{+R}(\mathbf{Y})$ sowohl der nichtleere Bereich $P_{D-R}(\tilde{\mathbf{Y}})$ auftritt, in dem die R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RW}$ eine strengere Bedingung als die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ darstellt, als auch der nichtleere Bereich $P_{R-D}(\tilde{\mathbf{Y}})$, in dem die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ eine strengere Bedingung als die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RW}$ liefert. Es kann dann keine der beiden Präferenzordnungen als universell strenger bezeichnet werden.

Der **Spezialfall** mit dem Ursprung **O** des $\mathbb{R}^{n+1}$ als Nullpunkt **U** der Bewertung und der Indifferenzklasse $\text{Ind}_{DV}(\mathbf{O}) = C_{M^n}$ bzw. $\text{Ind}_{RV}(\mathbf{O}) = -\,C_{M^n}$ als Nulllinie der jeweiligen Bewertung: Speziell für den Bezugspunkt $\mathbf{U} = \mathbf{O}$ und eine homogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu)$ ist die Differenzmenge

$$P_{D-R}(\mathbf{O}) = K_{+D} \setminus K_{+R}$$

nach Hinzunahme des Nullpunkts **O** ein linearer Kegel und nach Hinzunahme des linearen Kegels $-\,C_{M^n}$ ein linearer Doppelkegel. In der für die Laufzeit $n = 1$ angegebenen Abbildung 5.15 ist ersichtlich, dass die R- und die D-Präferenzordnung für die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ ohne Vorzeichenwechsel jeweils die gleiche Beurteilung liefern: Die im ersten *Q*uadranten gelegenen Zahlungsströme $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$ sind alle vorteilhaft, die im dritten *Q*uadranten liegenden Zahlungsströme $\mathbf{X} \leq \mathbf{O}$ sind alle unvorteilhaft. Unterschiedliche Beurteilungen können jedoch für Zahlungsströme mit Vorzeichenwechsel auftreten, also für bestimmte Investitionen **X** im offenen zweiten Quadranten und für bestimmte Finanzierungen **X** im offenen vierten Quadranten. Die D-vorteilhaften und nicht R-vorteilhaften Zahlungsströme im zweiten und vierten Quadranten sind genau die Investitionen und Finanzierungen $\mathbf{X} = (X_0, X_1)^\mathsf{T}$, deren interner Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X}) = -\,X_1/X_0$ im Intervall $]q_H, q_S]$ liegt, wobei q_H der Habenzinsfaktor der Investition **I** und q_S der Sollzinsfaktor der Finanzierung **F** des Supplementsystems L ist. Dabei werden im Spezialfall $n = 1$ die Bedingungen $q_S \geq q_H$, $q_S > 0$ für die Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts und q_S, $q_H > 0$ für die Monotonie der Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und $\trianglerighteq_{RW}$ vorausgesetzt (siehe Anmerkungen in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2).

Man kann nun bei der Beurteilung einer bestimmten vorgegebenen Klasse von Zahlungsströmen die Frage stellen, welches der beiden Konzepte Duplizierung oder Replizierung hierfür als zweckmäßiger anzusehen ist. In diesem Zusammenhang fordert beispielsweise Sievi (1995), S. 58–59, für die Bank als Entscheider bei der Beurteilung von Bankgeschäften die Verwendung der R-Marge $\mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$ als den strengeren Maßstab. Er gibt jedoch keinen allgemeinen Beweis an, dass die Verwendung der R-Marge

$\mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$ stets ein strengeres Kriterium darstellt als die Verwendung der D-Marge $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$. Es wird auch nicht die Differenzmenge $P_{\text{D–R}}(\mathbf{O})$ präzisiert, für deren Zahlungsströme $\mathbf{X}$ die D-Marge noch vorteilhaft und die R-Marge schon unvorteilhaft ist, also die R-Beurteilung strenger als die D-Beurteilung ist. Als entscheidenden Vorteil des Konzepts der Replizierung führt er noch an, dass bei der tatsächlichen Glattstellung des Geschäfts durch das entsprechende Gegengeschäft das mit dem Geschäft verbundene Zinsänderungsrisiko sofort wieder ausgeglichen wird. Bei den von Sievi betrachteten Bankgeschäften werden sowohl Aktivgeschäfte (Kreditvergabe an Bankkunden, Pfandbriefemittierung) als auch Passivgeschäfte (Geldaufnahme vom Bankkunden in Form von Tages- und Festgeld, eines Sparbuchs oder Sparbriefs) behandelt. Als Gegengeschäfte (Ergänzungsgeschäfte) treten Interbankengeschäfte (Termingelder bei unterjähriger Laufzeit, Wertpapiere mit jährlicher Zinszahlung) auf, die der Bank im ausreichenden Umfang zur Verfügung stehen und beispielsweise bei einer Zentralbank abgeschlossen werden. Bei dem von Sievi in seinem Buch auf S. 77–85 gerechneten Beispiel wird ein Darlehen an einen Bankkunden beurteilt. Dieses Beispiel wird auch in der vorliegenden Arbeit in Abschnitt 3.4.6 noch ausführlicher dargestellt. Das Darlehen wird mit Interbankengeschäften für die Laufzeit von $n = 4$ Halbjahren refinanziert. Als Zielsetzung der Beurteilung wird der Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu) = \overline{\mathbf{V}}(\mu) = (\mu,0,0,0)^{\mathsf{T}}$ mit der Sofortentnahme $\overline{V}_0 = \mu$ bei $t = 0$ verwendet. Die Verwendung des Margenzahlungsstrom mit Sofortentnahme wird bei Sievi (1995), S. 78, als „Südseemodell“ bezeichnet, da im Zeitraum $[1,n]$ die Zahlungen der beiden Geschäftspartner ausgeglichen sind, die gesamte Marge sofort zum Zeitpunkt $t = 0$ entnommen und beispielsweise für eine Reise in die Südsee verwendet werden kann.

6 Klassische Methoden der Zahlungsstrombewertung als Spezialfälle

In den vorangegangenen Kapiteln 4 und 5 wurde für sichere Zahlungsströme bei vollkommenem bzw. unvollkommenem Kapitalmarkt die Vielfalt der D- und R-Präferenzordnungen beschrieben, die mit den Konzepten der Duplizierung und der Replizierung gewonnen werden können. Es wird nun gezeigt, dass sich dabei auch die auf einen konstanten Kalkulationszinssatz aufgebauten klassischen Bewertungsmethoden wie die Endwertmethode, die Kapitalwertmethode (Barwertmethode), die Zeitwertmethode und die Annuitätenmethode als spezielle R-Präferenzordnungen ergeben, wenn jeweils eine spezielle Beurteilungskurve gewählt und ein besonderes Supplementsystem auf dem Kapitalmarkt vorausgesetzt wird. Diese Aussage wird gleich für verallgemeinerte Methoden bewiesen, bei denen die Auf- und Abzinsungsfaktoren auch von ihrer Fristigkeit (Laufzeit) und Diathese (Handlungsrichtung im Sinne der Verwendung als Anlage- oder Kreditzinsfaktor) abhängen. Mittels der Interpretation der Zeitwert-Präferenzordnung als spezielle R-Präferenzordnung kann dann auch die Vielfalt der zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten gehörigen allgemeineren Zeitwert-Präferenzordnungen beschrieben werden. Beispielsweise wird die Übereinstimmung der allgemeineren Barwert- mit der allgemeineren Endwert-Präferenzordnung durch Bedingungen an die Ab- und Aufzinsungsfaktoren charakterisiert. Bei dem in der Literatur hauptsächlich betrachteten Spezialfall, bei dem ein konstanter positiver Kalkulationszinsfaktor für alle Zinsperioden sowohl als Anlage- als auch Kreditzinsfaktor verwendet wird und somit implizit ein spezieller vollkommener Kapitalmarkt vorausgesetzt wird, erhält man jedoch mit den Zeitwert-Präferenzordnungen nur eine einzige Präferenzordnung. Bei der Darstellung der klassischen dynamischen Bewertungsmethoden wird in der Literatur der Finanzmathematik und der Investitionsrechnung mitunter auch schon auf die diesen Methoden innewohnenden impliziten Prämissen für eine ökonomische Interpretation hingewiesen. Diese Prämissen können ebenfalls mittels der Interpretation der Methoden als R-Präferenzordnungen exakt dargestellt werden. Sie bestehen bei der Beurteilung eines *einzelnen* Zahlungsstroms in der realen Verfügbarkeit eines speziellen Supplementgeschäfts auf dem Kapitalmarkt. Sollen *alle* Zahlungsströme einer bestimmten Laufzeit ökonomisch sinnvoll beurteilt werden können, wird implizit die reale Verfügbarkeit einer bestimmten zulässigen Supplementmenge vorausgesetzt.

Im Gegensatz zur Endwert-, Kapitalwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode ist die Methode des internen Zinssatzes (MIZ) in ihrer bisher in der Literatur beschriebenen Variante mit Verwendung eines *einzigen* ausgewählten internen Zinssatzes auf $\mathbb{R}^{n+1}$ nicht universell einsetzbar. Je nach der Auswahl des internen Zinssatzes kann diese MIZ nur auf einem eingeschränkten Anwendungsbereich, auf dem die Beurteilung des Zahlungsstroms bzw. der Vergleich der Zahlungsströme nach der MIZ im Ergebnis mit der Kapitalwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor übereinstimmt, über die Kapitalwertmethode auch ökonomisch interpretiert werden. Aufgrund der umfangreicheren Diskussion ihres Anwendungsbereichs wird die Methode des internen Zinssatzes in einem eigenen Kapitel, nämlich in Kapitel 7, behandelt. Dabei gelingt auch eine Verallgemeinerung der MIZ sowohl für die Beurteilung als auch für den Vergleich zu einer universell einsetzbaren Methode, die dann gleichwertig zu den anderen klassischen Methoden ist. Dazu ist jedoch der Blick von einem einzelnen ausgewählten internen Zinsfaktor weg auf die Gesamtheit derjenigen internen Zinsfaktoren zu richten, die größer als der Kalkulationszinsfaktor sind.

Bei den klassischen Methoden ist der Blick mehr auf die Kalkulationszinssätze gerichtet, die für die Berechnung des jeweiligen Beurteilungsmaßstabes geeignet erscheinen. Es wird weniger beachtet, ob die zeitliche Verschiebung (Transposition) von Zahlungen und eine eventuell damit verbundene Verzinsung tatsächlich mit realen Kapitalmarktgeschäften durchgeführt werden kann. Dabei gibt es dennoch eine rege Diskussion, welche Kalkulationszinssätze im jeweiligen Fall wohl am zweckmäßigsten anzuwenden wären. So erörtert Altrogge (1996), S. 340–357, die Problematik einer zweckmäßigen Wahl der Art und Größe der Kalkulationszinssätze bei der Berechnung des Endwerts und des Kapitalwerts. Es wird diskutiert, für welche Zeiträume die Zinssätze gültig sein sollen und ob Haben-, Soll- oder Marktzinssätze gewählt werden sollen. Auch weist er darauf hin, dass es bei den im Allgemeinen unterschiedlichen fristigkeitsabhängigen Zinssätzen i_k für die einzelnen Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ ($k = 1,\ldots,n$) eine Vielzahl von Möglichkeiten gibt, den Endwert bzw. den Barwert zu berechnen. Beispielsweise kann die Aufzinsung der Zahlung $X_{k\text{-}1}$ des Zeitpunkts $t = k\text{-}1$ auf den Zeitpunkt $t = n$ in mehreren Schritten über verschiedene Zwischenzeitpunkte t_j erfolgen. Dasselbe gilt für die Abzinsung auf den Zeitpunkt $t = 0$. Dieser Frage entspricht nun bei den Konzepten der Replizierung und Duplizierung die zweckmäßige Auswahl eines geeigneten Supplementsystems von Kapitalmarktgeschäften.

Endwert, Kapitalwert, Zeitwert und die Annuität eines Zahlungsstroms für einen konstanten Kalkulationszinsfaktor

In der Literatur wird meist zur Vereinfachung der Rechnung ein für alle Zinsperioden gleicher Zinssatz i als Kalkulationszinssatz für die Berechnung von Endwert, Kapitalwert, Zeitwert oder Annuität angesetzt, der sowohl als Haben- als auch als Sollzinssatz verwendet wird. Ein allgemeinerer Ansatz mit von der Fristigkeit (Laufzeit) und Diathese (Handlungsrichtung im Sinne der Verwendung des Zinssatzes als Anlage- oder Kreditzinssatz) abhängigen Auf- und Abzinsungsfaktoren wird in den darauffolgenden vier Abschnitten für die Endwert-, Kapitalwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode verwendet. In dem zunächst hier behandelten Spezialfall mit konstantem Kalkulationszinsfaktor $q = 1 + i > 0$ berechnen sich für einen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Endwert $E_n(\mathbf{X})$, Kapitalwert (Barwert) $B_n(\mathbf{X})$, Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ zum Vergleichszeitpunkt $t = m$ und die Annuität $\alpha_n(\mathbf{X})$, die zu den Zeitpunkten $j = 1,\ldots,n$ anfällt, mit den einfachen Formeln

$$E_n(\mathbf{X}) \;= \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j} \;,$$

$$B_n(\mathbf{X}) \;= E_n(\mathbf{X})/q^n \qquad = \sum_{j=0}^{n} X_j \frac{1}{q^j} \,,$$

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{X})\cdot q^m \qquad = E_n(\mathbf{X})\cdot q^{m-n} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{m-j} \;,$$

$$\alpha_n(\mathbf{X}) \;= E_n(\mathbf{X})/E_n(\mathbf{A}).$$

Die Formel für die Annuität ergibt sich dabei aus der Forderung, dass der Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n)^\mathsf{T}$$

und der aus den Annuitäten $\alpha_n(\mathbf{X}) = \alpha$ der Zeitpunkte $j = 1,\ldots,n$ bestehende Zahlungsstrom

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\alpha) = (0,\alpha,\ldots,\alpha)^\mathsf{T} = \alpha\cdot\mathbf{A} \text{ mit } \mathbf{A} = (0,1,\ldots,1)^\mathsf{T}$$

den gleichen Endwert ergeben sollen:

$$E_n(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{G}) = \alpha\cdot E_n(\mathbf{A})$$

mit

$$E_n(\mathbf{A}) = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \begin{cases} n & \text{bei } q = 1, \\ \dfrac{q^n - 1}{q - 1} & \text{bei } q \neq 1. \end{cases}$$

Der Maßstab ‚Annuität' wird also auf dem Umweg über den Maßstab ‚Endwert' berechnet. Ebenso kann dieser auch über den Barwert oder den Zeitwert berechnet werden. Ein Annuitätenniveau $\alpha = \alpha_n(\mathbf{X})$ kann aber auch definiert werden, wenn die Zahlungsstromstruktur mit einem beliebigen schwach positiven Vektor $\mathbf{A} = (A_0,A_1,\ldots,A_n)^\mathsf{T}$ ($\mathbf{A} \gneq \mathbf{O}$, d. h. $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ und $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$) an Stelle von $\mathbf{A} = \mathbf{e}_2 + \ldots + \mathbf{e}_{n+1} = (0,1,\ldots,1)^\mathsf{T}$ vorgegeben ist. Es ist dann nämlich wegen $q > 0$ ebenso $E_n(\mathbf{A}) = A_0 q^n + A_1 q^{n-1} + \ldots + A_n > 0$, $B_n(\mathbf{A}) > 0$ bzw. $Z_{m,n}(\mathbf{A}) > 0$ und es gilt

$$\alpha_n(\mathbf{X}) \;= E_n(\mathbf{X})/E_n(\mathbf{A}) = B_n(\mathbf{X})/B_n(\mathbf{A}) = Z_{m,n}(\mathbf{X})/Z_{m,n}(\mathbf{A}).$$

Bei den klassischen Bewertungsmethoden werden die Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mittels des jeweils berechneten Maßstabs $E_n(\mathbf{X})$, $B_n(\mathbf{X})$, $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ oder $\alpha_n(\mathbf{X})$ beurteilt und verglichen. Bei Endwert-, Kapitalwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode liefert der jeweilige Maßstab auf $\mathbb{R}^{n+1}$ eindeutig eine Nutzenfunktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, die zugehörige Präferenzordnung $\succcurlyeq$ und die zugehörige strenge Halbordnung $\succ$.

Klassische Methoden der Zahlungsstrombewertung

Endwertmethode:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_\mathrm{E} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist mindestens so vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) \geq E_n(\mathbf{Y})$,

$\mathbf{X} \succ_\mathrm{E} \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist vorteilhaft)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) > E_n(\mathbf{O}) = 0$.

Kapitalwertmethode (Barwertmethode):

$\mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{B}} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist mindestens so vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$)
$:\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y})$,
$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{B}} \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist vorteilhaft)
$:\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) > B_n(\mathbf{O}) = 0$.

Zeitwertmethode:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{Z}} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist mindestens so vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$)
$:\Leftrightarrow Z_{m,n}(\mathbf{X}) \geq Z_{m,n}(\mathbf{Y})$,
$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{Z}} \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist vorteilhaft)
$:\Leftrightarrow Z_{m,n}(\mathbf{X}) > Z_{m,n}(\mathbf{O}) = 0$.

Annuitätenmethode:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{A}} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist mindestens so vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$)
$:\Leftrightarrow \alpha_n(\mathbf{X}) \geq \alpha_n(\mathbf{Y})$,
$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{A}} \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist vorteilhaft)
$:\Leftrightarrow \alpha_n(\mathbf{X}) > \alpha_n(\mathbf{O}) = 0$.

Bei der klassischen Methode des internen Zinssatzes wird zum Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ als Vergleichsmaßstab ein sogenannter interner Zinssatz $i_{int} = i_{int}(\mathbf{X})$ derart bestimmt, dass der zugehörige interne Zinsfaktor $q_{int} = 1 + i_{int}$ eine reellwertige Nullstelle der Endwertfunktion des Zahlungsstroms ist:

$$E_n(\mathbf{X},q_{int}) = \sum_{j=0}^{n} X_j q_{int}^{\;n-j} = 0.$$

Beispielsweise wird q_{int} als die positive Nullstelle von $E_n(\mathbf{X},q)$ gewählt, wenn diese existiert und eindeutig bestimmt ist. Mit einem vorher noch festgelegten sogenannten Kalkulationszinssatz $i = i_K$ lautet dann das Entscheidungskriterium der

Methode des internen Zinssatzes:

Eine Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) ist vorteilhaft
$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I},i} \mathbf{O} \quad :\Leftrightarrow i_{int}(\mathbf{X}) > i_K$;
eine Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$) ist vorteilhaft
$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I},i} \mathbf{O} \quad :\Leftrightarrow i_{int}(\mathbf{X}) < i_K$.

Bei zwei Investitionen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ ist $\mathbf{X}$ mindestens so vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$
$\mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{I,V}} \mathbf{Y} \quad :\Leftrightarrow i_{int}(\mathbf{X}) \geq i_{int}(\mathbf{Y})$;
bei zwei Finanzierungen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ ist $\mathbf{X}$ mindestens so vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$
$\mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{I,V}} \mathbf{Y} \quad :\Leftrightarrow i_{int}(\mathbf{X}) \leq i_{int}(\mathbf{Y})$.

Nur für die Zahlungsströme $\mathbf{X}$, für welche ein interner Zinssatz $i_{int}(\mathbf{X})$ existiert und auf irgendeine Weise eindeutig festgelegt werden kann, liefert $i_{int}(\mathbf{X})$ bzw. $-\,i_{int}(\mathbf{X})$ eine Nutzenfunktion und eine zugehörige Quasiordnung (Präordnung) $\succcurlyeq_{\mathrm{I,V}}$. Die Frage, für welche Zahlungsströme damit eine sinnvolle Beurteilung und eine sinnvolle Quasiordnung definiert sind, wird in Kapitel 7 geklärt. Dabei wird die Konsistenz der Beurteilung mit dem Ergebnis der Kapitalwertmethode gefordert. Außerdem wird die Möglichkeit einer ökonomischen Interpretation der Methode und des internen Zinssatzes selbst untersucht. Eine Verallgemeinerung dieser bisher in der Literatur mit einem einzigen internen Zinssatz des Zahlungsstroms benutzten Methode auf eine universelle IB-Beurteilung und einen universellen ID-Vergleich mit der Verwendung der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren wird in den Abschnitten 7.5 und 7.13 hergeleitet.

Präferenzordnung der klassischen Methoden

Im oben betrachteten Spezialfall eines für alle Zinsperioden einheitlichen Haben- und Soll-Zinsfaktors $q > 0$ liefern die ersten vier Methoden die gleiche Präferenzordnung, die auch mit dem orientierten (vorzeichenversehenen) Abstand

$$\begin{aligned} d(\mathbf{X}) &:= \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}/\|\mathbf{P}\| \\ &= B_n(\mathbf{X})/\|\mathbf{P}\| \\ &= E_n(\mathbf{X})/(q^n\|\mathbf{P}\|) \\ &= Z_{m,n}(\mathbf{X})/(q^m\|\mathbf{P}\|) \\ &= \alpha_n(\mathbf{X})B_n(\mathbf{A})/\|\mathbf{P}\| \end{aligned}$$

des Punktes **X** von der homogenen (linearen) Hyperebene

$$H_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{D} = 0\}$$

mit dem Normalenvektor $\mathbf{P} = \mathbf{P}(q) = (1, q^{-1}, \ldots, q^{-n})^{\mathsf{T}}$, $\|\mathbf{P}\| = \sqrt{\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{P}}$, beschrieben werden kann. Die Werte $E_n(\mathbf{X})$, $B_n(\mathbf{X})$, $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ und $\alpha_n(\mathbf{X})$ dieser verschiedenen Nutzenfunktionen stimmen nämlich jeweils bis auf einen positiven konstanten Faktor mit dem Abstand $d(\mathbf{X})$ überein. Im Spezialfall eines für alle Zeitintervalle konstanten Kalkulationszinsfaktors q stimmen also die Endwert-, Kapitalwert-, Zeitwert- und Annuitäten-Präferenzordnung alle überein mit der speziellen Abstand-Präferenzordnung $\trianglerighteq$. Diese wird auch noch ausführlicher in Abschnitt 6.3.7 behandelt und ist ein Spezialfall der in Abschnitt 1.2 und den Kapiteln 4 und 5 auftretenden Barwert-Präferenzordnung mit einem beliebigen positiven Diskontierungsvektor **P**.

Vielfalt der Präferenzordnungen in Abhängigkeit von der Nutzenfunktion

Allgemein gehört zu zwei Nutzenfunktionen $f_k : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = 1, 2)$ genau dann dieselbe Präferenzordnung $\succcurlyeq_1 = \succcurlyeq_2 = \succcurlyeq$, wenn es eine streng monoton steigende Transformation $g : f_1(\mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow f_2(\mathbb{R}^{n+1})$ gibt, sodass f_2 die Komposition $g \circ f_1$ der Funktionen f_1 und g ist (Jarrow (1988), S.12). Zum Nachweis der Existenz der Funktion g definiert man für die unabhängige Variable $\mu \in f_1(\mathbb{R}^{n+1})$ den Funktionswert

$$g(\mu) := f_2(\mathbf{Y}) \ \text{ mit einem } \mathbf{Y} \in f_1^{-}(\mu) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : f_1(\mathbf{X}) = \mu\}$$

und beweist deren Wohldefiniertheit und deren strenge Monotonie:

Für ein weiteres $\mathbf{Y}' \in f_1^{-}(\mu)$ gilt mit der Nutzenfunktion f_1 die Gleichung $f_1(\mathbf{Y}') = \mu = f_1(\mathbf{Y})$, die Relation $\mathbf{Y}' \simeq \mathbf{Y}$ mit der zur Präferenzordnung $\succcurlyeq$ gehörigen Indifferenzrelation (Äquivalenzrelation) $\simeq$ und dann mit der zweiten Nutzenfunktion die Gleichung $f_2(\mathbf{Y}') = f_2(\mathbf{Y})$, sodass auch mit $f_2(\mathbf{Y}')$ der Funktionswert $g(\mu)$ definiert werden kann.

Für Argumente $\mu_1, \mu_2 \in f_1(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\mu_2 > \mu_1$ folgt mit den f_1-Urbildern $\mathbf{Y}^j \in f_1^{-}(\mu_j)$ $(j = 1,2)$ die Ungleichung $f_1(\mathbf{Y}^2) = \mu_2 > \mu_1 = f_1(\mathbf{Y}^1)$, somit die Relation $\mathbf{Y}^2 \succ \mathbf{Y}^1$ mit der zugehörigen strengen Halbordnung $\succ$ und daher die Ungleichung $g(\mu_2) = f_2(\mathbf{Y}^2) > f_2(\mathbf{Y}^1) = g(\mu_1)$ für die Funktionswerte der Transformation g, also die strenge Monotonie von g.

Anzumerken ist noch, dass das Annuitätenniveau $\alpha_n(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X})/E_n(\mathbf{A})$ der Parameter desjenigen Punktes

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) := \mathbf{G}(\alpha_n(\mathbf{X})) = \alpha_n(\mathbf{X})\mathbf{A}$$

auf der Geraden $\mathbf{G}(\alpha) = \alpha\mathbf{A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist, der von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ den gleichen orientierten Abstand hat wie der Punkt $\mathbf{X}$ ($d(\mathbf{a}(\mathbf{X})) = \alpha_n(\mathbf{X})\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{A}/\|\mathbf{P}\| = d(\mathbf{X})$). Analog dazu ist $\mu(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X})/\|\mathbf{P}\|$ der Parameter des Punktes

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}) := \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mu(\mathbf{X})\mathbf{P}$$

auf der Geraden $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{P}$, $\mu \in \mathbb{R}$, der von $H_{\mathbf{P},0}$ den gleichen orientierten Abstand hat wie $\mathbf{X}$ ($d(\mathbf{v}(\mathbf{X})) = \mu(\mathbf{X})\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{P}/\|\mathbf{P}\| = d(\mathbf{X})\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{P}/\|\mathbf{P}\|^2 = d(\mathbf{X})$). In der Abbildung 6.1 sind für einen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ die Vergleichsmaßstäbe ‚Annuitätenniveau' $\alpha_n(\mathbf{X})$ und ‚orientierter Abstand' $d(\mathbf{X})$ als Parameter bestimmter Punkte auf den Geraden mit den Richtungsvektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{P}$ dargestellt.

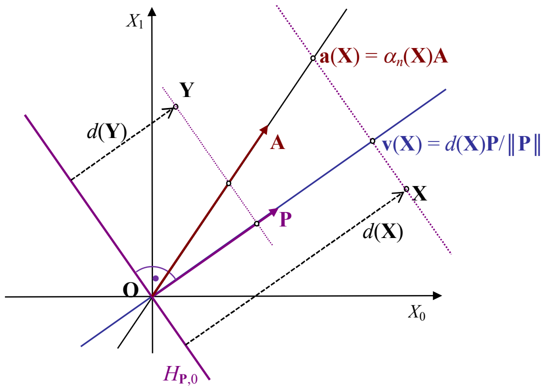


Abb. 6.1 Der Vergleich der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ mittels des orientierten Abstands $d(\mathbf{X})$ von der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ und mittels des Annuitätenniveaus $\alpha_n(\mathbf{X})$

Eine allgemeinere Definition von Endwert, Kapitalwert, Zeitwert und Annuität für den unvollkommenen Kapitalmarkt

Bei der in den nächsten Abschnitten folgenden allgemeineren Betrachtung der ersten vier Methoden werden für die einzelnen Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ ($k = 1,\ldots,n$) auch unterschiedliche **fristigkeitsabhängige Zinssätze** zugelassen. Außerdem wird zwischen **Haben- und Sollzinssätzen** unterschieden. Stellvertretend für die vielen Möglichkeiten zur Berechnung des Endwerts gibt Altrogge (1996), S. 356, zwei Beispiele an, bei denen zur Transposition der Zahlung X_j mittels Aufzinsen in den Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ ($k = j+1,\ldots,n$) der $(n\text{-}j)$-periodische Terminzinsfaktor $q_{j,n,D}$ oder die einperiodischen Terminzinsfaktoren $q_{k-1,k,D}$ verwendet werden ($j = 0,\ldots,n$; $k = 1,\ldots,n$; $D = H, S$; $q_{n,n,D} := 1$). Er erhält damit die in der Abbildung 6.2 dargestellten Aufzinsungsfaktoren

$$a_{j,n,D} = \left(q_{j,n,D}\right)^{n-j} \quad \text{oder}$$

$$a_{j,n,D} = \prod_{k=j+1}^{n} q_{k-1,k,D} \qquad (j = 0,\ldots,n;\ D = H, S;\ a_{n,n,D} := 1).$$

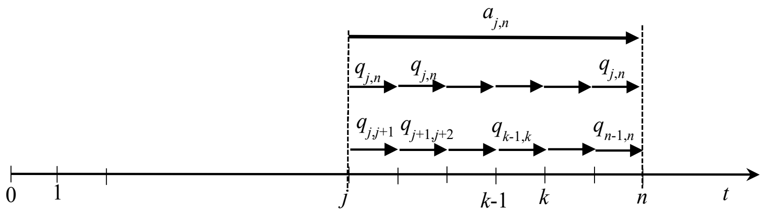


Abb. 6.2 Die Aufzinsung vom Zeitpunkt $t = j$ auf den Zeitpunkt $t = n$ mit den einperiodischen Terminzinsfaktoren $q_{k\text{-}1,k}$ ($k = j$+1,…,n) bzw. mit dem (n-j)-periodischen Terminzinsfaktor $q_{j,n}$, jeweils ohne den Index $D = H$, S für den Zinsfaktortyp

Analog gibt Kruschwitz (1998), S. 66f., für die Berechnung des Kapitalwerts zwei Beispiele an, bei denen zum Abzinsen in den Zinsperioden [k-1,k] (k = 1,…,j) die in Abbildung 6.3 dargestellten Abzinsungsfaktoren (Diskontierungsfaktoren) $d_{0,j,D}$ mit den j-periodischen Kassazinsfaktoren $q_{0,j,D}$ bzw. den einperiodischen Terminzinsfaktoren $q_{k-1,k,D}$ gebildet werden (j = 0,…,n; k = 1,…,n; $D = H$, S; $q_{0,0,D}$:= 1):

$$d_{0,j,D} = \left(q_{0,j,D}\right)^{-j} \quad \text{oder}$$

$$d_{0,j,D} = \left(\prod_{k=1}^{j} q_{k-1,k,D}\right)^{-1} \qquad (j = 0,\dots,n;\ D = H,\ S;\ d_{0,0,D} := 1).$$

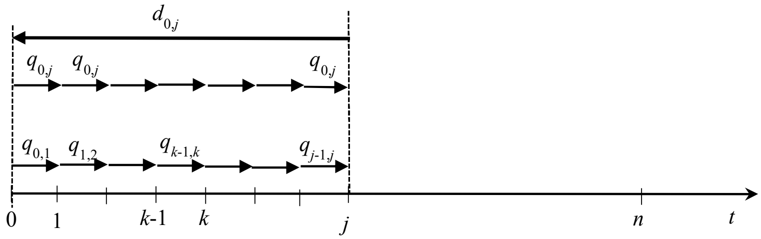


Abb. 6.3 Die Abzinsung vom Zeitpunkt $t = j$ auf den Zeitpunkt $t = 0$ mit den einperiodischen Terminzinsfaktoren $q_{k\text{-}1,k}$ (k = 1,…,j) bzw. mit dem j-periodischen Kassazinsfaktor $q_{0,j}$, jeweils ohne den Index $D = H$, S für den Zinsfaktortyp

6.1 Endwertmethode

Der **Endwert** $E_n(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird statt mit einem konstanten Kalkulationszinsfaktor jetzt allgemeiner mit fristigkeitsabhängigen Haben- und Soll-Aufzinsungsfaktoren $a_{j,n,D_j(\mathbf{X})}$ definiert:

$$\begin{aligned} E_n(\mathbf{X}) &= \sum_{j=0}^{n} X_j a_{j,n,D_j(\mathbf{X})} \\ &= X_0 a_{0,n,D_0(\mathbf{X})} + X_1 a_{1,n,D_1(\mathbf{X})} + \ldots + X_{n-1} a_{n-1,n,D_{n-1}(\mathbf{X})} + X_n \\ &= \mathbf{A_X}^\mathsf{T}\mathbf{X} \end{aligned}$$

mit dem Aufzinsungsvektor

$$\mathbf{A_X} = (a_{0,n,D_0(\mathbf{X})},\ldots,a_{n-1,n,D_{n-1}(\mathbf{X})},1)^\mathsf{T},$$

den für die Intervalle $[j,n]$ vorgegebenen Aufzinsungsfaktoren $a_{j,n,D_j(\mathbf{X})} > 0$ ($j = 0,\ldots,n$; $a_{n,n,D} := 1$ für $D = H, S$) und dem j-ten Zinssatztypindex

$$D_j(\mathbf{X}) := \begin{cases} H & \text{bei } X_j \geq 0, \\ S & \text{bei } X_j < 0. \end{cases}$$

Anstelle von in den einzelnen Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ ($k = 1,\ldots,n$) gültigen Zinssätzen wird hier gleich von den Aufzinsungsfaktoren der Zeitintervalle $[j,n]$ ausgegangen. Die Zuordnung der Aufzinsungsfaktoren zu ihren Zeitintervallen wird in Abbildung 6.4 dargestellt. Für die Transposition bzw. Aufzinsung einer Zahlung $X_j \geq 0$ des Zeitpunkts $t = j$ auf den Zeitpunkt $t = n$ wird also ein Haben-Aufzinsungsfaktor $a_{j,n,H}$ und für die Transposition bzw. Aufzinsung einer Zahlung $X_j < 0$ ein Soll-Aufzinsungsfaktor $a_{j,n,S}$ verwendet. Somit entspricht die Aufzinsung einer Zahlung $X_j > 0$ des Zeitpunkts $t = j$ auf den Zeitpunkt $t = n$ der Hinzunahme einer Investition zum Zahlungsstrom $\mathbf{X}$, die in der Zahlung $- X_j$ (< 0, Auszahlung) bei $t = j$ und der Zahlung $+ X_j a_{j,n,H}$ (> 0, Einzahlung) bei $t = n$ besteht und welche die Zahlung X_j des Zeitpunkts $t = j$ als aufgezinste Zahlung $X_j a_{j,n,H}$ auf den Zeitpunkt $t = n$ transponiert. Die Aufzinsung einer Zahlung $X_j < 0$ entspricht der Hinzunahme einer Finanzierung mit den beiden Zahlungen $- X_j$ (> 0) bei $t = j$ und $+ X_j a_{j,n,S}$ (< 0) bei $t = n$, welche die Zahlung X_j des Zeitpunkts $t = j$ als aufgezinste Zahlung $X_j a_{j,n,S}$ auf den Zeitpunkt $t = n$ transponiert.

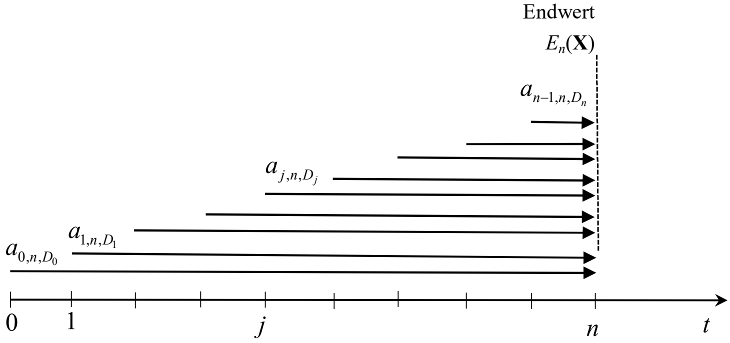


Abb. 6.4 Die Transposition der Zahlungen X_j der Zeitpunkte $t = j$ auf den Vergleichszeitpunkt $t = n$ mittels der Aufzinsungsfaktoren a_{j,n,D_j} ($D_j = D_j(\mathbf{X}) \in \{H, S\}$)

Die **Endwertmethode** (Abkürzung: EWM) wird schon zu Beginn des Kapitels 6 mit einer spezielleren Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X})$ beschrieben. Sie besteht in der Verwendung des jetzt allgemeiner auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ definierten Endwerts $E_n(\mathbf{X})$ als Nutzenfunktion und der zugehörigen Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{E}}$ für den Vergleich und die Beurteilung von Zahlungsströmen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die Eigenschaften der Reflexivität, der Transitivität und der Totalität dieser mittels der Nutzenfunktion $E_n(\mathbf{X})$ definierten Relation $\succcurlyeq_{\mathrm{E}}$ ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften der (Total-)Ordnung $\geq$ („größer gleich“) der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Frage, unter welchen Bedingungen sich die Endwert-Präferenzordnung von der Kapitalwert-Präferenzordnung oder einer anderen Zeitwert-Präferenzordnung unterscheidet, wird in dem Abschnitt 6.3 über die Zeitwertmethode behandelt.

Spezialfall mit nicht gespaltenen Aufzinsungsfaktoren

Als Spezialfall erhält man bei nicht gespaltenen Aufzinsungsfaktoren $a_{j,n,H} = a_{j,n,S} = a_{j,n}$ ($j = 0,\ldots,n$; $A_n = a_{j,n} = 1$) einen für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ konstanten positiven Aufzinsungsvektor

$$\mathbf{A} = (a_{0,n},\ldots, a_{n-1,n},1)^{\mathsf{T}}$$

und damit eine auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ einheitlich definierte lineare Endwertfunktion

$$E_n(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}.$$

Diese Endwertfunktion mit zugehöriger Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{E}}$ ist vom selben Typ wie die in den Abschnitten 1.2 und 4.3.3 mit einem beliebigen positiven Diskontierungsvektor $\mathbf{P}$ ($P_0 = 1$) definierte Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ mit zugehöriger Barwert-Präferenzordnung oder Abstand-Präferenzordnung $\trianglerighteq$. Für diese Präferenzordnung wurde gezeigt, dass sie auch konvex, monoton und abgeschlossen bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation ist.

Noch spezieller ergibt sich zum Aufzinsungsvektor $\mathbf{A}(q) = (q^n, \ldots,q,1)^{\mathsf{T}}$ mit einem für alle Zinsperioden konstanten nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor q die schon zu Beginn von Kapitel 6 betrachtete und in Abschnitt 6.3.7 noch ausführlicher behandelte Endwertfunktion

$$E_n(\mathbf{X},q) = \mathbf{A}(q)^\mathsf{T}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j} \ ,$$

die dann auch noch in Kapitel 7 bei der Methode des internen Zinssatzes verwendet wird.

Die ökonomische Interpretation des Endwerts als Margenendwert einer Replizierung

Es wird nun gezeigt, dass man diesen Endwert $E_n(\mathbf{X})$ auch als die Endentnahme (den Margenendwert) $v(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = n$ bei einer speziellen Replizierung (Glattstellung) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X}))\ ,$$

erhält, nämlich bei der Replizierung mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$, der Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_{n+1} = \mu\cdot(0,\ldots,0,1)^\mathsf{T}$$

der Endentnahme und einem speziellen Supplementsystem $L = L(\mathbf{R}^j_{E_j})$ von Termingeschäften.

Beweis: Für die Glattstellung des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf seinen Endwert $E_n(\mathbf{X})$ verwendet man den Supplementansatz

$$\begin{aligned}\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j{}'(\mathbf{X})\mathbf{S}^j_{E_j(\mathbf{X})} \qquad (\lambda_j‘ \geq 0, j = 1,\ldots,n)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{R}^j_{E_j(\mathbf{X})} \ \in\ C_{M^n}(L)\end{aligned}$$

mit der Supplementbedingung

(SBR) $\quad E_j(\mathbf{X}) = H$ bei $\lambda_j(\mathbf{X}) \geq 0$ und
$\quad E_j(\mathbf{X}) = S$ bei $\lambda_j(\mathbf{X}) < 0$,

mit dem Supplementsystem $L = L(\mathbf{R}^j_{E_j})$ der $(n\text{-}j\text{+}1)$-periodischen Termingeschäfte

$$\mathbf{S}^j_H = \mathbf{R}^j_H\ ,\ \mathbf{S}^j_S = -\mathbf{R}^j_S \ (j = 1,\ldots,n)$$

bei der durch die elementaren Zahlungsströme $\mathbf{R}^j_{E_j}$ festgelegten Zahlungsstromstruktur von Nullkuponanleihen

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^1_{E_1} &= -\mathbf{e}_1 + R^1_{E_1,n}\cdot\mathbf{e}_{n+1} &&= (-1,0,\ldots,0,R^1_{E_1,n})^\mathsf{T},\\ \mathbf{R}^2_{E_2} &= -\mathbf{e}_2 + R^2_{E_2,n}\cdot\mathbf{e}_{n+1} &&= (0,-1,0,\ldots,0,R^2_{E_2,n})^\mathsf{T},\\ &\ldots\\ \mathbf{R}^j_{E_j} &= -\mathbf{e}_j + R^j_{E_j,n}\cdot\mathbf{e}_{n+1} &&= (0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0,R^j_{E_j,n})^\mathsf{T},\\ &\ldots\\ \mathbf{R}^n_{E_n} &= -\mathbf{e}_n + R^n_{E_n,n}\cdot\mathbf{e}_{n+1} &&= (0,\ldots\ldots,0,-1,R^n_{E_n,n})^\mathsf{T}\end{aligned}$$

und den Komponenten

$$\begin{aligned} R^j_{E_j,k} &= 0 && \text{für } k \neq j\text{-}1,\ n,\\ R^j_{E_j,j-1} &= -1 && (k = j\text{-}1),\\ R^j_{E_j,n} &= a_{j-1,n,E_j} > 0 && (k = n), \qquad j = 1,\ldots,n,\ E_j \in M = \{H,S\}.\end{aligned}$$

Für die Replizierungsgleichung erhält man mit obigem Supplementansatz in der Vektorform

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{R}^j_{E_j(\mathbf{X})} \quad - v(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{n+1} \; = -\,\mathbf{X}$$

bzw. in der Komponentenform

$$\lambda_{k+1}(\mathbf{X})(-1) \quad - v(\mathbf{X})\cdot 0 \quad = -\,X_k \qquad \text{für } k = 0,\ldots,n\text{-}1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})a_{j-1,n,E_j(\mathbf{X})} \quad - v(\mathbf{X})\cdot 1 \quad = -\,X_n \qquad \text{für } k = n.$$

Die Replizierungsgleichung kann mit der folgenden $(n+1)\text{x}(n+1)$-Matrix veranschaulicht werden:

$$(\mathbf{R}^1_{E_1},\ldots,\mathbf{R}^n_{E_n},\text{-}\mathbf{e}_{n+1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & & . & . \\ . & 0 & -1 & . & & . & . \\ . & & . & -1 & . & . & . \\ . & & & . & -1 & 0 & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & 0 \\ R^1_{E_1,n} & R^2_{E_2,n} & . & . & . & R^n_{E_n,n} & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\text{x}(n+1)}.$$

Die Replizierungsgleichung hat in Verbindung mit der Supplementbedingung (SBR) für die Unbekannten $E_j(\mathbf{X})$, $\lambda_j(\mathbf{X})$, $j = 1,\ldots,n$, und $v(\mathbf{X})$ genau eine Lösung:

$$\lambda_j(\mathbf{X}) = X_{j\text{-}1} \quad \text{für } j = 1,\ldots,n,$$

$$\begin{aligned} v(\mathbf{X}) &= X_n + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})a_{j-1,n,E_j(\mathbf{X})} \\ &= X_n + \sum_{j=1}^{n} X_{j-1}a_{j-1,n,E_j(\mathbf{X})} \\ &= X_n + \sum_{j=0}^{n-1} X_j a_{j,n,E_{j+1}(\mathbf{X})}\,, \end{aligned}$$

wobei die Supplementtypindizes $E_j(\mathbf{X})$ $(j = 1,\ldots,n)$ gemäß (SBR) explizit schon durch $\mathbf{X}$ bestimmt sind:

$$E_j(\mathbf{X}) = H \quad \text{bei } \lambda_j(\mathbf{X}) = X_{j\text{-}1} \geq 0 \text{ und}$$
$$E_j(\mathbf{X}) = S \quad \text{bei } \lambda_j(\mathbf{X}) = X_{j\text{-}1} < 0.$$

Für die Supplementtypindizes gilt also

$$E_{j+1}(\mathbf{X}) = D_j(\mathbf{X}) \quad \text{für } j = 0,\ldots,n\text{-}1$$

und daher für den Beurteilungsparameter

$$\begin{aligned} v(\mathbf{X}) &= X_n + \sum_{j=0}^{n-1} X_j a_{j,n,D_j(\mathbf{X})} \\ &= \sum_{j=0}^{n} X_j a_{j,n,D_j(\mathbf{X})} \\ &= E_n(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

□

Der Endwert $E_n(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ stimmt also mit der Endentnahme (dem Margenendwert) $W_n(v(\mathbf{X})) = v(\mathbf{X})$ bei der oben angegebenen speziellen Replizierung überein. Die Existenz und Einzigkeit der obigen Replizierung musste noch extra begründet werden, da die dabei verwendeten elementaren Zahlungsströme $\mathbf{R}^j_{E_j}$ keinen Spezialfall der Zahlungsströme des Typs $\mathbf{T}^j_{E_j}$ von Abschnitt 8.4 darstellen, für welche die Existenz und Einzigkeit der Replizierung bewiesen wird. Wegen $R^j_{E_j,j} = 0$ $(j = 1,\ldots,n\text{-}1)$ ist nämlich die Vorzeichenbedingung $T^j_{E_j,j} > 0$ nicht erfüllt. In Abbildung 6.5 erfolgt eine grafische Darstellung dieser Replizierung eines Zahlungsstroms **X** auf einen Beurteilungskurvenpunkt $\hat{\mathbf{V}}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{e}_{n+1}$ mit dem Endwert $E_n(\mathbf{X})$ als Kurvenparameter.

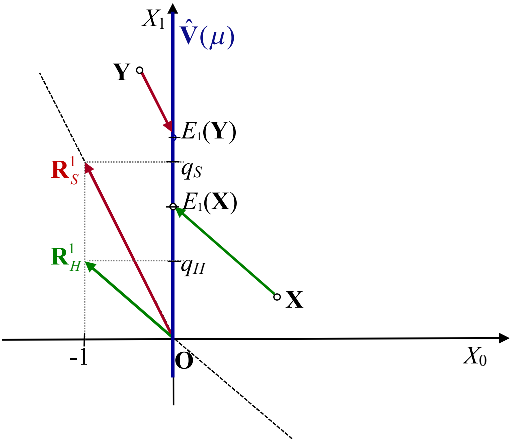


Abb. 6.5 Die Replizierung von Zahlungsströmen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ auf ihren Endwert $E_1(\mathbf{X})$ bzw. $E_1(\mathbf{Y})$ ($n = 1$)

Will man also *einen fest vorgegebenen Zahlungsstrom* **X** tatsächlich auf den Endwert $E_n(\mathbf{X})$ glattstellen, also den Endwert als die Endentnahme einer realen Glattstellung von **X** deuten, so wird für die eindeutige Replizierung von **X**,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_{n+1},$$

das spezielle Ergänzungsgeschäft

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + E_n(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_{n+1}$$

vom realen Kapitalmarkt benötigt. Die **implizite Prämisse** einer ökonomischen Interpretation des Endwerts bzw. der Endwertmethode für den fest fixierten Zahlungsstrom **X** besteht also in der Forderung der realen Verfügbarkeit des speziellen Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + E_n(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_{n+1} \in K.$$

Will man nun für *jeden beliebigen Zahlungsstrom* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ den Endwert $E_n(\mathbf{X})$ als die Endentnahme $v(\mathbf{X})$ einer realen Replizierung des Zahlungsstroms **X** mit Kapitalmarktgeschäften interpretieren, so wird implizit vorausgesetzt, dass zu jedem $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf dem Kapitalmarkt das Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ zur Verfügung steht. Da dann insbesondere für die $\mathbf{X} = -\mathbf{S} \in -C_{M^n}(L(\mathbf{R}^j_{E_j}))$ $(\subseteq \mathbb{R}^{n+1})$ aufgrund der Eindeutigkeit der Replizierung die Replizierungsgleichung durch

$$(-\mathbf{S}) + \mathbf{S} = \mathbf{O} = 0 \cdot \mathbf{e}_{n+1}$$

gegeben ist, ist das zugehörige Supplement gegeben durch $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{S} \in C_{M^n}$ und der Endwert $E_n(\mathbf{X}) = 0$. Dies bedeutet, dass auf dem Kapitalmarkt die gesamte zulässige Supplementmenge $C_{M^n} = C_{M^n}(L)$ zur Verfügung steht, die mit dem Supplementsystem $L = L(\mathbf{R}_{E_j}^j)$ aus den n Investitionen $\mathbf{S}_H^j = \mathbf{R}_H^j$ und den n Finanzierungen $\mathbf{S}_S^j = -\mathbf{R}_S^j$ ($j = 1,\ldots,n$) gebildet wird. Umgekehrt gewährleistet die Verfügbarkeit von C_{M^n} auch die Verfügbarkeit des Supplements $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die implizite Prämisse einer ökonomischen Interpretation der Endwertmethode *auf ganz* $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht also in der realen Verfügbarkeit der gesamten zulässigen Supplementmenge

$$C_{M^n} = C_{M^n}(L)$$

zum speziellen Supplementsystem $L = L(\mathbf{R}_{E_j}^j)$ der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{R}_{E_j}^j$ mit der Zahlungsstromstruktur von Nullkuponanleihen:

$$C_{M^n}(\mathbf{R}_{E_j}^j) \subseteq K.$$

Unabhängig von der realen Existenz der zulässigen Supplementmenge $C_{M^n}(L)$ auf einem realen Kapitalmarkt K existiert aber für theoretische Überlegungen die Menge $C_{M^n}(L)$ stets als Teilmenge des von $L = L(\mathbf{R}_{E_j}^j)$ erzeugten konvexen linearen Kegels

$$K^* := C = \text{cone } L(\mathbf{R}_{E_j}^j) \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

der als fiktiver Kapitalmarkt im $\mathbb{R}^{n+1}$ angesehen werden kann. Wegen der Schlusskette

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{E}} \mathbf{Y} &\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) \geq E_n(\mathbf{Y}) \\ &\Leftrightarrow \hat{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{X})) \geq \hat{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{Y})) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}LV} \mathbf{Y} \end{aligned}$$

stimmt auch die mittels der Endwert-Nutzenfunktion $E_n(\mathbf{X})$ definierte Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{E}}$ stets überein mit der mittels des Supplementsystems $L = L(\mathbf{R}_{E_j}^j)$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu)$ definierten R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}LV}$:

$$\succcurlyeq_{\mathrm{E}} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}LV} \qquad \text{mit } L = L(\mathbf{R}_{E_j}^j),\ \mathbf{V}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_{n+1}.$$

Realitätsnähe der impliziten Prämisse für die Glattstellung auf den Endwert

Im nachfolgenden Abschnitt 6.3.7 wird im Beispiel 6.2 die Prämisse für die ökonomische Interpretation der speziellen Endwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor nur für eine Teilmenge G des $\mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt. In diesem Beispiel kann der Endwert $E_n(\mathbf{X})$ nur für die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ von G als Margenentnahme einer Glattstellung von $\mathbf{X}$ entnommen werden.

Überlegungen zur Wahl eines anderen Supplementsystems für die Replizierung werden gleich allgemeiner in Abschnitt 6.3.3 für die Zeitwertmethode durchgeführt.

6.2 Kapitalwertmethode

Der **Kapitalwert** (Barwert, Kapitalgegenwartswert, Gegenwartswert, englisch: present value; bei Zahlungsströmen aus Einnahmen und Ausgaben, also mit Vorzeichenwechsel, auch Nettobarwert, englisch: netto present value) $B_n(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird jetzt allgemeiner mit fristigkeitsabhängigen Haben- und Soll-Abzinsungsfaktoren (Diskontierungsfaktoren) $d_{0,j,F_j(\mathbf{X})}$ definiert:

$$\begin{aligned} B_n(\mathbf{X}) &= \sum_{j=0}^{n} X_j d_{0,j,F_j(\mathbf{X})} \\ &= X_0 + X_1 d_{0,1,F_1(\mathbf{X})} + \ldots + X_n d_{0,n,F_n(\mathbf{X})} \\ &= \mathbf{P_X}^\mathsf{T}\mathbf{X} \end{aligned}$$

mit dem Diskontierungsvektor

$$\mathbf{P_X} = (1, d_{0,1,F_1(\mathbf{X})}, \ldots, d_{0,n,F_n(\mathbf{X})})^\mathsf{T},$$

den für die Intervalle $[0,j]$ vorgegebenen Abzinsungsfaktoren $d_{0,j,F_j(\mathbf{X})} > 0$ ($j = 0,\ldots,n$; $d_{0,0,D} := 1$ für $D = H, S$) und dem j-ten Zinssatztypindex

$$F_j(\mathbf{X}) := \begin{cases} S & \text{bei } X_j > 0, \\ H & \text{bei } X_j \leq 0. \end{cases}$$

Anstelle von in den einzelnen Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ ($k = 1,\ldots,n$) gültigen Zinssätzen wird hier gleich von den Abzinsungsfaktoren der Zeitintervalle $[0,j]$ ausgegangen. Die Zuordnung der Abzinsungsfaktoren zu den Zeitintervallen wird in Abbildung 6.6 dargestellt.

Für die Transposition bzw. Abzinsung einer Zahlung $X_j > 0$ des Zeitpunkts $t = j$ auf den Zeitpunkt $t = 0$ wird also ein Soll-Abzinsungsfaktor $d_{0,j,S}$ und für die Transposition bzw. Abzinsung einer Zahlung $X_j \leq 0$ ein Haben-Abzinsungsfaktor $d_{0,j,H}$ verwendet.

Somit entspricht die Abzinsung einer Zahlung $X_j > 0$ des Zeitpunkts $t = j$ auf den Zeitpunkt $t = 0$ der Hinzunahme einer Finanzierung zum Zahlungsstrom $\mathbf{X}$, welche in der Zahlung $+ X_j d_{0,j,S}$ (> 0, Einzahlung) bei $t = 0$ und der Zahlung $- X_j$ (< 0, Auszahlung) bei $t = j$ besteht und welche die Zahlung X_j des Zeitpunkts $t = j$ als abgezinste Zahlung $X_j d_{0,j,S}$ auf den Zeitpunkt $t = 0$ transponiert.

Die Abzinsung einer Zahlung $X_j < 0$ entspricht der Hinzunahme einer Investition mit den beiden Zahlungen $+ X_j d_{0,j,H}$ (< 0) bei $t = 0$ und $- X_j$ (> 0) bei $t = j$, welche die Zahlung X_j des Zeitpunkts $t = j$ als abgezinste Zahlung $X_j d_{0,j,H}$ auf den Zeitpunkt $t = 0$ transponiert.

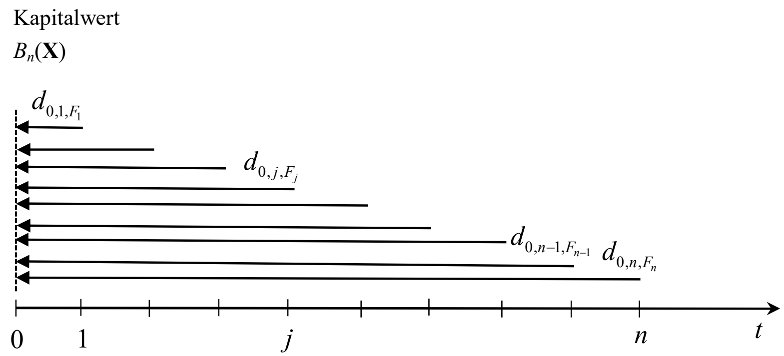


Abb. 6.6 Die Transposition der Zahlungen X_j der Zeitpunkte $t = j$ auf den Vergleichszeitpunkt $t = 0$ mittels der Abzinsungsfaktoren d_{0,j,F_j} $(F_j = F_j(\mathbf{X}) \in \{H, S\})$

Die **Kapitalwertmethode** (Barwertmethode, Abkürzungen: KWM, BWM) wird schon zu Beginn des Kapitels 6 mit einer spezielleren Kapitalwertfunktion (Barwertfunktion) $B_n(\mathbf{X})$ beschrieben. Sie besteht in der Verwendung des jetzt allgemeiner auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ definierten Kapitalwerts $B_n(\mathbf{X})$ als Nutzenfunktion und der zugehörigen Kapitalwert-Präferenzordnung (Barwert-Präferenzordnung, B-Präferenzordnung) $\succcurlyeq_B$ für den Vergleich und die Beurteilung von Zahlungsströmen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die Eigenschaften der Reflexivität, der Transitivität und der Totalität dieser mittels der Nutzenfunktion $B_n(\mathbf{X})$ definierten Relation $\succcurlyeq_B$ ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften der (Total-)Ordnung $\geq$ („größer gleich“) der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Frage, unter welchen Bedingungen sich die Kapitalwert-Präferenzordnung von der Endwert-Präferenzordnung oder einer anderen Zeitwert-Präferenzordnung unterscheidet, wird im Abschnitt 6.3 über die Zeitwertmethode behandelt.

Spezialfall mit nicht gespaltenen Abzinsungsfaktoren

Als Spezialfall erhält man bei nicht gespaltenen Abzinsungsfaktoren $d_{0,j,H} = d_{0,j,S} = d_{0,j}$ $(j = 0,\ldots,n)$ einen für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ konstanten positiven Abzinsungsvektor

$$\mathbf{P} = (1, d_{0,1},\ldots,d_{0,n})^\mathsf{T}$$

und eine auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ einheitlich definierte lineare Kapitalwertfunktion (Barwertfunktion)

$$B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X}.$$

Zu dieser Barwertfunktion gehört die schon in den Abschnitten 1.2 und 4.3.3 behandelte Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ oder Abstand-Präferenzordnung $\trianglerighteq$, die auch konvex, monoton und abgeschlossen bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation ist. Sie ist die einzige durch das Konzept der Replizierung bzw. Duplizierung mit einem vollkommenen Kapitalmarkt erzeugbare Präferenzordnung.
Noch spezieller ergibt sich zum Abzinsungsvektor $\mathbf{P}(q) = (1, \ldots, 1/q^n)^\mathsf{T}$ mit einem für alle Zinsperioden konstanten nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor q die schon zu Beginn von Kapitel 6 betrachtete und in Abschnitt 6.3.7 noch ausführlicher behandelte Kapitalwertfunktion

$$B_n(\mathbf{X},q) = \mathbf{P}(q)^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{-j} \ ,$$

die in Kapitel 7 bei der Methode des internen Zinssatzes verwendet wird.

Ökonomische Interpretation des Kapitalwerts als Margenbarwert einer Replizierung

Es wird nun gezeigt, dass sich der oben allgemeiner definierte Kapitalwert $B_n(\mathbf{X})$ auch als die Sofortentnahme (der Margenbarwert) $v(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bei einer speziellen Replizierung (Glattstellung) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X}))\ ,$$

ergibt, nämlich bei der Replizierung mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$, der Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_1 = \mu\cdot(1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$$

der Sofortentnahme und einem speziellen Supplementsystem $L = L(\mathbf{K}^j_{E_j})$ von Kassageschäften.

Beweis: Für die Glattstellung des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf seinen Kapitalwert $B_n(\mathbf{X})$ verwendet man den Supplementansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(\mathbf{X}) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j'(\mathbf{X})\mathbf{S}^j_{E_j(\mathbf{X})} \qquad (\lambda_j' \geq 0, j = 1,\ldots,n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{K}^j_{E_j(\mathbf{X})} \end{aligned}$$

mit der Supplementbedingung

(SBK) $\quad E_j(\mathbf{X}) = H \quad$ bei $\lambda_j(\mathbf{X}) \geq 0$ und
$\quad E_j(\mathbf{X}) = S \quad$ bei $\lambda_j(\mathbf{X}) < 0$,

mit dem Supplementsystem $L = L(\mathbf{K}^j_{E_j})$ der j-periodischen Kassageschäfte

$$\mathbf{S}^j_H = \mathbf{K}^j_H\ ,\ \mathbf{S}^j_S = -\mathbf{K}^j_S \quad (j = 1,\ldots,n)$$

mit der durch die elementaren Zahlungsströme $\mathbf{K}^j_{E_j}$ festgelegten Zahlungsstromstruktur von Nullkuponanleihen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^1_{E_1} &= K^1_{E_1,0}\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &&= (K^1_{E_1,0},1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}, \\ \mathbf{K}^2_{E_2} &= K^2_{E_2,0}\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 &&= (K^2_{E_2,0},0,1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}, \\ &\ldots \\ \mathbf{K}^j_{E_j} &= K^j_{E_j,0}\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{j+1} &&= (K^j_{E_j,0},0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}, \\ &\ldots \\ \mathbf{K}^n_{E_n} &= K^n_{E_n,0}\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{n+1} &&= (K^n_{E_n,0},0,\ldots,0,1)^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

und den Komponenten

$$\begin{aligned} K^j_{E_j,0} &= -\,d_{0,j,E_j} < 0 && (k = 0), \\ K^j_{E_j,k} &= 0 && \text{für } k \neq 0, j, \\ K^j_{E_j,j} &= 1 && (k = j), \qquad j = 1,\ldots,n,\ E_j \in M = \{H,S\}. \end{aligned}$$

Das hier verwendete Supplementsystem ist ein Spezialfall des im Abschnitt 8.4 angegebenen Systems mit der Zusatzbedingung

$$K^j_{E_j,k} = 0 \text{ für } k = 1,\ldots,j\text{-}1,$$

sodass dadurch die Existenz und Einzigkeit der Replizierung schon gesichert ist.
Die Replizierungsgleichung mit obigem Supplementansatz lautet in der Vektorform

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{K}^j_{E_j(\mathbf{X})} \quad - v(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_1 = -\mathbf{X}$$

bzw. in der Komponentenform

$$-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X}) d_{0,j,E_j(\mathbf{X})} - v(\mathbf{X})\cdot 1 = -X_0 \qquad \text{für } k = 0,$$

$$\lambda_k(\mathbf{X})\cdot 1 \qquad - v(\mathbf{X})\cdot 0 = -X_k \qquad \text{für } k = 1,\ldots,n$$

und kann mit der folgenden $(n+1)\text{x}(n+1)$-Matrix veranschaulicht werden:

$$(-\mathbf{e}_1, \mathbf{K}^1_{E_1}, \ldots, \mathbf{K}^n_{E_n}) = \begin{pmatrix} -1 & K^1_{E_1,0} & K^2_{E_2,0} & . & . & . & K^n_{E_n,0} \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & . & & & . \\ . & . & . & 1 & . & & . \\ . & . & & . & 1 & . & . \\ . & . & & & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\text{x}(n+1)}.$$

Die Replizierungsgleichung hat in Verbindung mit der Supplementbedingung (SBK) für die Unbekannten $E_j(\mathbf{X})$, $\lambda_j(\mathbf{X})$, $j = 1,\ldots,n$, und $v(\mathbf{X})$ genau eine Lösung:

$$\lambda_j(\mathbf{X}) = -X_j \quad \text{für } j = 1,\ldots,n,$$

$$v(\mathbf{X}) = X_0 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X}) d_{0,j,E_j(\mathbf{X})}$$

$$= X_0 + \sum_{j=1}^{n} X_j d_{0,j,E_j(\mathbf{X})},$$

wobei die Supplementtypindizes $E_j(\mathbf{X})$ ($j = 1,\ldots,n$) gemäß (SBK) explizit schon durch $\mathbf{X}$ bestimmt sind:

$$E_j(\mathbf{X}) = H \qquad \text{bei } \lambda_j(\mathbf{X}) = -X_j \geq 0 \text{ und}$$

$$E_j(\mathbf{X}) = S \qquad \text{bei } \lambda_j(\mathbf{X}) = -X_j < 0.$$

Für die Supplementtypindizes gilt also

$$E_j(\mathbf{X}) = F_j(\mathbf{X}) \quad \text{für } j = 1,\ldots,n$$

und daher für den Beurteilungsparameter

$$v(\mathbf{X}) = X_0 + \sum_{j=1}^{n} X_j d_{0,j,F_j(\mathbf{X})}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} X_j d_{0,j,F_j(\mathbf{X})}$$

$$= B_n(\mathbf{X}).$$ □

Der Kapitalwert $B_n(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ stimmt also mit der Sofortentnahme (dem Margenbarwert) $W_0(v(\mathbf{X})) = v(\mathbf{X})$ bei der oben angegebenen speziellen Replizierung überein. In Abbildung 6.7 erfolgt eine grafische Darstellung dieser Replizierung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ auf einen Beurteilungskurvenpunkt $\overline{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_1$ mit dem Barwert $B_n(\mathbf{X})$ als Kurvenparameter.

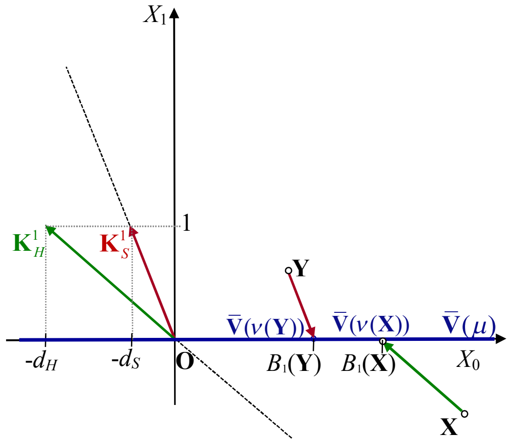


Abb. 6.7 Die Replizierung von Zahlungsströmen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ auf ihren Barwert $B_1(\mathbf{X})$ bzw. $B_1(\mathbf{Y})$ ($n = 1$)

Will man also einen *fest vorgegebenen Zahlungsstrom* $\mathbf{X}$ auf den Kapitalwert $B_n(\mathbf{X})$ glattstellen, also den Kapitalwert als die Sofortentnahme einer Glattstellung von $\mathbf{X}$ deuten, so wird für die eindeutige Replizierung von $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_1,$$

das spezielle Ergänzungsgeschäft

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} \;+\; B_n(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_1$$

vom Kapitalmarkt benötigt. Die **implizite Prämisse** einer ökonomischen Interpretation des Kapitalwerts bzw. der Kapitalwertmethode für den fest fixierten Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ besteht also in der Forderung der realen Verfügbarkeit des speziellen Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} \;+\; B_n(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_1 \in K.$$

Will man für *jeden Zahlungsstrom* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ den Kapitalwert $B_n(\mathbf{X})$ als die Sofortentnahme $v(\mathbf{X})$ einer Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mit Kapitalmarktgeschäften interpretieren, so wird implizit vorausgesetzt, dass auf dem Kapitalmarkt das Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ zur Verfügung steht. Da dann insbesondere für die $\mathbf{X} = -\,\mathbf{S} \in -\,C_{M^n}(L(\mathbf{K}_{E_j}^j))$ $(\subseteq \mathbb{R}^{n+1})$ aufgrund der Eindeutigkeit der Replizierung die Replizierungsgleichung durch

$$(-\mathbf{S}) + \mathbf{S} \;= \mathbf{O} \;= 0\cdot\mathbf{e}_1$$

gegeben ist, ist das zugehörige Supplement gegeben durch $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \;= \mathbf{S} \in C_{M^n}$ und der Barwert $B_n(\mathbf{X}) = 0$. Dies bedeutet, dass auf dem Kapitalmarkt die gesamte zulässige Supplementmenge $C_{M^n} \;= C_{M^n}(L)$ zur Verfügung steht, die mit dem unvollkommenen Supplementsystem

$$L = \; L(\mathbf{K}_{E_j}^j)$$

aus den n Investitionen $\mathbf{S}_H^j = \mathbf{K}_H^j$ und den n Finanzierungen $\mathbf{S}_S^j = -\mathbf{K}_S^j$ ($j = 1,\dots,n$) gebildet wird. Umgekehrt gewährleistet die Verfügbarkeit von $C_{M^n} = C_{M^n}(L)$ auch die Verfügbarkeit des Supplements $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die implizite Prämisse einer ökonomischen Interpretation der Kapitalwertmethode (Barwertmethode) auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht also in der realen Verfügbarkeit der gesamten zulässigen Supplementmenge $C_{M^n} = C_{M^n}(L)$ zum speziellen Supplementsystem $L = L(\mathbf{K}_{E_j}^j)$ der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{K}_{E_j}^j$ mit der Zahlungsstromstruktur von Nullkuponanleihen:

$$C_{M^n}(L(\mathbf{K}_{E_j}^j)) \subseteq K.$$

Unabhängig von der realen Existenz der zulässigen Supplementmenge $C_{M^n}(L)$ auf einem realen Kapitalmarkt K existiert aber für theoretische Überlegungen die Menge $C_{M^n}(L)$ stets als Teilmenge des von L erzeugten konvexen linearen Kegels

$$K^* := C = \text{cone } L(\mathbf{K}_{E_j}^j) \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

der als fiktiver Kapitalmarkt im $\mathbb{R}^{n+1}$ angesehen werden kann. Wegen der Schlusskette

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{B}} \mathbf{Y} &\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y}) \\ &\Leftrightarrow \bar{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{X})) \geq \bar{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{Y})) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}LV} \mathbf{Y} \end{aligned}$$

stimmt auch die mittels der Kapitalwert-Nutzenfunktion $B_n(\mathbf{X})$ definierte Kapitalwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{B}}$ stets überein mit der mittels des Supplementsystems $L = L(\mathbf{K}_{E_j}^j)$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu)$ definierten R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}LV}$:

$$\succcurlyeq_{\mathrm{B}} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}LV} \qquad \text{mit } L = L(\mathbf{K}_{E_j}^j)\,,\ \mathbf{V}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_1.$$

Im Abschnitt 6.3.7 wird im Beispiel 6.2 die Prämisse für die ökonomische Interpretation der speziellen Kapitalwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor nur für eine Teilmenge G des $\mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt. In diesem Beispiel kann der Kapitalwert $B_n(\mathbf{X})$ nur für die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ von G als Margenentnahme einer Glattstellung von $\mathbf{X}$ entnommen werden.

6.3 Zeitwertmethode

6.3.1 Definition des Zeitwerts

Der **Zeitwert** $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\dots,X_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zum Vergleichszeitpunkt $t = m \in \{0,\dots,n\}$ wird jetzt allgemeiner mit fristigkeitsabhängigen Haben-und Soll-Aufzinsungsfaktoren $a_{j,m,D_j(\mathbf{X})}$ und Haben- und Soll-Abzinsungsfaktoren (Diskontierungsfaktoren) $d_{m,j,F_j(\mathbf{X})}$ definiert:

$$\begin{aligned}
Z_{m,n}(\mathbf{X}) &= \sum_{j=0}^{m} X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X})} + \sum_{j=m+1}^{n} X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X})} \\
&= X_0\, a_{0,m,D_0(\mathbf{X})} + \ldots + X_{m-1}\, a_{m-1,m,D_{m-1}(\mathbf{X})} + X_m \\
&\quad + X_{m+1}\, d_{m,m+1,F_{m+1}(\mathbf{X})} + \ldots + X_n\, d_{m,n,F_n(\mathbf{X})} \\
&= \mathbf{T_X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}
\end{aligned}$$

mit dem Transpositionsvektor

$$\mathbf{T_X} = (\, a_{0,m,D_0(\mathbf{X})}, \ldots, a_{m-1,m,D_{m-1}(\mathbf{X})}, 1, d_{m,m+1,F_{m+1}(\mathbf{X})}, \ldots, d_{m,n,F_n(\mathbf{X})}\,)^{\mathsf{T}},$$

den Aufzinsungsfaktoren $a_{j,m,D_j(\mathbf{X})} > 0$ ($j = 0,\ldots,m$; $a_{m,m,D} := 1$ für $D = H, S$), den Abzinsungsfaktoren $d_{m,j,F_j(\mathbf{X})} > 0$ ($j = m+1,\ldots,n$) und den j-ten Zinssatztypfunktionen

$$D_j(\mathbf{X}) := \begin{cases} H & \text{bei } X_j \geq 0, \\ S & \text{bei } X_j < 0, \end{cases} \qquad F_j(\mathbf{X}) := \begin{cases} S & \text{bei } X_j > 0, \\ H & \text{bei } X_j \leq 0. \end{cases}$$

Die Zuordnung der Transpositionsfaktoren $a_{j,m,D_j(\mathbf{X})}$ und $d_{m,j,F_j(\mathbf{X})}$ zu den Zeitintervallen ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Die Zinssatztypfunktionen (Diathesefunktionen) beschreiben die Diathese (Handlungsrichtung, Verwendung) der Auf- und Abzinsungsfaktoren hinsichtlich ihrer Verwendung als Anlagezinsfaktor (mit Index H für Haben) einer Investition oder als Kreditzinsfaktor (mit Index S für Soll) einer Finanzierung. Als Spezialfälle des Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ erhält man für $m = n$ den Endwert $Z_{n,n}(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X})$ und für $m = 0$ den Kapitalwert $Z_{0,n}(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{X})$.

Die Transposition bzw. Aufzinsung einer Zahlung $X_j > 0$ des Zeitpunkts $t = j < m$ auf den Zeitpunkt $t = m$ entspricht der Hinzunahme einer Investition zum Zahlungsstrom $\mathbf{X}$, die in der Zahlung $-X_j$ (< 0, Auszahlung) bei $t = j$ und der Zahlung $+X_j a_{j,m,H}$ (> 0, Einzahlung) bei $t = m$ besteht. Die Transposition bzw. Aufzinsung einer Zahlung $X_j < 0$ des Zeitpunkts $t = j < m$ entspricht der Hinzunahme einer Finanzierung mit den beiden Zahlungen $-X_j$ (> 0) bei $t = j$ und $+X_j a_{j,m,S}$ (< 0) bei $t = m$.

Die Transposition bzw. Abzinsung einer Zahlung $X_j > 0$ des Zeitpunkts $t = j > m$ auf den Zeitpunkt $t = m$ entspricht der Hinzunahme einer Finanzierung zum Zahlungsstrom $\mathbf{X}$, die in der der Zahlung $+X_j d_{m,j,S}$ (> 0) bei $t = m$ und der Zahlung $-X_j$ (< 0) bei $t = j$ besteht. Die Transposition bzw. Abzinsung einer Zahlung $X_j < 0$ des Zeitpunkts $t = j > m$ entspricht der Hinzunahme einer Investition mit den beiden Zahlungen $+X_j d_{m,j,H}$ (< 0) bei $t = 0$ und $-X_j$ (> 0) bei $t = j$.

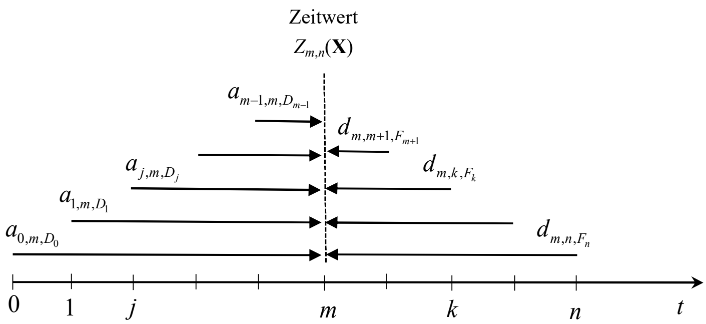


Abb. 6.8 Die Transposition der Zahlungen X_j der Zeitpunkte $t = j$ auf den Vergleichszeitpunkt $t = m$ mittels der Aufzinsungsfaktoren a_{j,m,D_j} für die Zeitpunkte $j = 0,\ldots,m$-1 und mittels der Abzinsungsfaktoren d_{m,j,F_j} für die Zeitpunkte $j = m+1,\ldots,n$ ($D_j = D_j(\mathbf{X})$, $F_j = F_j(\mathbf{X}) \in \{H, S\}$)

6.3.2 Definition der Zeitwertmethode

Wie zu Beginn von Kapitel 6 für den Spezialfall eines konstanten Kalkulationszinsfaktors $q > 0$, so wird auch hier mittels der jetzt allgemeiner definierten Zeitwert-Nutzenfunktion $Z_{m,n} : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$, die zugehörige Zeitwert-Äquivalenzrelation (Zeitwert-Indifferenzrelation) $\sim_Z$ und die zugehörige strenge Zeitwert-Halbordnung $\succ_Z$ definiert. Die Eigenschaften der Reflexivität, der Transitivität und der Totalität dieser mittels der Nutzenfunktion $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ definierten Relation $\succcurlyeq_Z$ ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften der (Total-)Ordnung $\geq$ („größer gleich“) der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Frage, unter welchen Bedingungen sich die zu verschiedenen Zeitpunkten m und m‘ gehörigen Zeitwert-Präferenzordnungen unterscheiden, wird im Abschnitt 6.3.6 behandelt. Die Zeitwert-Nutzenfunktion $Z_{m,n} : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine orthantenweise lineare Funktion: Wenn $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^\circ \in \mathbb{R}^{n+1}$ im selben Orthanten liegen,

$$\mathbf{X} \in O_{\mathbf{X}^\circ} = \{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1} : \operatorname{sgn} Y_j = \operatorname{sgn} X_j^\circ, j = 0,\ldots,n\},$$

so ist

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}_{\mathbf{X}^\circ}{}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$$

mit dem konstanten Transpositionsvektor

$$\mathbf{T}_{\mathbf{X}^\circ} = (a_{0,m,D_0(\mathbf{X}^\circ)}, \ldots, a_{m-1,m,D_{m-1}(\mathbf{X}^\circ)}, 1, d_{m,m+1,F_{m+1}(\mathbf{X}^\circ)}, \ldots, d_{m,n,F_n(\mathbf{X}^\circ)})^{\mathsf{T}}.$$

Die hier verwendete Signumfunktion (Vorzeichenfunktion), die meist mit σ, sign oder sgn bezeichnet wird, ordnet jeder reellen Zahl x ihr Vorzeichen (Signum) zu: $\operatorname{sgn} x = 1$ für $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = 0$ für $x = 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ für $x < 0$. Auf dem Orthanten $O_{\mathbf{X}^o}$ ist die Abbildung $Z_{m,n} : O_{\mathbf{X}^\circ} \longrightarrow \mathbb{R}$ somit eine lineare Abbildung (ein Homomorphismus) mit Bildraum $\mathbb{R}$, also eine Linearform (ein lineares Funktional).

Die **Zeitwertmethode** (Abkürzung: ZWM) besteht in der Verwendung der Zeitwert-Funktion $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ als Nutzenfunktion und der zugehörigen Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ für den Vergleich und die Beurteilung von Zahlungsströmen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X} \succcurlyeq_Z \mathbf{Y} & (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so vorteilhaft wie } \mathbf{Y}) \\ & :\Leftrightarrow Z_{m,n}(\mathbf{X}) \geq Z_{m,n}(\mathbf{Y}), \\ \mathbf{X} \sim_Z \mathbf{Y} & (\mathbf{X} \text{ ist indifferent, äquivalent zu } \mathbf{Y}) \\ & :\Leftrightarrow Z_{m,n}(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{Y}), \\ \mathbf{X} \succ_Z \mathbf{Y} & (\mathbf{X} \text{ ist vorteilhafter als } \mathbf{Y}) \\ & :\Leftrightarrow Z_{m,n}(\mathbf{X}) > Z_{m,n}(\mathbf{Y}), \\ \mathbf{X} \succ_Z \mathbf{O} & (\mathbf{X} \text{ ist vorteilhaft}) \\ & :\Leftrightarrow Z_{m,n}(\mathbf{X}) \geq Z_{m,n}(\mathbf{O}) = 0. \end{array}$$

Spezialfall mit nicht gespaltenen Transpositionsfaktoren

Als Spezialfall erhält man bei nicht gespaltenen Transpositionsfaktoren (Auf- und Abzinsungsfaktoren)

$$a_{j,m,H} = a_{j,m,S} = a_{j,m} \quad (j = 0,\ldots,m\text{-}1),$$
$$d_{m,j,H} = d_{m,j,S} = d_{m,j} \quad (j = m+1,\ldots,n)$$

einen für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ konstanten positiven Transpositionsvektor

$$\mathbf{T} = (a_{0,m},\ldots,a_{m\text{-}1,m},1,\, d_{m,m+1},\ldots,d_{m,n})^{\mathsf{T}}$$

und damit eine auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ einheitlich definierte lineare Zeitwertfunktion

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}.$$

Diese spezielle Zeitwert-Funktion mit beliebigem positiven konstanten Transpositionsvektor $\mathbf{T}$ $(T_m = 1)$ und zugehöriger Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ ist vom selben Typ wie die im Abschnitt 6.1 mit einem beliebigen positiven konstanten Aufzinsungsvektor $\mathbf{A}$ $(A_n = 1)$ definierte Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ oder die in den Abschnitten 6.2, 1.2 und 4.3.3 mit einem beliebigen positiven konstanten Diskontierungsvektor $\mathbf{P}$ $(P_0 = 1)$ definierte Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ mit zugehöriger Barwert-Präferenzordnung oder Abstand-Präferenzordnung $\trianglerighteq$. Für letztere Präferenzordnung wurde gezeigt, dass sie die einzige auf einem arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkt durch das Konzept der Replizierung bzw. Duplizierung erzeugbare Präferenzordnung ist und dass sie auch konvex, monoton und abgeschlossen bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation ist. Zwei derartige zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten m und m‘ gehörige Präferenzordnungen stimmen nach dem noch folgenden Zusatz 6.3 in Abschnitt 6.3.6 genau dann überein, wenn ihre Transpositionsvektoren die gleiche Richtung haben.

Noch spezieller ergibt sich zum Transpositionsvektor

$$\mathbf{T}(q) = (q^m,\ldots,1,1/q,\ldots,1/q^{n\text{-}m})^{\mathsf{T}}$$

mit einem für alle Zinsperioden konstanten nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor q die schon zu Beginn von Kapitel 6 betrachtete und in Abschnitt 6.3.7 noch ausführlicher behandelte Zeitwert-Funktion

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}(q)^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{m-j}\ .$$

6.3.3 Ökonomische Interpretation der Zeitwertmethode und des Zeitwerts mittels der Marge einer Replizierung zum Vergleichszeitpunkt

Es wird nun gezeigt, dass sich dieser Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ auch als die Entnahme (Marge) $v(\mathbf{X})$ zum Vergleichszeitpunkt $t = m$ bei einer speziellen Replizierung (Glattstellung) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \breve{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X})),$$

ergibt, nämlich bei der Replizierung mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$, der Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \breve{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_{m+1} = \mu\cdot(0,..,0,1,0,..,0)^{\mathsf{T}}$$

und einem speziellen Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}_{E_j}^j, \mathbf{M}_{E_j}^j)$ von Termingeschäften.

Bei dieser ökonomischen Interpretation wird auch ersichtlich, dass die Zeitwertmethode ein Spezialfall der replizierbaren Annuitätenmethode von Abschnitt 6.4.2 ist, wenn man dort speziell die Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A} = \mathbf{e}_{m+1}$ wählt.

Beweis: Für die Glattstellung des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf seinen Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ verwendet man den Supplementansatz

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j'(\mathbf{X})\mathbf{S}_{E_j(\mathbf{X})}^j \qquad (\lambda_j' \geq 0, j = 1,\ldots,n)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{P}_{E_j(\mathbf{X})}^j + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{M}_{E_j(\mathbf{X})}^j \in C_{M^n} \qquad (\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1,\ldots,n)$$

mit der Supplementbedingung

(SBPM) $E_j(\mathbf{X}) = H$ bei $\lambda_j(\mathbf{X}) \geq 0$ und
$E_j(\mathbf{X}) = S$ bei $\lambda_j(\mathbf{X}) < 0$,

und dem Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}_{E_j}^j, \mathbf{M}_{E_j}^j)$ der $(m\text{-}j+1)$- bzw. $(j\text{-}m)$-periodischen Termingeschäfte

$$\mathbf{S}_H^j = \mathbf{P}_H^j, \quad \mathbf{S}_S^j = -\mathbf{P}_S^j \qquad (j = 1,\ldots,m)$$

$$\mathbf{S}_H^j = \mathbf{M}_H^j, \quad \mathbf{S}_S^j = -\mathbf{M}_S^j \qquad (j = m+1,\ldots,n)$$

mit der durch die elementaren Zahlungsströme $\mathbf{P}_{E_j}^j$ und $\mathbf{M}_{E_j}^j$ festgelegten Zahlungsstromstruktur von Nullkuponanleihen

$$\mathbf{P}_{E_j}^j = -\mathbf{e}_j + P_{E_j,m}^j\cdot\mathbf{e}_{m+1} = (0,..,0,-1,0,..,0, P_{E_j,m}^j, 0,..,0)^{\mathsf{T}},$$

$$\mathbf{M}_{E_j}^j = M_{E_j,m}^j\cdot\mathbf{e}_{m+1} + \mathbf{e}_{j+1} = (0,..,0, M_{E_j,m}^j, 0,..,0,1,0..,0)^{\mathsf{T}}$$

und den Komponenten

$P_{E_j,k}^j = 0$ für $0 \leq k \leq n$, $k \neq j\text{-}1, m$,

$P_{E_j,j-1}^j = -1$ $(k = j\text{-}1)$,

$P_{E_j,m}^j = a_{j\text{-}1,m,E_j} > 0$ $(k = m)$ für $j = 1,\ldots,m$, $E_j \in \{H,S\}$;

$M_{E_j,k}^j = 0$ für $0 \leq k \leq n$, $k \neq m, j$,

$M_{E_j,m}^j = -\, d_{m,j,E_j} < 0$ $(k = m)$,

$M_{E_j,j}^j = 1$ $(k = j)$ für $j = m+1,\ldots,n$, $E_j \in \{H,S\}$.

Zu den Aufzinsungsfaktoren $a_{j-1,m,D}$ gehören demnach die Zahlungsströme $\mathbf{P}_D^j$ und zu den Abzinsungsfaktoren $d_{m,j,F}$ die Zahlungsströme $\mathbf{M}_F^j$.

Die Replizierungsgleichung

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) - \breve{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{X})) = -\mathbf{X}$$

mit obigem Supplementansatz für $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ lautet in der Vektorschreibweise

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{P}^j_{E_j(\mathbf{X})} + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{M}^j_{E_j(\mathbf{X})} - \nu(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} = -\mathbf{X},$$

sortiert nach den Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_j$

$$-\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{e}_j + \left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})P^j_{E_j(\mathbf{X}),m} - \nu(\mathbf{X}) + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})M^j_{E_j(\mathbf{X}),m}\right]\mathbf{e}_{m+1} + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{e}_{j+1} = -\mathbf{X}$$

bzw. in der Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned}
&\lambda_j(\mathbf{X})\cdot(-1) &&= -X_j && (j = 1,\ldots,m),\\
&\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})a_{j-1,m,E_j(\mathbf{X})} - \nu(\mathbf{X})\cdot 1 - \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})d_{m,j,E_j(\mathbf{X})} &&= -X_m && (\text{Koeff. bei } \mathbf{e}_{m+1}),\\
&\lambda_j(\mathbf{X})\cdot 1 &&= -X_j && (j = m+1,\ldots,n)
\end{aligned}$$

und kann mit der folgenden $(n+1)$x$(n+1)$-Matrix veranschaulicht werden:

$$(\mathbf{P}^1_{E_1},..,\mathbf{P}^m_{E_m},-\mathbf{e}_{m+1},\mathbf{M}^{m+1}_{E_{m+1}},..,\mathbf{M}^n_{E_n}) = \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccccc} \lambda_1(\mathbf{X}) & . & . & \lambda_m(\mathbf{X}) & \nu(\mathbf{X}) & \lambda_{m+1}(\mathbf{X}) & . & \lambda_n(\mathbf{X}) \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c} Z_0 \\ Z_1 \\ . \\ Z_{m-1} \\ Z_m \\ Z_{m+1} \\ . \\ Z_n \end{array} &
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & 0 \\
0 & -1 & . & & . & & & \\
. & . & -1 & . & . & & & \\
0 & . & 0 & -1 & 0 & 0 & . & 0 \\
P^1_{E_1,m} & . & . & P^m_{E_m,m} & -1 & M^{m+1}_{E_{m+1},m} & . & M^n_{E_n,m} \\
0 & . & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
. & & & . & . & 0 & 1 & 0 \\
0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Für die leichtere Umsetzung der Vektorschreibweise in die Matrixschreibweise und in die Komponentenschreibweise sind oberhalb der Matrix noch die Variablen aufgereiht, mit denen die einzelnen Spalten der Matrix multipliziert werden, und ist links der Matrix noch ein Spaltenvektor $\mathbf{Z}$ mit den Indizes $k = 0,\ldots,n$ seiner Komponenten Z_k aufgeführt.

Die Replizierungsgleichung hat in Verbindung mit der Supplementbedingung (SBPM) für die Unbekannten $E_j(\mathbf{X})$, $\lambda_j(\mathbf{X})$ $(j = 1,\ldots,n)$ und $\nu(\mathbf{X})$ genau eine Lösung[1], die sich aus den einzelnen Zeilen des Gleichungssystems ergeben:

$$\begin{aligned}
\lambda_j(\mathbf{X}) &= X_{j-1} && \text{für } j = 1,\ldots,m,\\
\lambda_j(\mathbf{X}) &= -X_j && \text{für } j = m+1,\ldots,n,\\
\nu(\mathbf{X}) &= X_m + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})a_{j\text{-}1,m,E_j(\mathbf{X})} - \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})d_{m,j,E_j(\mathbf{X})}\\
&= X_m + \sum_{j=1}^{m} X_{j\text{-}1}a_{j\text{-}1,m,E_j(\mathbf{X})} + \sum_{j=m+1}^{n} X_j d_{m,j,E_j(\mathbf{X})}
\end{aligned}$$

---

1 Die eindeutige Replizierung mit dem Supplementsystem $L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j})$ und der allgemeineren Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \gneq \mathbf{O}$, wird auch noch in Abschnitt 6.4.2 bei der Behandlung des replizierbaren Annuitätenniveaus bewiesen.

$$= \sum_{j=0}^{m-1} X_j a_{j,m,E_{j+1}(\mathbf{X})} + X_m + \sum_{j=m+1}^{n} X_j d_{m,j,E_j(\mathbf{X})} ,$$

wobei die Supplementtypindizes $E_j(\mathbf{X})$ ($j = 1,\ldots,n$) gemäß (SBPM) schon explizit durch $\mathbf{X}$ bestimmt sind:

$$\begin{array}{lll} E_j(\mathbf{X}) = H & \text{bei } \lambda_j(\mathbf{X}) = X_{j-1} \geq 0 & \text{und} \\ E_j(\mathbf{X}) = S & \text{bei } \lambda_j(\mathbf{X}) = X_{j-1} < 0 & \text{für } j = 1,\ldots,m, \\ E_j(\mathbf{X}) = H & \text{bei } \lambda_j(\mathbf{X}) = - X_j \geq 0 & \text{und} \\ E_j(\mathbf{X}) = S & \text{bei } \lambda_j(\mathbf{X}) = - X_j < 0 & \text{für } j = m+1,\ldots,n. \end{array}$$

Für die Supplementtypindizes gilt also

$$\begin{array}{ll} E_{j+1}(\mathbf{X}) = D_j(\mathbf{X}) & \text{für } j = 0,\ldots,m-1, \\ E_j(\mathbf{X}) \;\;= F_j(\mathbf{X}) & \text{für } j = m+1,\ldots,n \end{array}$$

und daher für den Beurteilungsparameter

$$\begin{aligned} v(\mathbf{X}) &= \sum_{j=0}^{m-1} X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X})} + X_m + \sum_{j=m+1}^{n} X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X})} \\ &= Z_{m,n}(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Die Margenentnahme $v(\mathbf{X})$ zum Vergleichszeitpunkt $t = m$ ist bei dieser speziellen Replizierung also durch den Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ gegeben. □

Die implizite Prämisse der ökonomischen Interpretation

Der zum Vergleichszeitpunkt $t = m$ gehörige Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ stimmt also mit der einzigen Entnahme (Marge) $W_m(v(\mathbf{X})) = v(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = m$ bei der oben angegebenen speziellen Replizierung von $\mathbf{X}$ überein. Die Existenz und Einzigkeit der Replizierung mit dem hier verwendeten Supplementsystem und der verwendeten Beurteilungskurve wurde nach den obigen Betrachtungen mitbegründet.

Will man also einen *fest vorgegebenen Zahlungsstrom* $\mathbf{X}$ auf den Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ glattstellen, also den Zeitwert als die zum Zeitpunkt $t = m$ fällige Margenentnahme einer Glattstellung interpretieren, so wird für die eindeutige Replizierung von $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1},$$

das spezielle Ergänzungsgeschäft $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ vom Kapitalmarkt K benötigt:

Für $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \in C_{M^n}(L)$, $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$,

mit $Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{m} X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X})} + \sum_{j=m+1}^{n} X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X})}$

gilt $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in K$.

Die implizite Prämisse einer ökonomischen Interpretation der Zeitwertmethode bzw. des Zeitwerts für den fest fixierten Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ besteht also in der Forderung der realen Verfügbarkeit des speziellen Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \in K.$$

Anzumerken ist hier noch, dass $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ auch das Supplement $\mathbf{S}'(\bar{\mathbf{X}})$ zum Differenzzahlungsstrom

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}} &:= \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \\ &= (X_0,..,X_{m-1},X_m - Z_{m,n}(\mathbf{X},q_K),X_{m+1},..,X_n)^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

liefert, da wegen $Z_{m,n}(\bar{\mathbf{X}}) = 0$ mit diesem Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in C_{M^n}$ auch die zu $\bar{\mathbf{X}}$

und dem *m-t*en Zeitwert von $\bar{\mathbf{X}}$ gehörige Replizierungsgleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) &= \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) - Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1}\\ &= Z_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{e}_{m+1} - Z_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{e}_{m+1} = \mathbf{O}\\ &= Z_{m,n}(\bar{\mathbf{X}})\cdot\mathbf{e}_{m+1}.\end{aligned}$$

Das Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\ \bar{\mathbf{X}}$$

stellt also $\mathbf{X}$ glatt auf den Margenzahlungsstrom $Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1}$ und den Differenzzahlungsstrom $\bar{\mathbf{X}}$, d. h. den um den Zeitwert (die Marge, den Gewinn) $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ korrigierten Zahlungsstrom, glatt auf die Unterlassungsalternative, also den Nullvektor $\mathbf{O}$.

Will man nun *für jeden Zahlungsstrom* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ den Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ als die Entnahme $v(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = m$ bei einer Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mit realen Kapitalmarktgeschäften interpretieren, so wird implizit vorausgesetzt, dass auf dem Kapitalmarkt alle Supplemente $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, zur Verfügung stehen. Da jedes $\mathbf{S} \in C_{M^n}$ gleich dem Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ zum Zahlungsstrom $\mathbf{X} = -\ \mathbf{S} \in -\ C_{M^n} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ für die Glattstellung auf $\mathbf{O} = 0\cdot\mathbf{e}_{m+1} = Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1}$ ist,

$$-\ \mathbf{S} + \mathbf{S} = 0\cdot\mathbf{e}_{m+1},$$

bedeutet dies, dass mit der impliziten Voraussetzung dann auf dem Kapitalmarkt K die gesamte zulässige Supplementmenge

$$C_{M^n} = C_{M^n}(L)$$

zur Verfügung steht, die mit dem Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$ aus den n Investitionen

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^j_H &= \mathbf{P}^j_H \qquad \text{für } j = 1,\dots,m,\\ \mathbf{S}^j_H &= \mathbf{M}^j_H \qquad \text{für } j = m+1,\dots,n\end{aligned}$$

und den n Finanzierungen

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^j_S &= -\,\mathbf{P}^j_S \qquad \text{für } j = 1,\dots,m,\\ \mathbf{S}^j_S &= -\,\mathbf{M}^j_S \qquad \text{für } j = m+1,\dots,n\end{aligned}$$

gebildet wird. Die Menge K der für den Entscheider erhältlichen Kapitalmarktgeschäfte umfasst also die zulässige Supplementmenge $C_{M^n}(L)$:

$$C_{M^n}(L) \subseteq K \ \text{ für } L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j}).$$

Umgekehrt gewährleistet die reale Verfügbarkeit von C_{M^n} auch die reale Verfügbarkeit des Supplements $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die implizite Prämisse einer ökonomischen Interpretation der Zeitwertmethode auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht also in der realen Verfügbarkeit der gesamten zulässigen Supplementmenge C_{M^n} zum speziellen Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$ der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{P}^j_{E_j}$ und $\mathbf{M}^j_{E_j}$ mit der Zahlungsstromstruktur von Nullkuponanleihen. Bei Durchführung der Glattstellung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mit dem Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$

kann dann zum Zeitpunkt $t = m$ der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ tatsächlich als Marge entnommen werden.

Wahl des Supplementsystems zur Replizierung

Neben dem oben angegebenen Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$, für welches die eindeutige Replizierung auf die Beurteilungskurve $\breve{\mathbf{V}}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{e}_{m+1}$ auf einfache Weise explizit zu berechnen ist und der Beurteilungsparameter $\nu(\mathbf{X})$ mit dem Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ übereinstimmt, gibt es noch weitere Supplementsysteme L^* mit eindeutiger Replizierung auf die Beurteilungskurve $\breve{\mathbf{V}}(\mu)$. Als Beispiele sind hierfür die Supplementsysteme von Abschnitt 8.4 zu nennen. Die Lösung der Replizierungsgleichung wird dabei aber im Allgemeinen mit einem Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung einer Hilfsfunktion bestimmt werden müssen. Die implizite Prämisse für die ökonomische Interpretation der Zeitwertmethode auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht dann wieder darin, dass die verwendete zulässige Supplementmenge $C_{M^n}(L^*)$ auf dem zugänglichen Kapitalmarkt zur Verfügung steht. Bei einer im Allgemeinen von $C_{M^n}(L)$ verschiedenen zulässigen Supplementmenge $C_{M^n}(L^*)$ liegt nach Satz 5.1 aber eine Präferenzordnung vor, die nicht mit der Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ übereinstimmt. Demzufolge ist dann der zugehörige Beurteilungsparameter $\nu^*(\mathbf{X})$, die Margenentnahme zum Zeitpunkt $t = m$, vom Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ verschieden.

Realitätsnähe der impliziten Prämisse für die Glattstellung auf den Zeitwert

In Abschnitt 6.3.7.3 wird mit Beispiel 6.2 noch gezeigt, dass selbst für die spezielle Zeitwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor q durchaus eine konkrete Situation vorliegen kann, in der zumindest für eine gewisse Menge $G(m,q) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ von Zahlungsströmen die reale Glattstellung auf den Zeitwert möglich ist. Es wird dazu ein real zur Verfügung stehendes Verrechnungskonto angegeben, auf dem der jeweilige Zahlungsstrom ohne Vorzeichenwechsel der Kontostände verrechnet und der Zeitwert abgehoben werden kann.

Die Zeitwert-Präferenzordnung als R-Präferenzordnung

Unabhängig von dieser für die ökonomische Interpretation vorauszusetzenden realen Existenz einer passenden zulässigen Supplementmenge $C_{M^n}(L)$ auf einem realen Kapitalmarkt K, bei der aus dem vorhandenen Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ und dem zugehörigen Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ tatsächlich die Marge $\nu(\mathbf{X})$ als Geldbetrag in der Höhe des Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = m$ konstruiert werden kann, kann aber für theoretische Überlegungen der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ stets als fiktive Entnahme $\nu(\mathbf{X})$ bei der Replizierung von $\mathbf{X}$ mittels eines fiktiven Kapitalmarkts interpretiert werden. Man nimmt dazu einfach den vom Supplementsystem L erzeugten konvexen linearen Kegel

$$K^* := C = \operatorname{cone} L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

als fiktive Menge von Kapitalmarktgeschäften. Diese mathematisch im $\mathbb{R}^{n+1}$ existente Menge K^* von Finanzgeschäften kann in einer realen Menge K von Kapitalmarktgeschäften enthalten sein oder auch nicht. Wegen der Schlusskette

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \succcurlyeq_{Z} \mathbf{Y} &\Leftrightarrow Z_{m,n}(\mathbf{X}) \geq Z_{m,n}(\mathbf{Y})\\ &\Leftrightarrow \breve{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X})) \geq \breve{\mathbf{V}}(v(\mathbf{Y}))\\ &\Leftrightarrow \mathbf{X} \trianglerighteq_{RLV} \mathbf{Y}\end{aligned}$$

stimmt auch die mittels der Zeitwert-Nutzenfunktion $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ definierte Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{Z}$ stets überein mit der mittels des Supplementsystems $L = L(m, \mathbf{P}^{j}_{E_j}, \mathbf{M}^{j}_{E_j})$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{V}(\mu) = \breve{\mathbf{V}}(\mu)$ definierten R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RLV}$:

$$\succcurlyeq_{Z} = \trianglerighteq_{RLV} \qquad \text{mit } L = L(m, \mathbf{P}^{j}_{E_j}, \mathbf{M}^{j}_{E_j}),\ \mathbf{V}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_{m+1}.$$

6.3.4 Monotonie der Zeitwert-Präferenzordnung bei arbitragefreien Auf- und Abzinsungsfaktoren

Nachfolgend wird jetzt noch bewiesen, dass die **Arbitragefreiheit**

(AF*) $\qquad K^* \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$

des vom Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}^{j}_{E_j}, \mathbf{M}^{j}_{E_j})$ erzeugten Kapitalmarkts $K^* = \operatorname{cone} L$ durch die folgenden Ungleichungen für die Auf- und Abzinsungsfaktoren charakterisiert werden kann:

(UA) $\qquad a_{j,m,S} \geq a_{j,m,H} \qquad (j = 0,\ldots,m\text{-}1),$

(UD) $\qquad d_{m,j,S} \leq d_{m,j,H} \qquad (j = m+1,\ldots n).$

In diesem Fall sind also für die Indizes $j = 0,\ldots,m$ die Soll-Aufzinsungsfaktoren $a_{j,m,S}$ nicht kleiner als die entsprechenden Haben-Aufzinsungsfaktoren $a_{j,m,H}$ und für die Indizes $j = m+1,\ldots,n$ die Soll-Abzinsungsfaktoren $d_{m,j,S}$ nicht größer als die entsprechenden Haben-Abzinsungsfaktoren $d_{m,j,H}$.
Weiter wird gezeigt, dass unter **Voraussetzung der Arbitragefreiheit** von K^*, d. h. von „arbitragefreien" Auf- und Abzinsungsfaktoren mit den Ungleichungen (UA) und U(D), die Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{Z}$ eine monotone Präferenzordnung ist:

$$\text{(AF*)} \Rightarrow\ \succcurlyeq_{Z} \text{ monoton.}$$

Beweis: 1) **Charakterisierung der Arbitragefreiheit** von K^* durch (UA) und (UD):
„⇒": Da die speziellen Kapitalmarktgeschäfte

$$\mathbf{S}^{j}_{H} + \mathbf{S}^{j}_{S} = \mathbf{P}^{j}_{H} - \mathbf{P}^{j}_{S} \qquad = (0,..,0,a_{j\text{-}1,m,H} - a_{j\text{-}1,m,S},0,..,0)^{\mathsf{T}} \ \not\geq\!\!\!\!\cdot\ \ \mathbf{O}$$

für $j = 1,\ldots,m$ und

$$\mathbf{S}^{j}_{S} + \mathbf{S}^{j}_{H} = -\,\mathbf{M}^{j}_{S} + \mathbf{M}^{j}_{H} \quad = (0,..,0,d_{m,j,S} - d_{m,j,H},0,..,0)^{\mathsf{T}} \ \not\geq\!\!\!\!\cdot\ \ \mathbf{O}$$

für $j = m+1,\ldots,n$ Vielfache von $\mathbf{e}_{m+1}$ sind und nach Voraussetzung (AF*) keine Arbitragegelegenheiten sind, folgen für deren $(m+1)$-te Komponenten notwendig die Ungleichungen

(UA) $\qquad a_{j\text{-}1,m,H} - a_{j\text{-}1,m,S} \leq 0 \qquad (j = 1,\ldots,m),$

(UD) $\qquad d_{m,j,S} - d_{m,j,H} \leq 0 \qquad (j = m+1,\ldots n).$

„⇐": Es bleibt also zu zeigen, dass es bei Voraussetzung der Ungleichungen (UA) und (UD) keine Arbitragegelegenheit $\mathbf{T} \in K^* \cap \dot{\mathbb{R}}^{n+1}_{+0}$ gibt. Für einen Widerspruchsbeweis geht man von einem $\mathbf{T} \in K^*$ mit $\mathbf{T} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ aus und folgert einen Widerspruch. Aus der Vektorungleichung

$$\mathbf{O} \underset{\cdot}{<} \mathbf{T} \;=\; \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\ D=H,S}} \lambda_{j,D}\mathbf{S}_D^j \qquad (\lambda_{j,D} \geq 0 \text{ für } j = 1,\dots,n;\ D = H, S)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(\lambda_{j,H}\mathbf{P}_H^j - \lambda_{j,S}\mathbf{P}_S^j) \;+\; \sum_{j=m+1}^{n}(\lambda_{j,H}\mathbf{M}_H^j - \lambda_{j,S}\mathbf{M}_S^j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(-\lambda_{j,H} + \lambda_{j,S})\mathbf{e}_j \;+\; \sum_{j=1}^{m}(\lambda_{j,H}a_{j\text{-}1,m,H} - \lambda_{j,S}a_{j\text{-}1,m,S})\mathbf{e}_{m+1}$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n}(-\lambda_{j,H}d_{m,j,H} + \lambda_{j,S}d_{m,j,S})\mathbf{e}_{m+1} + \sum_{j=m+1}^{n}(\lambda_{j,H} - \lambda_{j,S})\mathbf{e}_{j+1}$$

erhält man die Komponentenungleichungen

$$T_k = -\lambda_{k+1,H} + \lambda_{k+1,S} \geq 0 \qquad \text{für } k = 0,\dots,m\text{-}1,$$

$$T_m = \sum_{j=1}^{m}(\lambda_{j,H}a_{j-1,m,H} - \lambda_{j,S}a_{j-1,m,S}) + \sum_{j=m+1}^{n}(-\lambda_{j,H}d_{m,j,H} + \lambda_{j,S}d_{m,j,S}) \geq 0 \qquad (k=m),$$

$$T_k = \lambda_{k,H} - \lambda_{k,S} \geq 0 \qquad \text{für } k = m+1,\dots,n.$$

Daraus folgt

$$-\lambda_{j,S} \leq -\lambda_{j,H} \qquad \text{für } j = 1,\dots,m,$$
$$-\lambda_{j,H} \leq -\lambda_{j,S} \qquad \text{für } j = m+1,\dots,n$$

und damit wegen der Positivität der Auf- und Abzinsungsfaktoren, der Nichtnegativität der Parameter $\lambda_{j,D}$ und der Gültigkeit der Gleichungen (UA) und (UD) die Ungleichung

$$T_m \leq \sum_{j=1}^{m}\lambda_{j,H}(a_{j-1,m,H} - a_{j-1,m,S}) \;+\; \sum_{j=m+1}^{n}\lambda_{j,S}(-d_{m,j,H} + d_{m,j,S}) \;\leq 0.$$

Da $\mathbf{T} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ ist und $T_m = 0$ gefolgert wurde, gibt es mindestens einen Index $r \in \{0,\dots,n\}$, $r \neq m$, mit $T_r > 0$. Im Falle $r < m$ folgt aus der Komponentenungleichung $T_r > 0$ für den Index $j = r+1$ ($\leq m$) die strenge Ungleichung

$$-\lambda_{j,S} < -\lambda_{j,H},$$

damit für den zum Index $j = r+1$ gehörigen Klammerausdruck in der ersten Summe von T_m die strenge Ungleichung

$$(\lambda_{j,H}a_{j\text{-}1,m,H} - \lambda_{j,S}a_{j\text{-}1,m,S}) < \lambda_{j,H}(a_{j\text{-}1,m,H} - a_{j\text{-}1,m,S})$$

und insgesamt $T_m < 0$, im Widerspruch zu $\mathbf{T} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$. Analog folgt im Falle $r > m$ aus $T_r > 0$ für den Index $j = r$ ($\geq m+1$) die strenge Ungleichung

$$-\lambda_{j,H} < -\lambda_{j,S},$$

damit für den zum Index $j = r$ gehörigen Klammerausdruck in der zweiten Summe von T_m die strenge Ungleichung

$$(-\lambda_{j,H}d_{m,j,H} + \lambda_{j,S}d_{m,j,S}) < \lambda_{j,S}(-d_{m,j,H} + d_{m,j,S})$$

und insgesamt $T_m < 0$, im Widerspruch zu $\mathbf{T} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$. Damit ist eine Arbitragegelegenheit in K^* ausgeschlossen.

2) **Monotonie der Zeitwert-Präferenzordnung**: Es sei die **Arbitragefreiheit** (AF*) des Kapitalmarkts K^* vorausgesetzt. Für zwei Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{\Delta} \text{ mit } \mathbf{\Delta} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$$

ist die Relation $\mathbf{X}' \succ_Z \mathbf{X}$ bzw. die strenge Ungleichung

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}') > Z_{m,n}(\mathbf{X})$$

zu zeigen. Dazu wird die Indexmenge $I = \{0,\dots,m\}$ disjunkt zerlegt in die beiden Teilmengen

$$I_1 := \{j \in I : X_j \geq 0 \text{ oder } X_j' < 0\},$$
$$I_2 := \{j \in I : X_j < 0 \text{ und } X_j' \geq 0\}$$

und die Indexmenge $K = \{m+1,\dots,n\}$ in die beiden Teilmengen

$$K_1 := \{j \in K : X_j > 0 \text{ oder } X_j' \leq 0\},$$
$$K_2 := \{j \in K : X_j \leq 0 \text{ und } X_j' > 0\}.$$

Für die Indizes $j \in I_1$ gilt im Fall i) $X_j \geq 0$ auch $X_j' = X_j + \Delta_j \geq X_j \geq 0$ und somit $D_j(\mathbf{X}') = H = D_j(\mathbf{X})$. Im

Fall ii) $X_j' < 0$ gilt auch $X_j = X_j' - \Delta_j \leq X_j' < 0$ und somit $D_j(\mathbf{X}') = S = D_j(\mathbf{X})$. In beiden Fällen ist also $D_j(\mathbf{X}') = D_j(\mathbf{X})$ und

$$X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X}')} = X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X})} .$$

Für die Indizes $j \in I_2$ gilt $D_j(\mathbf{X}') = H$, $D_j(\mathbf{X}) = S$ und wegen $X_j < 0$ und (UA) (bei vorausgesetzter Arbitragefreiheit) die Ungleichung

$$X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X}')} = X_j a_{j,m,H} \geq X_j a_{j,m,S} = X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X})}$$

Für die Indizes $j \in K_1$ gilt im Fall i) $X_j > 0$ auch $X_j' = X_j + \Delta_j \geq X_j > 0$ und somit $F_j(\mathbf{X}') = H = F_j(\mathbf{X})$. Im Fall ii) $X_j' \leq 0$ gilt auch $X_j = X_j' - \Delta_j \leq X_j' \leq 0$ und somit $F_j(\mathbf{X}') = S = F_j(\mathbf{X})$. In beiden Fällen ist also $F_j(\mathbf{X}') = F_j(\mathbf{X})$ und

$$X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X}')} = X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X})} .$$

Für die Indizes $j \in K_2$ gilt $F_j(\mathbf{X}') = S$, $F_j(\mathbf{X}) = H$ und wegen $X_j \leq 0$ und (UD) (bei vorausgesetzter Arbitragefreiheit) die Ungleichung

$$X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X}')} = X_j d_{m,j,S} \geq X_j d_{m,j,H} = X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X})} .$$

Nach diesen Vorüberlegungen erhält man für den Zeitwert von $\mathbf{X}'$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
Z_{m,n}(\mathbf{X}') &= \sum_{j=0}^{m} (X_j + \Delta_j) a_{j,m,D_j(\mathbf{X}')} + \sum_{j=m+1}^{n} (X_j + \Delta_j) d_{m,j,F_j(\mathbf{X}')} \\
&= \sum_{j \in I_1} X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X}')} + \sum_{j \in I_2} X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X}')} \\
&\quad + \sum_{j \in K_1}^{n} X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X}')} + \sum_{j \in K_2}^{n} X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X}')} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{m} \Delta_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X}')} + \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X}')} \\
&\geq \sum_{j \in I_1} X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X})} + \sum_{j \in I_2} X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X})} \\
&\quad + \sum_{j \in K_1}^{n} X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X})} + \sum_{j \in K_2}^{n} X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X})} \\
&\quad + \rho(\mathbf{\Delta},\mathbf{X}') \\
&= Z_{m,n}(\mathbf{X}) + \rho(\mathbf{\Delta},\mathbf{X}')
\end{aligned}$$

mit der Summe

$$\rho(\mathbf{\Delta},\mathbf{X}') = \sum_{j=0}^{m} \Delta_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X}')} + \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X}')} .$$

Da $\mathbf{\Delta}$ schwach positiv ist und die Aufzinsungsfaktoren $a_{j,m,D_j(\mathbf{X}')}$ und die Abzinsungsfaktoren $d_{m,j,F_j(\mathbf{X}')}$ jeweils positiv sind, ist die Summe $\rho(\mathbf{\Delta},\mathbf{X}') > 0$ und somit

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}') > Z_{m,n}(\mathbf{X}).$$

Damit ist die Monotonie der Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ nachgewiesen. □

6.3.5 Indifferenzklassen und die Bessermengen der Zeitwert-Präferenzordnung

Nach Abschnitt 5.2.2 ist die Menge aller zu $\mathbf{O}$ indifferenten Zahlungsströme ($\mathbf{X} \sim_Z \mathbf{O}$ bzw. $\mathbf{X} \simeq_{RLV} \mathbf{O}$), also die Indifferenzklasse von $\mathbf{O}$, gegeben durch die am Nullpunkt gespiegelte zulässige Supplementmenge:

$$\mathrm{Ind}_{\sim_Z}(\mathbf{O}) = \mathrm{Ind}_{RLV}(\mathbf{O}) = - C_{M^n} .$$

Für einen beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist die **Indifferenzklasse** gegeben durch

$$\mathrm{Ind}_{\sim_Z}(\mathbf{Y}) = \mathrm{Ind}_{RLV}(\mathbf{Y}) = \breve{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{Y})) - C_{M^n}\,.$$

Unter der Voraussetzung der Ungleichungen (UA) und (UD) für die **Arbitragefreiheit** (AF*) des Kapitalmarkts $K^* = \text{cone}\,L$ und bei Verwendung der Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{RLV}(\mathbf{O}) = -C_{M^n}$ als Nulllinie der Bewertung mittels der monotonen Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z\, = \trianglerighteq_{RLV}$ ist nach Abschnitt 5.2.4 die Menge aller vorteilhaften Zahlungsströme ($\mathbf{X} \succ_Z \mathbf{O}$ bzw. $\mathbf{X} \vartriangleright_{RLV} \mathbf{O}$) und aller zu $\mathbf{O}$ indifferenten Zahlungsströme ($\mathbf{X} \sim_Z \mathbf{O}$ bzw. $\mathbf{X} \simeq_{RLV} \mathbf{O}$) gegeben durch

$$W_{+,\succcurlyeq_Z}(\mathbf{O}) = V_{+R}(\mathbf{O}) = K_{+R}$$
$$= -C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = -C_{M^n} + \text{ray}\,\mathbf{A}$$

(mit beliebigem $\mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O}$).

Für einen beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist nach Abschnitt 5.2.4 die **Bessermenge** gegeben durch

$$W_{+,\succcurlyeq_Z}(\mathbf{Y}) = V_{+R}(\mathbf{Y}) = \breve{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{Y})) + K_{+R}$$
$$= \breve{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{Y})) - C_{M^n} + \mathbb{R}^{n+1}_{+0}$$
$$= \breve{\mathbf{V}}(\nu(\mathbf{Y})) - C_{M^n} + \text{ray}\,\mathbf{A}.$$

Anzumerken ist hier, dass die für diese Darstellung der Bessermengen benötigte Monotonie der Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ im vorherigen Abschnitt 6.3.4 unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit von K^* bewiesen wurde. Eine grafische Darstellung der Bessermenge wird in Abbildung 6.9 für den Vergleichszeitpunkt $m = 0$ und die Laufzeit $n = 1$ gegeben.

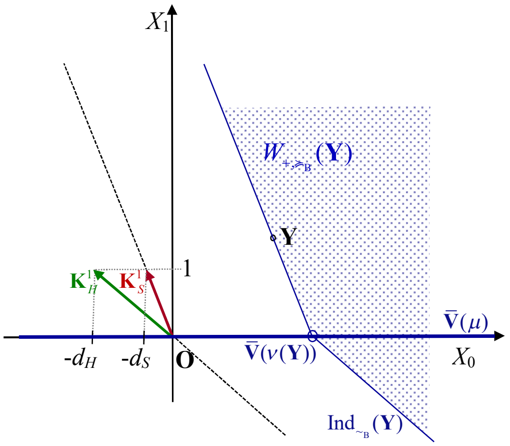


Abb. 6.9 Die zur Kapitalwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ gehörige Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\sim_B}(\mathbf{Y})$ und Bessermenge $W_{+,\succcurlyeq_B}(\mathbf{Y})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ bei einem unvollkommenen Supplementsystem $L = L(\mathbf{K}^1_H, \mathbf{K}^1_S)$

In nachfolgenden Abschnitt 6.3.7 wird im Beispiel 6.2 die Prämisse für die ökonomische Interpretation der speziellen Zeitwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor nur für eine Teilmenge G des $\mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt. In diesem Beispiel kann der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ nur für die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ von G als Margenentnahme einer Glattstellung von $\mathbf{X}$ zum Zeitpunkt $t = m$ entnommen werden.

6.3.6 Vielfalt der Zeitwert-Präferenzordnungen

Mit Hilfe der oben angegebenen Interpretation der Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ als eine spezielle R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RLV}$ und mit den Ergebnissen der Abschnitte 5.2.3 und 5.3 über die Vielfalt der R-Präferenzordnungen kann nun auch die Frage beantwortet werden, wann die zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten m, m' $\in \{0,\ldots,n\}$, $m < m$', gehörigen Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ gleich sind bzw. unter welchen Bedingungen diese verschieden sind. Das Ergebnis wird im nachfolgenden mathematischen Satz dargestellt. Eine Schlüsselrolle spielen dabei die beiden Aufzinsungsfaktoren a_{m,m',D_m} $(D_m = H, S)$ bzw. die beiden Abzinsungsfaktoren $d_{m,m',F_{m'}}$ $(F_{m'} = H, S)$, die zu den beiden Vergleichszeitpunkten m und m' gehören. Das Indexpaar (m,m') ist das einzige Indexpaar (j,k), für welches hier beim Vergleich der beiden Zeitwert-Präferenzordnungen sowohl ein Aufzinsungsfaktor a_{j,k,D_j} als auch ein Abzinsungsfaktor d_{j,k,F_k} auftritt. Die Gesamtheit der zu den Vergleichszeitpunkten m und m' gehörigen Transpositionsfaktoren ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Zur Bezeichnungsweise ist noch anzumerken, dass das Supplementsystem $L' = L(m',\mathbf{P}'^{j}_{E_j},\mathbf{M}'^{j}_{E_j})$ zum Vergleichszeitpunkt m' in analoger Weise gebildet wird wie das Supplementsystem $L = L(m,\mathbf{P}^{j}_{E_j},\mathbf{M}^{j}_{E_j})$ zum Vergleichszeitpunkt m. Die zu m gehörige Beurteilungskurve wird jetzt mit

$$\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m+1}$$

bezeichnet und die zu m' gehörige Beurteilungskurve mit

$$\mathbf{V}'(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m'+1}.$$

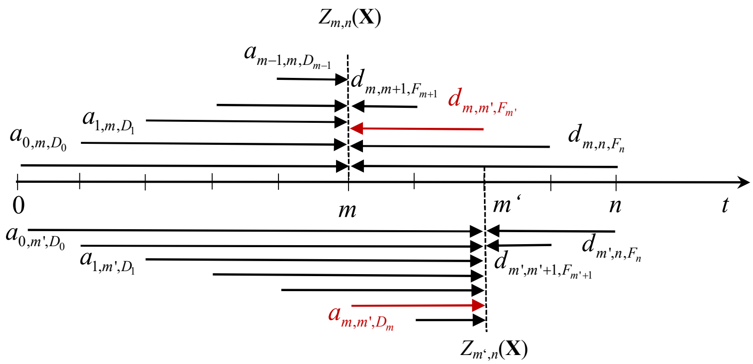


Abb. 6.10 Die Auf- und Abzinsungsfaktoren der zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten $t = m$ und $t = m'$ gehörigen Zeitwerte $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ und $Z_{m',n}(\mathbf{X})$

Nach Teil 1) des nachfolgenden Satzes sind die Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ verschieden, falls eine der angegebenen notwendigen Bedingungen a) – f) nicht erfüllt ist. In Teil 2) werden Bedingungen angegeben, die notwendig und hinreichend für die Übereinstimmung der Zeitwert-Präferenzordnungen sind.

Satz 6.1 Vielfalt der Zeitwert-Präferenzordnungen zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten

1) **Notwendige Bedingungen für die Übereinstimmung**: Falls die zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten $m, m' \in \{0,\ldots,n\}$, $m < m'$, gehörigen Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ übereinstimmen,

$$\succcurlyeq_Z = \succcurlyeq_{Z'},$$

sind notwendig die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Die zu den Supplementsystemen

$$L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j}) \text{ und } L' = L(m', \mathbf{P}'^j_{E_j}, \mathbf{M}'^j_{E_j})$$

gehörigen zulässigen Supplementmengen

$$C_{M^n} = C_{M^n}(L) \text{ und } C'_{M^n} = C_{M^n}(L')$$

stimmen überein:

$$\text{(GZS)} \quad C_{M^n} = C'_{M^n}.$$

b) Der zu den beiden Vergleichszeitpunkten m und m' gehörige Abzinsungsfaktor $d_{m,m',F_{m'}}$ ist kein gespaltener Abzinsungsfaktor, d. h. es stimmen der Haben- und der Soll-Abzinsungsfaktor überein:

$$\text{(GDmm')} \quad d_{m,m',H} = d_{m,m',S} =: d_{m,m'}.$$

c) Der Linienkegel R_{M^n} von C_{M^n} enthält die von $\mathbf{M}^{m'}$ aufgespannte lineare Hülle und ist somit nichttrivial:

$$(O \neq) \text{ lin } \mathbf{M}^{m'} \subseteq R_{M^n}.$$

d) Der zu den beiden Vergleichszeitpunkten m und m‘ gehörige Aufzinsungsfaktor a_{m,m',D_m} ist kein gespaltener Aufzinsungsfaktor, d. h. es stimmen der Haben- und der Soll-Aufzinsungsfaktor überein:
(GAmm’) $\quad a_{m,m',H} = a_{m,m',S} =: a_{m,m'}$.

e) Der Linienkegel R'_{M^n} von C'_{M^n} enthält die von $\mathbf{P}'^{m+1}$ aufgespannte lineare Hülle und ist somit nichttrivial:

$$(O \neq) \text{ lin } \mathbf{P}'^{m+1} \subseteq R'_{M^n} = R_{M^n} .$$

f) Die zum Paar (m,m‘) der Vergleichszeitpunkte gehörigen Supplemente $\mathbf{M}^{m'}$ und $\mathbf{P}'^{m+1}$ haben die gleiche Richtung und die zugehörigen Transpositionsfaktoren $d_{m,m'}$ und $a_{m,m'}$ sind jeweils der Kehrwert des anderen:

$\mathbf{P}'^{m+1} = a_{m,m'} \mathbf{M}^{m'}$ (gleiche Richtung);

$d_{m,m'} = 1/a_{m,m'}$ (reziproke Werte).

2) **Charakterisierungen der Übereinstimmung**: Unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit können zwei Charakterisierungen der Übereinstimmung von zwei Zeitwert-Präferenzordnungen angegeben werden.

a) Für den zum Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$ des m-ten Zeitwerts gebildeten fiktiven Kapitalmarkt $K^* :=$ cone $L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sei die Arbitragefreiheit
(AF*) $\quad K^* \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$
vorausgesetzt, die durch die oben angegebenen Ungleichungen (UA) und (UD) für die Haben- und Sollwerte der Auf- und Abzinsungsfaktoren von L charakterisiert wird. Die zu den verschiedenen Vergleichszeitpunkten m, m‘ $\in \{0,\dots,n\}$, $m < m$‘, gehörigen Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ stimmen genau dann überein, wenn die beiden Bedingungen (GZS) und (GDmm‘) erfüllt sind:

$$\succcurlyeq_Z = \succcurlyeq_{Z'} \iff \text{(GZS)} \wedge \text{(GDmm')}.$$

b) Für den zum Supplementsystem L‘ $= L(m', \mathbf{P}'^j_{E_j}, \mathbf{M}'^j_{E_j})$ des m‘-ten Zeitwerts gebildeten fiktiven Kapitalmarkt K^{*}‘ := cone $L(m', \mathbf{P}'^j_{E_j}, \mathbf{M}'^j_{E_j}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sei die Arbitragefreiheit
(AF*‘) $\quad K^{*\prime} \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$
vorausgesetzt, die durch die Ungleichungen (UA‘) und (UD‘) für die Haben- und Sollwerte der Auf- und Abzinsungsfaktoren von L‘ charakterisiert wird. Die zu den Vergleichszeitpunkten m, m‘ $\in \{0,\dots,n\}$, $m < m$‘, gehörigen Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ stimmen genau dann überein, wenn die beiden Bedingungen (GZS) und (GAmm‘) erfüllt sind:

$$\succcurlyeq_Z = \succcurlyeq_{Z'} \iff \text{(GZS)} \wedge \text{(GAmm')}.$$

Beweis: 1) a) **(GZS) ist notwendige Bedingung** für die Übereinstimmung der Zeitwert-Präferenzordnungen: Es wird der Fall betrachtet, dass die Bedingung (GZS) der Gleichheit der zulässigen Supplementmengen C_{M^n} und C'_{M^n} nicht erfüllt ist, und gezeigt, dass dann die beiden Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ nicht übereinstimmen. Aufgrund der in Abschnitt 5.2.2 angegebenen geometrischen Beschreibung der Indifferenzklassen der R-Präferenzordnungen als affine Kegel (ohne Benötigung der Voraussetzung der Arbitragefreiheit) folgt dann hier mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ und den homogenen Beurteilungskurven $\mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m+1}$ und $\mathbf{V}'(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m'+1}$ die Verschiedenheit der Indifferenzklassen von $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{RLV}(\mathbf{O}) &= \mathbf{V}(v(\mathbf{O})) - C_{M^n} = - C_{M^n} \\ &\neq - C'_{M^n} = \mathbf{V}'(v'(\mathbf{O})) - C'_{M^n} = \mathrm{Ind}_{RL'V'}(\mathbf{O}).\end{aligned}$$

Demzufolge sind die Indifferenzrelationen $\simeq_{RLV}$ und $\simeq_{RL'V'}$ verschieden und dann auch die Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RLV}$ und $\trianglerighteq_{RL'V'}$ verschieden:

$$\succcurlyeq_Z = \trianglerighteq_{RLV} \neq \trianglerighteq_{RL'V'} = \succcurlyeq_{Z'}.$$

Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung (GZS) für die Übereinstimmung der Zeitwert-Präferenzordnungen bewiesen. Die Arbitragefreiheit (AF*) oder (AF*') wurde hierfür nicht benötigt. Die Notwendigkeit von weiteren Bedingungen für die Übereinstimmung von $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ wird nachfolgend unter Verwendung der Bedingung (GZS) gezeigt.

Es wird jetzt also der Fall betrachtet, dass die Bedingung (GZS) erfüllt ist. Als weitere notwendige Bedingungen werden dann in Teil b) die Bedingung (GDmm'), in Teil c) die Nichttrivialität des Linienkegels R_{M^n}, in Teil d) die Bedingung (GAmm'), in Teil e) die Nichttrivialität des Linienkegels R'_{M^n} und in Teil f) die Reziprozität der Transpositionsfaktoren $d_{m,m'}$ und $a_{m,m'}$ und die Richtungsgleichheit der Supplemente $\mathbf{S}_H^{m'} = \mathbf{M}^{m'}$ und $\mathbf{S}'^{m+1}_H = \mathbf{P}'^{m+1}$ bewiesen.

b) **(GDmm') ist notwendige Bedingung:**
Es liegen also die beiden Supplementsysteme L und L' mit übereinstimmenden zulässigen Supplementmengen im Kapitalmarkt K^* vor:

$$L, L' \subseteq C'_{M^n} = C_{M^n} \subseteq \mathrm{cone}\ L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j}) = K^*.$$

Nach Satz 5.1 von Abschnitt 5.2.3 folgt aus der Bedingung (GZS) zunächst, dass die zur selben Beurteilungskurve $\mathbf{V}'(\mu)$ und zu den Supplementsystemen L' und L gebildeten R-Präferenzordnungen übereinstimmen:

$$\succcurlyeq_{Z'} = \trianglerighteq_{RL'V'} = \trianglerighteq_{RLV'}.$$

Mit Satz 5.5 c) von Abschnitt 5.3.3 oder mit den Ausführungen von Abschnitt 8.3.5 kann ohne (AF*) aus der Übereinstimmung der beiden Zeitwert-Präferenzordnungen

$$\succcurlyeq_{Z'} = \trianglerighteq_{RL'V'} = \trianglerighteq_{RLV'} \quad \text{und}$$
$$\succcurlyeq_Z = \trianglerighteq_{RLV}$$

geschlossen werden, dass bei dem fest vorgegebenen Supplementsystem L die beiden Beurteilungskurven $\mathbf{V}'(\mu)$ und $\mathbf{V}(\mu)$ L-äquivalent sind (zur Herleitung der Bedingungen für die L-Äquivalenz siehe Abschnitt 8.3.5),

$$\mathbf{V}' \sim_L \mathbf{V},$$

also die Bedingung (LRÄ') (mit vertauschten Rollen von $\mathbf{V}'(\mu)$ und $\mathbf{V}(\mu)$) erfüllt ist:

$$\mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \text{für jedes } \mathbf{Y} \in \mathbf{V}'(\mathbb{R}).$$

Dabei ist $\mathbf{S}^*(\mathbf{Y})$ das Supplement von $\mathbf{Y} = \mathbf{V}'(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m'+1}$, $\mu \in \mathbb{R}$, das zur speziellen Replizierung von $\mathbf{Y} \in \mathbf{V}'(\mathbb{R})$ mittels Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$, Supplementmenge $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$ und Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_{m+1}$ gehört. Die Existenz und Einzigkeit dieser Replizierung für jeden beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wurde oben in Abschnitt 6.3.3 bereits begründet. Die Arbitragefreiheit (AF*) von K^* wird nur für die Beweisrichtung (siehe Beweisteil 2, a) benötigt, um aus der zu Supplementsystem L, Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ und Bildmenge $\mathbf{V}'(\mathbb{R})$ gehörigen Bedingung (LRÄ') mit Satz 5.5 c) bzw. Abschnitt 8.3.5 auf die Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RL'V'}$ und $\trianglerighteq_{RL'V}$ zu schließen. Für die Folgerung von (LRÄ') aus der Übereinstimmung der Präferenzordnungen oder die Folgerung der nachfolgend verwendeten Inzidenz $\mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) \in R_{M^n} \subseteq -C_{M^n}$ wird (AF*) nicht benötigt.

Zur **Berechnung des Supplements**

$$\mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) = \mathbf{S}^*(\mathbf{V}'(\mu)) =: \mathbf{T}(\mu)$$

und damit der Replizierung des speziellen Zahlungsstroms $\mathbf{Y} = \mathbf{V}'(\mu) = \mu \mathbf{e}_{m'+1}$ liefert die Replizierungsgleichung

$$\mathbf{Y} + \mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}(v(\mathbf{Y})),\ \ \mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) \in C_{M^n}\ ,$$

die Vektorgleichung

$$\mu\, \mathbf{e}_{m'+1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{P}_{E_j}^j \ + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j \mathbf{M}_{E_j}^j \ = v\, \mathbf{e}_{m+1}$$

mit dem Kurvenparameter μ, dem Beurteilungsparameter $v = v(\mathbf{Y})$ und den Transformationsparametern $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{Y})$, die zusammen mit den Supplementtypindizes $E_j = E_j(\mathbf{Y})$ die Supplementbedingung (SBPM) erfüllen. Die Vektorgleichung lautet sortiert nach den Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_j$

$$-\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{e}_j \ + \left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_{E_j,m}^j - v + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j M_{E_j,m}^j \right] \mathbf{e}_{m+1} \ + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq m'}}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_{j+1} + (\lambda_{m'} + \mu)\mathbf{e}_{m'+1} \ = 0$$

und ergibt somit die Komponentengleichungen

$$\begin{array}{lll}
\lambda_j & = 0 & \text{für } j = 1,\ldots,m, \\
\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_{E_j,m}^j - v + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j M_{E_j,m}^j & = 0 & \text{für Koeff. bei } \mathbf{e}_{m+1}, \\
\lambda_j & = 0 & \text{für } j = m+1,\ldots,n,\ j \neq m', \\
\lambda_{m'} + \mu & = 0 & (j = m',\ \text{Koeff. bei } \mathbf{e}_{m'+1}).
\end{array}$$

Daraus erhält man unmittelbar

$$\lambda_j = 0 \text{ für } j = 1,\ldots,n,\ j \neq m',$$
$$\lambda_{m'} = -\mu,$$
$$v = \lambda_{m'} M_{E_{m'},m}^{m'} = -\mu M_{F(\mu),m}^{m'} = \mu\, d_{m,m',F(\mu)}\ ,$$

nach der Supplementbedingung (SBPM) den Supplementtypindex $E_{m'} = H$ bei $\lambda_{m'} \geq 0$, $E_{m'} = S$ bei $\lambda_{m'} < 0$, also

$$E_{m'} = F(\mu) \ \text{ mit}$$
$$F(\mu) = H \quad \text{bei } \mu \leq 0,$$
$$F(\mu) = S \quad \text{bei } \mu > 0,$$

und das Supplement

$$\mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) = \mathbf{S}^*(\mathbf{V}'(\mu)) = \lambda_{m'} \mathbf{M}_{E_{m'}}^{m'} = -\mu\, \mathbf{M}_{F(\mu)}^{m'} =: \mathbf{T}(\mu).$$

Zur **Folgerung der Bedingung** (GDmm') verwendet man nun die für die L-Äquivalenz der Beurteilungskurven $\mathbf{V}'(\mu)$ und $\mathbf{V}(\mu)$ notwendige Bedingung (LRÄ1') von Abschnitt 8.3.5 (ohne die Voraussetzung (AF*))

$$\mathbf{S}^*(\mathbf{Y}) \in R_{M^n} = C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) \ \text{ für jedes } \mathbf{Y} \in \mathbf{V}'(\mathbb{R}).$$

Für das spezielle Supplement $\mathbf{T}(\mu) = \mathbf{S}^*(\mathbf{V}'(\mu))$ mit $\mu = 1$, $F(1) = S$ folgt daher

$$\mathbf{M}_S^{m'} = -\mathbf{T}(1) = -\mathbf{S}^*(\mathbf{V}'(1)) \in R_{M^n} \subseteq C_{M^n}\ ,$$

sodass $\mathbf{M}_S^{m'}$ eine SB-Linearkombination der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{P}_{E_j}^j$ und $\mathbf{M}_{E_j}^j$ ist, also eine Linearkombination, bei der die Parameter $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{M}_S^{m'})$ und die Supplementtypindizes $E_j = E_j(\mathbf{M}_S^{m'})$ die Supplementbedingung (SBPM) erfüllen:

$$\mathbf{M}_S^{m'} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{P}_{E_j}^j + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m'}}^{n} \lambda_j \mathbf{M}_{E_j}^j + \lambda_{m'} \mathbf{M}_{E_{m'}}^{m'} ,$$

also

$$- d_{m,m',S} \cdot \mathbf{e}_{m+1} + \mathbf{e}_{m'+1} = - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{e}_j + \left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_{E_j,m}^j + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m'}}^{n} \lambda_j M_{E_j,m}^j + \lambda_{m'} M_{E_{m'},m}^{m'} \right] \mathbf{e}_{m+1} + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m'}}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_{j+1} + \lambda_{m'} \mathbf{e}_{m'+1} .$$

Aus den zugehörigen Komponentengleichungen

0	$= \lambda_j$	für $j = 1,\ldots,m$,
$- d_{m,m',S}$	$= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_{E_j,m}^j + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m'}}^{n} \lambda_j M_{E_j,m}^j + \lambda_{m'} M_{E_{m'},m}^{m'}$	für Koeff. bei $\mathbf{e}_{m+1}$,
0	$= \lambda_j$	für $j = m+1,\ldots,n, j \neq m'$,
1	$= \lambda_{m'}$	($j = m'$, Koeff. bei $\mathbf{e}_{m'+1}$)

erhält man $\lambda_j = 0$ für $j = 0,\ldots,n, j \neq m'$, $\lambda_{m'} = 1$, nach (SBPM) $E_{m'} = H$, somit

$$\mathbf{M}_S^{m'} = \lambda_{m'} \mathbf{M}_{E_{m'}}^{m'} = \mathbf{M}_H^{m'}$$

und daraus für die $(m+1)$-te Komponente des Spaltenvektors $\mathbf{M}_S^{m'}$ oder bei Verwendung der Komponentengleichung zum Basisvektor $\mathbf{e}_{m+1}$ die Bedingung

$$- d_{m,m',S} = \lambda_{m'} M_{E_{m'},m}^{m'} = 1 \cdot M_{H,m}^{m'} = - d_{m,m',H}$$

bzw. (GDmm')

$$d_{m,m',S} = d_{m,m',H} =: d_{m,m'}.$$

Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung (GDmm') nachgewiesen. Gleichbedeutend zur Diskontierungsfaktor-Gleichung (GDmm') ist die Übereinstimmung der Zahlungsströme

$$\mathbf{M}_S^{m'} = \mathbf{M}_H^{m'} =: \mathbf{M}^{m'} = - d_{m,m'} \cdot \mathbf{e}_{m+1} + \mathbf{e}_{m'+1} = (0,\ldots,0,-d_{m,m'},0,\ldots,0,1,0\ldots,0)^{\mathsf{T}}.$$

c) **Nichttrivialer Linienkegel R_{M^n} ist notwendige Bedingung:**

Für die beiden zum Index $j = m'$ gehörigen Supplemente $\mathbf{S}_S^{m'}$, $\mathbf{S}_H^{m'} \in L$ folgt mit (GDmm') bzw. mit $\mathbf{M}_S^{m'} = \mathbf{M}_H^{m'} = \mathbf{M}^{m'}$ dann weiter, dass das eine Supplement der umgekehrte Zahlungsstrom (Gegenvektor, das Negative, additiv Inverse) des anderen Supplements ist:

$$- \mathbf{S}_S^{m'} = \mathbf{M}_S^{m'} = \mathbf{M}_H^{m'} = \mathbf{S}_H^{m'} \in L \subseteq K^* \text{ und}$$

$$- \mathbf{S}_H^{m'} = \mathbf{S}_S^{m'} \in L \subseteq K^*.$$

Insbesondere liegen dann diese beiden Supplemente im Linienkegel R_{M^n} und im Linienraum V^* des Kapitalmarkts K^*:

$$\mathbf{S}_S^{m'}, \mathbf{S}_H^{m'} \in C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) = R_{M^n} \subseteq V^* := K^* \cap (-K^*).$$

Der Linienkegel R_{M^n} von C_{M^n} enthält also die vom Supplement $\mathbf{M}^{m'}$ aufgespannte Gerade durch den Nullpunkt und ist somit nichttrivial:

$$(O \neq) \operatorname{lin} \mathbf{M}^{m'} \subseteq R_{M^n} .$$

d) **(GAmm') ist notwendige Bedingung**:
Hierzu folgert man aus der Bedingung (GZS) nach Satz 5.1 zunächst

$$\succcurlyeq_Z = \trianglerighteq_{RLV} = \trianglerighteq_{RL'V}.$$

Mit Satz 5.5 c) bzw. mit den Ausführungen von Abschnitt 8.3.5 schließt man ohne (AF*') aus der Übereinstimmung der beiden Zeitwert-Präferenzordnungen

$$\succcurlyeq_{Z'} = \trianglerighteq_{RL'V'} \text{ und}$$

$$\succcurlyeq_Z = \trianglerighteq_{RLV} = \trianglerighteq_{RL'V},$$

dass bei dem fest vorgegebenen Supplementsystem L' die beiden Beurteilungskurven $\mathbf{V}(\mu)$ und $\mathbf{V}'(\mu)$ L'-äquivalent sind,

$$\mathbf{V} \sim_{L'} \mathbf{V}',$$

also die Bedingung (LRÄ) mit dem Supplementsystem L' an Stelle von L erfüllt ist:

$$\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}) + C'_{M^n} = C'_{M^n} \quad \text{für jedes } \mathbf{Y} \in \mathbf{V}(\mathbb{R}).$$

In der Bedingung (LRÄ) ist $\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y})$ das Supplement von $\mathbf{Y} = \mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m+1}$, $\mu \in \mathbb{R}$, das zur speziellen Replizierung von $\mathbf{Y}$ mittels Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$, Supplementmenge L' und Beurteilungskurve $\mathbf{V}'(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m'+1}$ gehört. Die Arbitragefreiheit (AF*') von $K^{*\prime}$ wird nur für die Beweisrichtung (siehe Beweisteil 2, b) benötigt, um aus der zu Supplementsystem L', Beurteilungskurve $\mathbf{V}'(\mu)$ und Bildmenge $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ gehörigen Bedingung (LRÄ) mit Satz 5.5 c) bzw. Abschnitt 8.3.5 auf die Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RL'V}$ und $\trianglerighteq_{RL'V'}$ zu schließen. Auch für die nachfolgend verwendete Inzidenz $\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}) \in R'_{M^n} \subseteq -C'_{M^n}$ wird (AF*') nicht benötigt.

Die **Berechnung des Supplements**

$$\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}) = \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{V}(\mu)) =: \mathbf{T}'(\mu)$$

des Kurvenpunkts $\mathbf{Y} = \mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m+1}$ erfolgt folgendermaßen: Die Replizierungsgleichung

$$\mathbf{Y} + \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}) = \mathbf{V}'(v'(\mathbf{Y})),\ \ \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}) \in C'_{M^n},$$

von $\mathbf{Y} = \mathbf{V}(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m+1}$ ergibt die Vektorgleichung

$$\mu\mathbf{e}_{m+1} + \sum_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathbf{P}'^{j}_{E_j} + \sum_{j=m'+1}^{n} \lambda_j \mathbf{M}'^{j}_{E_j} = v'\mathbf{e}_{m'+1}$$

mit dem Kurvenparameter μ, dem Beurteilungsparameter $v' = v'(\mathbf{Y})$ und den Transformationsparametern $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{Y})$, die zusammen mit den Supplementtypindizes $E_j = E_j(\mathbf{Y})$ die Supplementbedingung (SBPM) erfüllen. Sortiert nach den Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_j$ lautet die Vektorgleichung

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m+1}}^{m'} \lambda_j \mathbf{e}_j - \lambda_{m+1}\mathbf{e}_{m+1} + \mu\,\mathbf{e}_{m+1} + \left[\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j P'^{j}_{E_j,m'} - v' + \sum_{j=m'+1}^{n} \lambda_j M'^{j}_{E_j,m'}\right]\mathbf{e}_{m'+1} + \sum_{j=m'+1}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_{j+1} = 0.$$

Aus den zugehörigen Komponentengleichungen

$$\begin{aligned}
&\lambda_j &&= 0 \quad \text{für } j = 1,\dots,m',\ j \neq m+1\ (\leq m'),\\
&-\lambda_{m+1} + \mu &&= 0 \quad (j = m+1,\ \text{Koeff. bei } \mathbf{e}_{m+1}),\\
&+\lambda_j &&= 0 \quad \text{für } j = m'+1,\dots,n,\\
&\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j P'^{j}_{E_j,m'} - v' + \sum_{j=m'+1}^{n} \lambda_j M'^{j}_{E_j,m'} &&= 0 \quad (\text{Koeff. bei } \mathbf{e}_{m'+1})
\end{aligned}$$

erhält man die Transformationsparameter

$$\lambda_j = 0 \text{ für } j = 1,\dots,n,\ j \neq m+1,$$

den $(m+1)$-ten Transformationsparameter

$$\lambda_{m+1} = \mu,$$

nach (SBPM) den $(m+1)$-ten Supplementtypindex

$$\begin{aligned}
&E_{m+1} = D(\mu) && \text{mit}\\
&D(\mu) = H && \text{bei } \mu \geq 0,\\
&D(\mu) = S && \text{bei } \mu < 0,
\end{aligned}$$

den Beurteilungsparameter $v' = \lambda_{m+1} P'^{m+1}_{E_{m+1},m'} = \mu \cdot a_{m,m',D(\mu)}$ und das Supplement

$$\mathbf{T}'(\mu) = \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{V}(\mu)) = \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}) = \lambda_{m+1} P'^{m+1}_{E_{m+1}} = \mu\,\mathbf{P}'^{m+1}_{D(\mu)}\,.$$

Folgerung der Bedingung (GAmm'): Aus (LRÄ) folgt gemäß Abschnitt 8.3.5 (ohne die Voraussetzung (AF*')) die weitere notwendige Bedingung (LRÄ1) für das Supplementsystem L', nämlich

$$\mathbf{T}'(\mu) = \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}) \in R'_{M^n} = C'_{M^n} \cap (-C'_{M^n}) \subseteq -C'_{M^n},$$

speziell für $\mu = 1$, $D(1) = H$ dann

$$-\mathbf{P}'^{m+1}_{H} = -\mathbf{T}'(1) \in C'_{M^n}\,.$$

Analog zur Begründung von (GDmm') als notwendige Bedingung in Teil b) wird nun mit der Darstellung von $-\mathbf{P}'^{m+1}_{H}$ als SB-Linearkombination der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{P}'^{j}_{E_j}$ und $\mathbf{M}'^{j}_{E_j}$ die Bedingung (GAmm')

$$a_{m,m',H} = a_{m,m',S} =: a_{m,m'}$$

bzw.

$$\mathbf{P'}_S^{m+1} = \mathbf{P'}_H^{m+1} =: \mathbf{P'}^{m+1} = -\mathbf{e}_{m+1} + a_{m,m'}\cdot\mathbf{e}_{m'+1} = (0,..,-1,0,..,0,a_{m,m'},0,..,0)^T$$

gefolgert: Aus der Linearkombination für $-\mathbf{P'}_H^{m+1}$ erhält man nämlich die Vektorgleichung

$$\mathbf{e}_{m+1} - a_{m,m',H}\,\mathbf{e}_{m'+1}$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m+1}}^{m'} \lambda_j \mathbf{P'}_{E_j}^j + \lambda_{m+1}\mathbf{P'}_{E_{m+1}}^{m+1} + \sum_{j=m'+1}^{n} \lambda_j \mathbf{M'}_{E_j}^j$$

$$= -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m+1}}^{m'} \lambda_j \mathbf{e}_j - \lambda_{m+1}\mathbf{e}_{m+1} + \left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m+1}}^{m'} \lambda_j P'^j_{E_j,m'} + \lambda_{m+1} P'^{m+1}_{E_{m+1},m'} + \sum_{j=m'+1}^{n} \lambda_j M'^j_{E_j,m'}\right]\mathbf{e}_{m'+1} + \sum_{j=m'+1}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_{j+1}$$

und daraus $\lambda_j = 0$ für $j = 1,\ldots,m'$, $j \neq m+1$, $\lambda_{m+1} = -1$ ($j = m+1$), $E_{m+1} = S$, $\lambda_j = 0$ für $j = m'+1,\ldots,n$ und dann aus der zum Basisvektor $\mathbf{e}_{m'+1}$ gehörigen Komponentengleichung

$$-a_{m,m',H} = \lambda_{m+1} P'^{m+1}_{E_{m+1},m'} = -1\cdot P'^{m+1}_{S,m'} = -a_{m,m',S}\,,$$

also die Bedingung (GAmm‘) $a_{m,m',H} = a_{m,m',S} = a_{m,m'}$.

e) **Nichttrivialer Linienkegel R'_{M^n} ist notwendige Bedingung**:

Analog zum obigen Nachweis der Inklusion lin $\mathbf{M}^{m'} \subseteq R_{M^n}$ in Teil c) mittels der Bedingung (GDmm’) folgt nun aus der Bedingung (GAmm’) bzw. aus $\mathbf{P'}_S^{m+1} = \mathbf{P'}_H^{m+1} = \mathbf{P'}^{m+1}$, dass der Linienkegel R'_{M^n} die vom Supplement $\mathbf{P'}^{m+1}$ aufgespannte Gerade durch den Nullpunkt enthält und daher nichttrivial ist (der ausführliche Beweis wird weggelassen):

$$(O \neq)\ \mathrm{lin}\ \mathbf{P'}^{m+1} \subseteq R'_{M^n}\,.$$

Da wegen (GZS) auch die Linienkegel R'_{M^n} und R_{M^n} übereinstimmen, gilt auch die Inklusion

$$\mathrm{lin}\ \mathbf{P'}^{m+1} \subseteq R_{M^n}\,.$$

f) **Reziproke Werte $d_{m,m'}$ und $a_{m,m'}$ und gleiche Richtung von $\mathbf{M}^{m'}$ und $\mathbf{P'}^{m+1}$ sind notwendige Bedingungen**:

Mit Verwendung von (GZS) und von (GDmm‘) bzw. $\mathbf{M}_S^{m'} = \mathbf{M}_H^{m'} = \mathbf{M}^{m'}$ folgen aus der in d) hergeleiteten Inzidenz

$$\mathbf{P'}^{m+1} \in C'_{M^n} = C_{M^n}$$

bzw. der zugehörigen Vektorgleichung

$$\mathbf{P'}^{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{P}_{E_j}^j + \sum_{\substack{j=m+1\\ j\neq m'}}^{n} \lambda_j \mathbf{M}_{E_j}^j + \lambda_{m'}\mathbf{M}^{m'}$$

bzw.

$$-\mathbf{e}_{m+1} + a_{m,m'}\cdot\mathbf{e}_{m'+1} = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{e}_j + \left[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j P^j_{E_j,m} + \sum_{\substack{j=m+1\\ j\neq m'}}^{n} \lambda_j M^j_{E_j,m} + \lambda_{m'} M^{m'}_m\right]\mathbf{e}_{m+1} + \sum_{\substack{j=m+1\\ j\neq m'}}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_{j+1} + \lambda_{m'}\mathbf{e}_{m'+1}$$

mit der abgeschwächten Supplementbedingung (SBPM:$j\neq m'$) die zugehörigen Komponentengleichungen

(i) $\quad 0 = \lambda_j \quad$ für $j = 1,\ldots,m$,

(ii) $\quad -1 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P^j_{E_j,m} + \sum_{\substack{j=m+1\\ j\neq m'}}^{n} \lambda_j M^j_{E_j,m} + \lambda_{m'} M^{m'}_m \quad$ (Koeff. bei $\mathbf{e}_{m+1}$),

(iii) $\quad 0 = \lambda_j \quad$ für $j = m+1,\ldots,n$, $j \neq m'$ ($\geq m+1$),

(iv) $a_{m,m'} = \lambda_{m'}$ ($j = m'$, Koeff. bei $\mathbf{e}_{m'+1}$).
Aus (i) und (iii) erhält man $\lambda_j = 0$ für $j = 1,\ldots,n, j \neq m'$, aus (iv) $\lambda_{m'} = a_{m,m'}$ und dann

$$\mathbf{P}'^{m+1} = \lambda_{m'}\mathbf{M}^{m'} = a_{m,m'}\mathbf{M}^{m'}.$$

Die beiden elementaren Zahlungsströme $\mathbf{M}^{m'}$ und $\mathbf{P}'^{m+1}$ haben also dieselbe Richtung. Mit (ii) erhält man noch die Bedingung

$$-1 = \lambda_{m'}M_m^{m'} = a_{m,m'}\cdot(-d_{m,m'}),$$

also die notwendige Bedingung, dass die beiden zum Paar (m,m') gehörigen Transpositionsfaktoren $d_{m,m'}$ und $a_{m,m'}$ jeweils der Kehrwert des anderen sind:

$$d_{m,m'} = 1/a_{m,m'}.$$

Insbesondere folgt noch ray $\mathbf{P}'^{m+1}$ = ray $\mathbf{M}^{m'}$ und

$$\text{lin } \mathbf{P}'^{m+1} = \text{lin } \mathbf{M}^{m'}.$$

2) a) **(GZS) ist zusammen mit (GDmm') hinreichende Bedingung** für die Übereinstimmung der Zeitwert-Präferenzordnungen:
Zunächst wird nun gezeigt, dass (GDmm') auch hinreichend für die L-Äquivalenz der Beurteilungskurven $\mathbf{V}'(\mu)$ und $\mathbf{V}(\mu)$ bzw. für die Gültigkeit der Bedingung (LRÄ') ist:

$$\mathbf{T}(\mu) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \text{für jedes } \mu \in \mathbb{R}.$$

Bei Gültigkeit der Bedingung (GDmm') ist

$$\mathbf{M}_S^{m'} = \mathbf{M}_H^{m'} = \mathbf{M}^{m'},$$

sodass bei jeder SB-Linearkombination der Zahlungsströme $\mathbf{P}_{E_j}^j$ und $\mathbf{M}_{E_j}^j$ die Supplementbedingung (SBPM) beim Index $j = m'$ für den Transformationsparameter $\lambda_{m'} \in \mathbb{R}$ keine Einschränkung liefert: Für $\lambda_{m'} \geq 0$ wählt man die Übereinstimmung $\mathbf{M}^{m'} = \mathbf{M}_H^{m'}$ und für $\lambda_{m'} < 0$ die Übereinstimmung $\mathbf{M}^{m'} = \mathbf{M}_S^{m'}$. Demnach ist eine beliebige Linearkombination

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{P}_{E_j}^j + \lambda_{m'}\mathbf{M}^{m'} + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m'}}^{n} \lambda_j \mathbf{M}_{E_j}^j$$

der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{P}_{E_j}^j$ ($j = 1,\ldots,m$) und $\mathbf{M}_{E_j}^j$ ($j = m+1,\ldots,n$) genau dann ein Element von C_{M^n} bzw. eine SB-Linearkombination, wenn nur die folgende abgeschwächte Supplementbedingung gilt:

(SBPM:$j \neq m'$) $E_j = H$ bei $\lambda_j \geq 0$,
$E_j = S$ bei $\lambda_j < 0$, $j = 1,\ldots,n, j \neq m'$.

„$\subseteq$“: Zum Nachweis der Inklusion $\mathbf{T}(\mu) + C_{M^n} \subseteq C_{M^n}$ ist für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{R} \in C_{M^n}$ zu zeigen, dass die Summe $\mathbf{T}(\mu) + \mathbf{R}$ in C_{M^n} liegt. Für $\mathbf{R}$ gilt wegen (GDmm') die Darstellung

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{P}_{E_j}^j + \lambda_{m'}\mathbf{M}^{m'} + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m'}}^{n} \lambda_j \mathbf{M}_{E_j}^j$$

mit abgeschwächter Supplementbedingung (SBPM:$j \neq m'$). Damit folgt auch für die Summe von $\mathbf{T}(\mu) = -\mu\mathbf{M}_{F(\mu)}^{m'} = -\mu\mathbf{M}^{m'}$ und $\mathbf{R}$ die Darstellung

$$\mathbf{T}(\mu) + \mathbf{R} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{P}_{E_j}^j + (\lambda_{m'} - \mu)\mathbf{M}^{m'} + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j \neq m'}}^{n} \lambda_j \mathbf{M}_{E_j}^j$$

mit abgeschwächter Supplementbedingung (SBPM:$j \neq m'$), sodass $\mathbf{T}(\mu) + \mathbf{R} \in C_{M^n}$ gilt.

„$\supseteq$“: Da die Inklusion $\mathbf{T}(\mu) + C_{M^n} \supseteq C_{M^n}$ gleichbedeutend zu

$$C_{M^n} \supseteq C_{M^n} - \mathbf{T}(\mu)$$

ist, ist für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{R} \in C_{M^n}$ zu zeigen, dass die Differenz $\mathbf{R}$ - $\mathbf{T}(\mu)$ in C_{M^n} liegt. Wie eben für die Summe von $\mathbf{R}$ und $\mathbf{T}(\mu) = -\mu\, \mathbf{M}^{m'}$ begründet wurde, so erhält man auch für deren Differenz eine Linearkombination der $\mathbf{P}_{E_j}^{j}$ und $\mathbf{M}_{E_j}^{j}$, welche die abgeschwächte Supplementbedingung (SBPM:$j{\neq}m$‘) erfüllt. Daher liegt auch die Differenz in C_{M^n}. Insgesamt ist damit die Gültigkeit der Bedingung (LRÄ‘) nachgewiesen.
Aus (GZS), (LRÄ') und der zusätzlichen Voraussetzung der **Arbitragefreiheit** (AF*) von K* kann dann mit Satz 5.5 c) bzw. mit den Ausführungen von Abschnitt 8.3.5 geschlossen werden, dass die beiden Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ übereinstimmen.

b) **(GZS) ist zusammen mit (GAmm’) hinreichende Bedingung** für die Übereinstimmung der Zeitwert-Präferenzordnungen:

Zunächst wird gezeigt, dass (GAmm‘) auch hinreichend für die L‘-Äquivalenz der Beurteilungskurven $\mathbf{V}(\mu)$ und $\mathbf{V}$‘(μ) ist bzw. für die Bedingung (LRÄ) mit dem Supplementsystem L‘ an Stelle von L. Dazu wird begründet, dass für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{R} \in C'_{M^n}$ sowohl die Summe $\mathbf{R} + \mathbf{T}$‘(μ) als auch die Differenz $\mathbf{R}$ - $\mathbf{T}$‘(μ) von $\mathbf{R}$ und $\mathbf{T}$‘$(\mu) = \mu\, \mathbf{P}'^{m+1}_{D(\mu)} = \mu\, \mathbf{P}'^{m+1}$ in C'_{M^n} liegt. Dies ist tatsächlich der Fall, da wegen (GAmm‘) bzw. wegen $\mathbf{P}'^{m+1}_S = \mathbf{P}'^{m+1}_H = \mathbf{P}'^{m+1}$ der Zahlungsstrom $\mathbf{R}$ eine Linearkombination der $\mathbf{P}'^{j}_{E_j}$ und $\mathbf{M}'^{j}_{E_j}$ mit abgeschwächter Supplementbedingung (SBPM:$j{\neq}m$+1) ist und dann auch die Summe $\mathbf{R} + \mathbf{T}$‘(μ) und die Differenz $\mathbf{R}$ - $\mathbf{T}$‘(μ) jeweils eine Linearkombination mit dieser abgeschwächten Supplementbedingung ist und in C'_{M^n} liegt. Damit ist die Gültigkeit der Bedingung (LRÄ) nachgewiesen.
Aus (GZS), (LRÄ) und der zusätzlichen Voraussetzung der **Arbitragefreiheit** (AF*‘) von K*‘ kann dann mit Satz 5.5 c) geschlossen werden, dass die beiden Zeitwert-Präferenzordnungen übereinstimmen. Insgesamt ist damit der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

Aus Satz 6.1, 2) a) und b) erhält man als Spezialfall für die Vergleichszeitpunkte $m = 0$ und m‘ $= n$ und unter der Voraussetzung, dass einer der beiden fiktiven Kapitalmärkte K* oder K*‘ arbitragefrei ist, den Zusatz 6.2 mit der Charakterisierung der Übereinstimmung der Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ mit der Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$.

Zusatz 6.2 Übereinstimmung der Barwert- und Endwert-Präferenzordnung

a) Für den zum Supplementsystem $L = L(\mathbf{K}_{E_j}^{j})$ der Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ gebildeten fiktiven Kapitalmarkt

$$K^* := \text{cone } L(\mathbf{K}_{E_j}^{j}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

sei die Arbitragefreiheit vorausgesetzt,

(AF*) $\quad K^* \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O,$

was durch folgende Ungleichungen für die Soll- und Habenwerte der gespaltenen Abzinsungsfaktoren charakterisiert wird:

(UD0) $\quad d_{0,j,S} \leq d_{0,j,H} \qquad (j = 1,\ldots n).$

Die zu den Vergleichszeitpunkten $m = 0$ und m‘ $= n$ gehörige Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ und Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$ stimmen genau dann überein,

$$\succcurlyeq_B\, = \,\succcurlyeq_E,$$

wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Die zu den Supplementsystemen $L = L(\mathbf{K}_{E_j}^j)$ und $L' = L(\mathbf{R}_{E_j}^j)$ der Barwert- und Endwert-Präferenzordnung gehörigen zulässigen Supplementmengen stimmen überein:

(GZS) $C_{M^n} = C_{M'^n}$.

2) Der zu den beiden Vergleichszeitpunkten $m = 0$ und $m' = n$ gehörige Abzinsungsfaktor d_{0,n,F_n} ist kein gespaltener Abzinsungsfaktor, d. h. es stimmen der $(n+1)$-te Haben- und der $(n+1)$-te Soll-Abzinsungsfaktor überein:

(GD0n) $d_{0,n,H} = d_{0,n,S} = d_{0,n}$.

b) Für den zum Supplementsystem $L' = L(\mathbf{R}_{E_j}^j)$ der Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$ gebildeten fiktiven Kapitalmarkt

$$K^{*\prime} := \text{cone } L(\mathbf{R}_{E_j}^j) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

sei die Arbitragefreiheit vorausgesetzt,

(AF*') $K^{*\prime} \cap \mathbb{R}_{+0}^{n+1} = O$,

was durch folgende Ungleichungen für die Soll- und Habenwerte der gespaltenen Aufzinsungsfaktoren charakterisiert wird:

(UAn) $a_{j,n,S} \geq a_{j,n,H}$ $(j = 0,\ldots,n\text{-}1)$.

Die zu den Vergleichszeitpunkten $m = 0$ und $m' = n$ gehörige Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ und Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$ stimmen genau dann überein,

$$\succcurlyeq_B = \succcurlyeq_E,$$

wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Die zu den Supplementsystemen $L = L(\mathbf{K}_{E_j}^j)$ und $L' = L(\mathbf{R}_{E_j}^j)$ der Barwert- und Endwert-Präferenzordnung gehörigen zulässigen Supplementmengen stimmen überein:

(GZS) $C_{M^n} = C_{M'^n}$.

2) Der zu den beiden Vergleichszeitpunkten $m = 0$ und $m' = n$ gehörige Aufzinsungsfaktor a_{0,n,D_0} ist kein gespaltener Aufzinsungsfaktor, d. h. es stimmen der erste Haben- und der erste Soll-Aufzinsungsfaktor überein:

(GA0n) $a_{0,n,H} = a_{0,n,S} = a_{0,n}$.

Die Aussage von Satz 6.1, 2) für den Spezialfall, dass bei einer der beiden Zeitwertbildungen nur nichtgespaltene Auf- und Abzinsungsfaktoren auftreten, wird im Zusatz 6.3, 2) noch genauer beschrieben.

Zusatz 6.3 Vielfalt der Zeitwert-Präferenzordnungen bei nichtgespaltenen Auf- und Abzinsungsfaktoren

1) Die Gleichungen für die Auf- und Abzinsungsfaktoren

(GA) $a_{j,m,S} = a_{j,m,H} =: a_{j,m}$ $(j = 0,\ldots,m)$,

(GD) $d_{m,j,S} = d_{m,j,H} =: d_{m,j}$ $(j = m+1,\ldots n)$

besagen, dass keine gespaltenen Auf- und Abzinsungsfaktoren beim Supplementsystem $L = L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j})$ der Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ vorliegen, und charakterisieren ein vollkommenes Supplementsystem L und einen arbitragefreien und vollkommenen Kapitalmarkt $K^* :=$ cone $L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$:

i) Für den fiktiven Kapitalmarkt K^* liegt die Arbitragefreiheit vor:

(AF*) $K^* \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$.

ii) Das Supplementsystem $L = L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j})$ ist ein vollkommenes Supplementsystem von K^*,

(LV) $L = L_V$,

die zulässige Supplementmenge $C_{M^n} = C_{M^n}(L)$ und der Kapitalmarkt K^* sind gleich der Hyperebene mit Normalenvektor $\mathbf{T}^m$,

$$K^* = C_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0} \quad \text{mit } \mathbf{T}^m = (a_{0,m},\ldots,a_{m,m},d_{m,m+1},\ldots,d_{m,n})^{\mathsf{T}},$$

und K^* ist somit ein vollkommener Kapitalmarkt.

2) Unter Voraussetzung der Gleichungen (GA) und (GD) für die Transpositionsfaktoren des Supplementsystems $L = L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j})$ der Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ gilt dann die folgende Aussage: Die zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten m, $m' \in \{0,\ldots,n\}$, $m < m'$, gehörigen Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ stimmen genau dann überein,

$$\succcurlyeq_Z = \succcurlyeq_{Z'},$$

wenn noch die Transpositionsvektoren $\mathbf{T}^m$ und $\mathbf{T}^{m'}$ der zugehörigen Zeitwert-Funktionen $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ und $Z_{m',n}(\mathbf{X})$ die gleiche Richtung besitzen:

(GRT) $\mathbf{T}^{m'} = \delta\cdot\mathbf{T}^m$ mit einem $\delta > 0$.

Anmerkung: Die Aussage von Zusatz 6.3, 2) über die Charakterisierung der Übereinstimmung der Zeitwert-Präferenzordnungen durch die gleiche Richtung ihrer Transpositionsvektoren gilt auch unter der analogen Voraussetzung der Gleichungen (GA') und (GD') für die Transpositionsfaktoren $a_{j,m',H/S}$ und $d_{m',j,H/S}$ des Supplementsystems $L' = L(m',\mathbf{P}'^j_{E_j},\mathbf{M}'^j_{E_j})$ des zweiten Vergleichszeitpunkts m'.

Beweis des Zusatzes 6.3: a) Als Erstes wird gezeigt, dass die Gleichungen (GA) und (GD) charakteristisch dafür sind, dass $L = L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j})$ ein vollkommenes Supplementsystem und $K^* :=$ cone L ein arbitragefreier Kapitalmarkt ist:

$$\text{(GA)} \wedge \text{(GD)} \iff \text{(AF*)} \wedge \text{(LV)}.$$

„⇐“: Bei Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF*) von K^* gelten nach Abschnitt 6.3.4 für die Auf- und Abzinsungsfaktoren die Ungleichungen (UA) und (UD) und für die Supplemente $\mathbf{S}_H^j$, $\mathbf{S}_S^j \in L \subseteq K^*$ die Ungleichungen (siehe Beweisteil 1 in Abschnitt 6.3.4)

$$\mathbf{S}_H^j + \mathbf{S}_S^j \le \mathbf{O}$$

$(j = 1,\ldots,n)$:

Es ist nämlich zu fest gedachtem Index j das Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{S} := \mathbf{S}_H^j + \mathbf{S}_S^j = \sigma_j \mathbf{e}_{m+1}$ mit

$$\sigma_j = a_{j\text{-}1,m,H} - a_{j\text{-}1,m,S} \quad (j = 1,\ldots,m) \text{ bzw.}$$
$$\sigma_j = d_{m,j,S} - d_{m,j,H} \quad (j = m+1,\ldots n),$$

wegen der Arbitragefreiheit (AF*) $\mathbf{S} \not> \mathbf{O}$, somit $\sigma_j \le 0$ und $\mathbf{S} \le \mathbf{O}$.

Bei Voraussetzung des Falls (LV) $L = L_V$ eines vollkommenem Supplementsystems L gilt auch $-L \subseteq K^*$ gilt, sodass mit (AF*) analog

$$-\mathbf{S}_H^j - \mathbf{S}_S^j \le \mathbf{O}$$

und ingesamt $\mathbf{S}_H^j + \mathbf{S}_S^j = \mathbf{O}$ folgt, was für die Indizes $j = 1,\ldots,m$ die Gleichungen (GA) und für die Indizes $j = m+1,\ldots,n$ die Gleichungen (GD) ergibt.

„⇒“: Umgekehrt folgen aus den Gleichungen (GA) und (GD) auch die Ungleichungen (UA) und (UD) und damit nach Abschnitt 6.3.4 die Arbitragefreiheit (AF*) von K^*.

Weiter sind die Gleichungen (GA) und (GD) für die Auf- und Abzinsungsfaktoren gleichbedeutend zu den Gleichungen

$$\mathbf{P}_S^j = \mathbf{P}_H^j =: \mathbf{P}^j \quad \text{für } j = 1,\ldots,m,$$
$$\mathbf{M}_S^j = \mathbf{M}_H^j =: \mathbf{M}^j \quad \text{für } j = m+1,\ldots,n$$

für die elementaren Zahlungsströme $\mathbf{P}_{E_j}^j$ und $\mathbf{M}_{E_j}^j$ und diese wieder gleichbedeutend zu den Gleichungen

$$-\mathbf{S}_S^j = \mathbf{P}_S^j = \mathbf{P}_H^j = \mathbf{S}_H^j, \quad -\mathbf{S}_H^j = \mathbf{S}_S^j \quad \text{für } j = 1,\ldots,m,$$
$$-\mathbf{S}_S^j = \mathbf{M}_S^j = \mathbf{M}_H^j = \mathbf{S}_S^j, \; -\mathbf{S}_H^j = \mathbf{S}_S^j \quad \text{für } j = m+1,\ldots,n$$

für die Supplemente $\mathbf{S}_{E_j}^j \in L$. Daher folgt aus den Gleichungen (GA) und (GD) die Beziehung

$$-L = L \subseteq K^*,$$

sodass die Gleichungen auch hinreichend für ein vollkommenes Supplementsystem L sind: $L = L_V$.

b) Als Zweites wird jetzt aus der Gültigkeit der Gleichungen (GA) und (GD) gefolgert, dass die zum Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}^j, \mathbf{M}^j)$ gehörige zulässige Supplementmenge C_{M^n} eine homogene (lineare) Hyperebene $H_{\mathbf{T}^m,0}$ ist, die orthogonal zum Transpositionsvektor $\mathbf{T}^m$ der m-ten Zeitwert-Funktion $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ ist:

$$\text{(GA)} \wedge \text{(GD)} \;\Rightarrow\; C_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0}.$$

In Abschnitt 6.3.2 wurde bereits die Zeitwertfunktion bei nicht gespaltenen Transpositionsfaktoren als lineare Funktion

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{n} T_j^m X_j = \mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{X}$$

mit dem für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ konstanten Transpositionsvektor

$$\mathbf{T}^m = (a_{0,m},\ldots,a_{m,m},d_{m,m+1},\ldots,d_{m,n})^\mathsf{T} \;(> \mathbf{O}) \qquad (a_{m,m} = 1)$$

beschrieben. Die Zeitwert-Funktion $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ ist hier also nicht nur eine orthantenweise lineare Abbildung, sondern auch eine auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ lineare Abbildung (ein Homomorphismus) $Z_{m,n} : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit dem Bildraum $\mathbb{R}$ und wird daher auch Linearform und lineares Funktional genannt. Der transponierte Vektor $\mathbf{T}^{m\mathsf{T}}$ von $\mathbf{T}^m$ ist die $1\times(n+1)$-Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $Z_{m,n}(\mathbf{X})$. Demzufolge ist bezüglich der Zeitwert-Indifferenzrelation $\sim_Z$ die Indifferenzklasse des Nullpunkts $\mathbf{O}$ gleich der Hyperebene mit dem nichtgespaltenen Transpositionsvektor $\mathbf{T}^m$ als Normalenvektor:

$$\text{Ind}_{\sim_Z}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \sim_Z \mathbf{O}\}$$

$$= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{X} = 0\}$$
$$= H_{\mathbf{T}^m,0}\,.$$

Andererseits erhält man für die R-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z = \trianglerighteq_{RLV}$ (Beweis in Abschnitt 6.3.3) diese Indifferenzklasse gemäß Abschnitt 5.2.2 bzw. Abschnitt 6.3.5 zu

$$\mathrm{Ind}_{\sim_Z}(\mathbf{O}) = \mathrm{Ind}_{RLV}(\mathbf{O}) = -C_{M^n}\,.$$

Insgesamt ergibt sich für die zulässige Supplementmenge die Hyperebenenstruktur mit dem Normalenvektor $\mathbf{T}^m$:

$$C_{M^n} = -\mathrm{Ind}_{\sim_Z}(\mathbf{O}) = H_{\mathbf{T}^m,0}\,.$$

c) Als Drittes wird gezeigt, dass die Gültigkeit der Gleichungen (GA) und (GD) gleichbedeutend dazu ist, dass der spezielle als konische Hülle erzeugte Kapitalmarkt $K^* = \mathrm{cone}\,L$ gleich der Hyperebene mit dem Transpositionsvektor $\mathbf{T}^m$ als Normalenvektor ist:

$$(\mathrm{GA}) \wedge (\mathrm{GD}) \iff K^* = H_{\mathbf{T}^m,0}\,.$$

„⇒“: Es seien die Gleichungen (GA) und (GD) vorausgesetzt. Wegen der in b) begründeten Inklusion $L \subseteq C_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0}$ und wegen der Vektorunterraumeigenschaft der Hyperebene folgen nämlich für den konvexen linearen Kegel $K^* = \mathrm{cone}\,L$ die Inklusionen

$$C_{M^n} \subseteq K^* = \mathrm{cone}\,L \subseteq \mathrm{lin}\,L \subseteq H_{\mathbf{T}^m,0} = C_{M^n}\,,$$

somit die Übereinstimmungen

$$K^* = C_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0}\,,$$

sodass auch $K^* = H_{\mathbf{T}^m,0}$ gilt und K^* als Vektorunterraum ein vollkommener Kapitalmarkt ist: $K^* = V$ mit $V = K^* \cap (-K^*)$. Wegen $L \subseteq K^*$ ist dann insbesondere auch L ein vollkommenes Supplementsystem: $L = L_V$. Wegen der Positivität des Normalenvektors $\mathbf{T}^m$ der Hyperebene $K^* = H_{\mathbf{T}^m,0}$ folgt dann nach dem Zusatz 8.2.4 zum Alternativsatz auch wieder die Arbitragefreiheit (AF*) von K^*.

„⇐“: Aus der speziellen Hyperebenenstruktur $K^* = H_{\mathbf{T}^m,0}$ ($\mathbf{T}^m > \mathbf{O}$) des Kapitalmarkts K^* folgen für die oben in Beweisteil a) benutzten Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S} := \mathbf{S}_H^j + \mathbf{S}_S^j = \sigma_j \mathbf{e}_{m+1} \in K^* = H_{\mathbf{T}^m,0}$ die Gleichungen

$$0 = \mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{S} = \sigma_j \mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{e}_{m+1} = \sigma_j a_{m,m} = \sigma_j \qquad (a_{m,m} = 1),$$

also $\sigma_j = 0$ und damit die Gleichungen (GA) und (GD). Insgesamt sind damit die Gleichungen (GA) und (GD) charakteristisch für diese Hyperebenenstruktur des Kapitalmarkts K^*.

d) Als Viertes wird gezeigt, dass aus den Gleichungen (GA) und (GD) für das Supplementsystem L und der Übereinstimmung (GZS) der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} und C'_{M^n} auch die Gültigkeit der entsprechenden Gleichungen (GA') und (GD') für das Supplementsystem $L' = L(m', \mathbf{P}'^j_{E_j}, \mathbf{M}'^j_{E_j})$ folgt:

$$(\mathrm{GA}) \text{ und } (\mathrm{GD}) \wedge (\mathrm{GZS}) \Rightarrow (\mathrm{GA'}) \text{ und } (\mathrm{GD'}),\; K^{*\prime} = C'_{M^n} = H_{\mathbf{T}^{m'},0}\,.$$

Aufgrund der Voraussetzungen folgt nach Beweisteil b)

$$C'_{M^n} = C_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0}\,.$$

Mit dem Beweisweg von c) „⇒“ ergeben sich analog aus $L' \subseteq C'_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0}$ die Inklusionen

$$C'_{M^n} \subseteq K^{*\prime} = \mathrm{cone}\,L' \subseteq H_{\mathbf{T}^m,0} = C'_{M^n}$$

und die Übereinstimmung $K^{*\prime} = H_{\mathbf{T}^m,0}$. Weiter erhält man analog mit Beweisweg c) „⇐“ jetzt für die Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{S}' := \mathbf{S}'^j_H + \mathbf{S}'^j_S = \sigma_j' \mathbf{e}_{m'+1} \in K^{*\prime} = H_{\mathbf{T}^m,0}$ mit

$$\sigma_j' = a_{j-1,m',H} - a_{j-1,m',S} \quad (j = 1,\ldots,m') \text{ bzw.}$$
$$\sigma_j' = d_{m',j,S} - d_{m',j,H} \quad (j = m'+1,\ldots n)$$

die Gleichungen

$$0 = \mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{S}' = \sigma_j' \,\mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{e}_{m'+1} = \sigma_j'\, d_{m,m'}, \qquad (d_{m,m'} > 0)$$

also $\sigma_j' = 0$ und damit die Gleichungen (GA') und (GD').
Aus der Gültigkeit der Gleichungen (GA') und (GD') für das Supplementsystem $L' = L(m', \mathbf{P}'^{j}_{E_j}, \mathbf{M}'^{j}_{E_j})$ kann dann analog zu den Beweisteilen b) und c) ebenso die entsprechende Hyperebenenstruktur für die zugehörige zulässige Supplementmenge C'_{M^n} und für den zugehörigen fiktiven Kapitalmarkt $K^{*\prime} :=$ cone L' geschlossen werden:

$$K^{*\prime} = C'_{M^n} = H_{\mathbf{T}^{m'},0}\,.$$

e) Als Fünftes wird jetzt unter den Voraussetzungen (GA) und (GD) die Gleichwertigkeit der Bedingung (GZS) zur Bedingung (GRT) für die Transpositionsvektoren der Zeitwert-Funktionen bewiesen:

$$\text{(GZS)} \iff \text{(GRT)}.$$

Nach Satz 6.1 ergibt sich dann, dass die Übereinstimmung der Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ auch durch die Bedingung (GRT) charakterisiert wird, da die zusätzlich zu (GZS) benötigte Bedingung (GDmm') $d_{m,m',S} = d_{m,m',H}$ mit der Gleichung (GD) für $j = m'$ ($> m$) übereinstimmt.

„(GZS) $\Rightarrow$ (GRT)": Zunächst folgt für die beiden Supplementsysteme $L = L(m, \mathbf{P}^{j}_{E_j}, \mathbf{M}^{j}_{E_j})$ und $L' = L(m', \mathbf{P}'^{j}_{E_j}, \mathbf{M}'^{j}_{E_j})$ nach den Beweisteilen b) und d)

$$C_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0}\,,\ C'_{M^n} = H_{\mathbf{T}^{m'},0}\,.$$

Mit der Bedingung (GZS) $C_{M^n} = C'_{M^n}$ erhält man dann

$$[\mathbf{T}^{m'}]^{\perp} = H_{\mathbf{T}^{m'},0} = H_{\mathbf{T}^m,0} = [\mathbf{T}^m]^{\perp},$$

$[\mathbf{T}^{m'}] = [\mathbf{T}^m]$ und somit für die beiden Transpositionsvektoren die Beziehung

$$\mathbf{T}^{m'} = \delta \cdot \mathbf{T}^m \ \text{ mit } \delta = a_{m,m'} = a_{0,m'}/a_{0,m}\ (> 0).$$

Die Transpositionsvektoren haben also die gleiche Richtung, d. h. den gleichen Einheitsvektor $\mathbf{T}^{m'}/\|\mathbf{T}^{m'}\| = \mathbf{T}^m/\|\mathbf{T}^m\|$.

„(GRT) $\Rightarrow$ (GZS)": Umgekehrt erhält man aus der gleichen Richtung der Transpositionsvektoren $\mathbf{T}^m$ und $\mathbf{T}^{m'}$,

$$\mathbf{T}^{m'} = \delta \cdot \mathbf{T}^m \ \text{ mit einem reellen } \delta > 0,$$

mittels b) $C_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0}$ und d) $C'_{M^n} = H_{\mathbf{T}^{m'},0}$ auch die Gültigkeit der Bedingung (GZS)

$$C_{M^n} = H_{\mathbf{T}^m,0} = H_{\mathbf{T}^{m'},0} = C'_{M^n}\,.$$

Damit ist die Gleichwertigkeit der Bedingungen (GZS) und (GRT) bewiesen.
Die Übereinstimmung der Zeitwert-Präferenzordnungen kann aus der Bedingung (GRT) auch noch direkt geschlossen werden: Aus der gleichen Richtung der Transpositionsvektoren folgt nämlich, dass die zum Vergleichszeitpunkt m' gehörige Nutzenfunktion

$$Z_{m',n}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}^{m'\mathsf{T}}\mathbf{X} = \delta \cdot \mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{X} = \delta Z_{m,n}(\mathbf{X}) = g(Z_{m,n}(\mathbf{X}))$$

eine Komposition aus der zu m gehörigen Nutzenfunktion $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ und der durch $g(\mu) = \delta\mu$ definierten streng monoton steigenden Transformation $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist und somit die zugehörigen Präferenzordnungen übereinstimmen (Begründung zu Beginn von Kapitel 6 im Abschnitt zur Präferenzordnung der klassischen Methoden). Damit ist der Beweis des Zusatzes abgeschlossen. □

Im Spezialfall der Vergleichszeitpunkte $m = 0$ **und** $m' = n$ **mit nichtgespaltenen Abzinsungsfaktoren** $d_{0,j}$ **und nichtgespaltenen Aufzinsungsfaktoren** $a_{j,n}$ erhält man nach Zusatz 6.3, 2) die Aussage, dass die Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ und die Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$ genau dann übereinstimmen,

$$\succcurlyeq_B = \succcurlyeq_E,$$

wenn für die Transpositionsvektoren

$$\mathbf{T}^0 = (1, d_{0,1}, \ldots, d_{0,n})^\mathsf{T} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}^n = (a_{0,n}, \ldots, a_{n-1,n}, 1)^\mathsf{T}$$

die Gleichung

$$\mathbf{T}^n = \delta \mathbf{T}^0 \ (\delta > 0) \qquad \text{(gleiche Richtung)}$$

gilt. Für die zugehörigen Ab- und Aufzinsungsfaktoren bedeutet dies

$$a_{j,n} = \delta \cdot d_{0,j} \ (j = 0, \ldots, n).$$

Für den Faktor $\delta = a_{j,n}/d_{0,j}$ erhält man speziell für $j = 0$ und $j = n$ wegen $d_{0,0} = 1$ und $a_{n,n} = 1$ die Werte $a_{0,n} = \delta = 1/d_{0,n}$ und dann für die Transpositionsfaktoren $a_{j,n}$ und $d_{0,j}$ die Bedingung

$$a_{j,n} = a_{0,n} \cdot d_{0,j} = d_{0,j}/d_{0,n} \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Für die Endwert- und Barwert-Funktion gilt dementsprechend

$$E_n(\mathbf{X}) = \mathbf{T}^{n\mathsf{T}}\mathbf{X} = a_{0,n}\, \mathbf{T}^{0\mathsf{T}}\mathbf{X} = a_{0,n} B_n(\mathbf{X}).$$

Bei beliebiger Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ und bei nichtgespaltenen Transpositionsfaktoren $d_{0,j}$ und $a_{j,n}$ gilt für die allgemeinere Barwert- und Endwert-Präferenzordnung

$$\succcurlyeq_B = \succcurlyeq_E \iff a_{j,n} = a_{0,n} \cdot d_{0,j} = d_{0,j}/d_{0,n} \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Der Spezialfall der Laufzeit $n = 1$ mit seinen möglichen Vergleichszeitpunkten $m = 0, 1$ lässt sich mit diesen Ergebnissen abschließend behandeln. Dazu wird nachfolgend gezeigt, dass bei der speziellen Laufzeit $n = 1$ die beiden möglichen allgemeinen Zeitwert-Präferenzordnungen, nämlich die Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ $(m = 0)$ zur Barwertfunktion

$$B_1(\mathbf{X}) = X_0 + X_1\, d_{0,1,F_1(\mathbf{X})}$$

und die Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$ $(m = 1)$ zur Endwertfunktion

$$E_1(\mathbf{X}) = X_0 a_{0,1,D_0(\mathbf{X})} + X_1,$$

genau dann übereinstimmen, wenn kein gespaltener Abzinsungsfaktor $d_{0,1,F}$ und kein gespaltener Aufzinsungsfaktor $a_{0,1,D}$ vorliegt und der Abzinsungsfaktor der Kehrwert des Aufzinsungsfaktors ist. Die Barwert- und die Endwert-Funktion besitzen also konstante Transpositionsvektoren $\mathbf{T}^0 = (1, d_{0,1})^\mathsf{T}$ und $\mathbf{T}^1 = (a_{0,1}, 1)^\mathsf{T}$. Die Reziprozität der Transpositionsfaktoren $d_{0,1}$ und $a_{0,1}$ ist gleichbedeutend zur gleichen Richtung der Transpositionsvektoren $\mathbf{T}^0$ und $\mathbf{T}^1$.

Für die Laufzeit $n = 1$ gilt

$$\succcurlyeq_B = \succcurlyeq_E \iff \begin{aligned} & d_{0,1,S} = d_{0,1,H} = d_{0,1}, \\ & a_{0,1,S} = a_{0,1,H} = a_{0,1}, \\ & d_{0,1} = 1/a_{0,1}. \end{aligned}$$

Beweis für die Charakterisierung der Übereinstimmung der Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ mit der Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$ bei $n = 1$:

„⇒“: Aus der Übereinstimmung $\succcurlyeq_B = \succcurlyeq_E$ der Barwert- und Endwert-Präferenzordnung für die Laufzeit $n = 1$ folgt nach Satz 6.1, 1) b), d), f) mit $m = 0$ und $m' = n = 1$, dass der Diskontierungsfaktor $d_{0,1,H/S}$ und der Aufzinsungsfaktor $a_{0,1,H/S}$ jeweils nichtgespalten ist und beide zueinander reziprok sind: $d_{0,1} = 1/a_{0,1}$.

„⇐“: Umgekehrt liegt bei nichtgespaltenen und zueinander reziproken Werten von $d_{0,1}$ und $a_{0,1}$ bei der Laufzeit $n = 1$ gleich der in Zusatz 6.3, 2) oder oben für Barwert- und Endwert-Präferenzordnung behandelte Spezialfall von nichtgespaltenen Auf- und Abzinsungsfaktoren vor: Für den Abzinsungsfaktor $d_{0,1}$ des Supplementsystems $L = L(\mathbf{K}^1_{E_1})$ der Barwert-Präferenzordnung gilt (GD), für den Aufzinsungsfaktor $a_{0,1}$ des Supplementsystems $L' = L(\mathbf{R}^1_{E_1})$ der Endwert-Präferenzordnung gilt (GA) und für beide gilt die Reziprozität $d_{0,1} = 1/a_{0,1}$ bzw. die Bedingung (GRT) $\mathbf{T}^1 = a_{0,1}\mathbf{T}^0$ (gleiche Richtung der Transpositionsvektoren $\mathbf{T}^1 = (a_{0,1},1)^\mathrm{T}$ und $\mathbf{T}^0 = (1,d_{0,1})^\mathrm{T}$). Nach Zusatz 6.3, 2) folgt dann die Übereinstimmung $\succcurlyeq_B = \succcurlyeq_E$. □

Weiter wird jetzt noch gezeigt, dass **ab einer Laufzeit $n \geq 2$** zwei Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z$ und $\succcurlyeq_{Z'}$ auch bei unvollkommener zugehöriger zulässiger Supplementmenge $C_{M^n} = C'_{M^n}$ ($\neq H_{\mathbf{T},0}$) übereinstimmen können. Dazu wird das nachfolgende Beispiel für $n = 2$, $m = 0$, $m' = n$ angegeben, bei dem die Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ mit der Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$ übereinstimmt, aber die zugehörigen Supplementsysteme L und L' nicht vollkommen sind. In Abbildung 6.11 sind dazu die zulässige Supplementmenge $C_{M^2} = C'_{M^2}$, der Linienkegel R_{M^2} und die L-äquivalenten Beurteilungskurven $\mathbf{V}(\mu)$ und $\mathbf{V}'(\mu)$ dargestellt.

Beispiel 6.1 Beispiel für die Übereinstimmung der Barwert-Präferenzordnung mit der Endwert-Präferenzordnung bei teilweise gespaltenen Auf- und Abzinsungsfaktoren

Bei der Laufzeit $n = 2$, den Vergleichszeitpunkten $m = 0$ und $m' = n = 2$, dem zu $m = 0$ gehörigen Supplementsystem

$$L = L(\mathbf{K}^j_{E_j}) = \{\mathbf{S}^1_H, \mathbf{S}^1_S, \mathbf{S}^2_H, \mathbf{S}^2_S\}$$

mit $\mathbf{S}^1_H = \mathbf{K}^1_H$, $\mathbf{S}^1_S = -\mathbf{K}^1_S$, $\mathbf{S}^2_H = \mathbf{K}^2_H$, $\mathbf{S}^2_S = -\mathbf{K}^2_S$ sei die Gültigkeit der Ungleichungen (UA) und (UD) für die Arbitragefreiheit von $K^* = \text{cone } L$ vorausgesetzt. Für die Übereinstimmung der Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_B$ mit der Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_E$ erhält man nach Satz 6.1, 1) a), b), d) die folgenden notwendigen Bedingungen

(GZS) $\quad C_{M^2} = C'_{M^2}$,

(GDmm') $\quad d_{0,2,S} = d_{0,2,H} =: d_{0,2} \quad$ bzw. $\mathbf{K}^2_S = \mathbf{K}^2_H =: \mathbf{K}^2$,

(GAmm') $\quad a_{0,2,S} = a_{0,2,H} =: a_{0,2} \quad$ bzw. $\mathbf{R}^1_S = \mathbf{R}^1_H =: \mathbf{R}^1$.

Aus der Gleichung (GDmm') ergibt sich, dass sich die zum Supplementsystem $L = L(\mathbf{K}^j_{E_j})$ gehörige zulässige Supplementmenge aus zwei Halbebenen zusammensetzt:

$$\begin{aligned} C_{M^2} &= C_{(H,H)} \cup C_{(H,S)} \cup C_{(S,H)} \cup C_{(S,S)} \\ &= (\text{ray } \mathbf{S}^1_H + \text{ray } \mathbf{S}^2_H) \cup (\text{ray } \mathbf{S}^1_H + \text{ray } \mathbf{S}^1_S) \cup (\text{ray } \mathbf{S}^1_S + \text{ray } \mathbf{S}^2_H) \\ &\quad \cup (\text{ray } \mathbf{S}^1_S + \text{ray } \mathbf{S}^2_S) \\ &= (\text{ray } \mathbf{K}^1_H + \text{ray } \mathbf{K}^2) \cup (\text{ray } \mathbf{K}^1_H + \text{ray } (-\mathbf{K}^2)) \\ &\quad \cup (\text{ray } (-\mathbf{K}^1_S) + \text{ray } \mathbf{K}^2) \cup (\text{ray } (-\mathbf{K}^1_S) + \text{ray } (-\mathbf{K}^2)) \end{aligned}$$

$= (\text{ray } \mathbf{K}_H^1 + G) \cup (\text{ray } (-\mathbf{K}_S^1) + G)$
$= H^H \cup H^S$

mit der Geraden $G := \text{ray } \mathbf{K}^2 + \text{ray } (-\mathbf{K}^2) = \text{lin } \mathbf{K}^2$ und den Halbebenen

$H^H := G + \text{ray } \mathbf{K}_H^1$,
$H^S := G + \text{ray } (-\mathbf{K}_S^1)$.

Wegen der Inzidenzen $\mathbf{K}^2 = \mathbf{S}_H^2 \in C_{M^2}$, $\mathbf{K}^2 = -\mathbf{S}_S^2 \in -C_{M^2}$, $\mathbf{K}^2 \in C_{M^2} \cap (-C_{M^2}) = R_{M^2}$ folgt für die Gerade G zunächst die Inklusion $G = \text{lin } \mathbf{K}^2 \subseteq R_{M^2}$. Die umgekehrte Inklusion wird nachfolgend noch gezeigt.

Damit hier ein unvollkommenes Supplementsystem L vorliegt, darf nach Zusatz 6.3, 1) wegen der oben begründeten Gültigkeit der Gleichung (GD02), also (GD) für $j = 2$, nicht auch noch die Gleichung (GD) für $j = 1$ erfüllt sein. Es muss also $d_{0,1,F}$ ein gespaltener Abzinsungsfaktor sein bzw. $\mathbf{K}_S^1 \neq \mathbf{K}_H^1$ gelten. Es wird nun gezeigt, dass dann der Linienkegel R_{M^2} durch die Gerade G gegeben ist. Um noch die Inklusion $R_{M^2} \subseteq G$ nachzuweisen, wird für die außerhalb der Geraden G liegenden Supplemente $\mathbf{S} \in C_{M^2} \setminus G = (H^H \cup H^S) \setminus G$ gezeigt, dass sie nicht in R_{M^2} liegen. Dazu wird die Fallunterscheidung $\mathbf{S} \in H^H \setminus G$ und $\mathbf{S} \in H^S \setminus G$ vorgenommen.

Für $\mathbf{S} \in H^H \setminus G \subseteq C_{M^2}$, d. h.

$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{K}_H^1 + \lambda_2 \mathbf{K}^2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$,

ist $\mathbf{T} := -\mathbf{S} \notin C_{M^2}$ und damit $\mathbf{S} \notin R_{M^2}$ zu zeigen. Dazu wird $\mathbf{T} \notin H^H$ und $\mathbf{T} \notin H^S$ jeweils mit einem Widerspruchsbeweis begründet. Aus der Annahme $\mathbf{T} \in H^H$, also

$\mathbf{T} = \mu_1 \mathbf{K}_H^1 + \mu_2 \mathbf{K}^2$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$,

ergibt sich, dass

$\mathbf{O} = \mathbf{S} + \mathbf{T} = (\lambda_1 + \mu_1)\,\mathbf{K}_H^1 + (\lambda_2 + \mu_2)\,\mathbf{K}^2$

wegen $\lambda_1 + \mu_1 \geq 0$ die eindeutig bestimmte Replizierung von $\mathbf{O}$ ist. Da deren Transformationsparameter alle den Wert Null haben, folgt der Widerspruch $\mu_1 = -\lambda_1 < 0$.

Aus der Annahme $\mathbf{T} \in H^S$, also

$\mathbf{T} = \mu_1 \mathbf{K}_S^1 + \mu_2 \mathbf{K}^2$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$,

ergibt sich die Nullvektordarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{S} + \mathbf{T} \\ &= \lambda_1(K_{H,0}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \mu_1(K_{S,0}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + (\lambda_2 + \mu_2)(K_0^2 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)\,\mathbf{K}^2 \\ &= (\lambda_1 K_{H,0}^1 + \mu_1 K_{S,0}^1 + (\lambda_2 + \mu_2)\,K_0^2)\mathbf{e}_1 + (\lambda_1 + \mu_1)\mathbf{e}_2 + (\lambda_2 + \mu_2)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

mittels der Standardbasis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ des $\mathbb{R}^3$. Da die Koordinaten des Nullvektors alle gleich Null sind, folgt insbesondere der Widerspruch $\mu_1 = -\lambda_1 < 0$.

Insgesamt folgt $\mathbf{T} \notin H^H \cup H^S = C_{M^2}$ und damit $\mathbf{S} \notin R_{M^2}$.

Analog kann auch ein $\mathbf{S} \in H^S \setminus G$ nicht in R_{M^2} liegen, sodass nur die $\mathbf{S} \in G$ im Linienkegel R_{M^2} liegen.

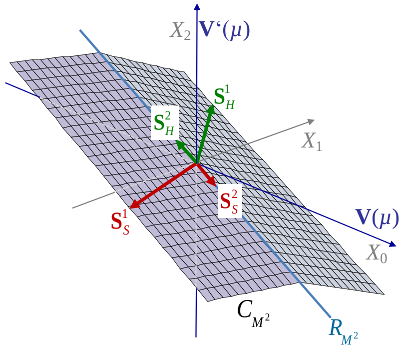


Abb. 6.11 Die zulässige Supplementmenge C_{M^2} und der Linienkegel R_{M^2} der übereinstimmenden Barwert- und Endwert-Präferenzordnung für die Laufzeit $n = 2$ bei gespaltenem Auf- und Abzinsungsfaktor der Zinsperiode [0,1]. Werte der Terminzinsfaktoren des für die Abbildung verwendeten Zahlenbeispiels: $q_{0,1,H} = 1{,}0$; $q_{1,2,H} = 1{,}2$; $q_{0,1,S} = \alpha q_{0,1,H}$, $q_{1,2,S} = \alpha q_{1,2,H}$ mit großem $\alpha = 3{,}5$ zur Verdeutlichung des Knicks der „geknickten Ebene“ C_{M^2}

Aus (GZS) $C'_{M^2} = C_{M^2}$ mit $L' = L(\mathbf{R}^j_{E_j})$ folgen insbesondere die Inzidenzen

$$\mathbf{S}'^1_H = \mathbf{R}^1 \in C_{M^2}, \ \mathbf{S}'^2_H = \mathbf{R}^2_H \in C_{M^2}, \ \mathbf{S}'^2_S = -\mathbf{R}^2_S \in C_{M^2},$$

daraus mit etwas Rechnung die folgenden drei präziseren Inzidenzen und zusätzlich drei Gleichungen für die Auf- und Abzinsungsfaktoren:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{R}^1 & = a_{0,2}\mathbf{K}^2 & \in \text{ray } \mathbf{K}^2, & a_{0,2} = 1/d_{0,2}, \\ \mathbf{R}^2_H & = -\mathbf{K}^1_S + a_{1,2H}\mathbf{K}^2 & \in H^S \setminus G, & d_{0,1,S} = a_{1,2,H}d_{0,2}, \\ -\mathbf{R}^2_S & = \mathbf{K}^1_H + a_{1,2,S}(-\mathbf{K}^2) & \in H^H \setminus G, & d_{0,1,H} = a_{1,2,S}d_{0,2}. \end{array}$$

Beispielsweise ist die Inzidenz $\mathbf{R}^1 \in C_{M^2}$ gleichbedeutend zur Vektorgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{R}^1 - \lambda_1 \mathbf{K}^1_{H/S} - \lambda_2 \mathbf{K}^2 \\ &= -\mathbf{e}_1 + a_{0,2}\mathbf{e}_3 + \lambda_1 d_{0,1,H/S}\mathbf{e}_1 - \lambda_1\mathbf{e}_2 + \lambda_2 d_{0,2}\mathbf{e}_1 - \lambda_2\mathbf{e}_3 \\ &= (-1 + \lambda_1 d_{0,1,H/S} + \lambda_2 d_{0,2})\mathbf{e}_1 - \lambda_1\mathbf{e}_2 + (a_{0,2} - \lambda_2)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

mit der hier nicht benötigten Supplementbedingung (SBK) von Abschnitt 6.2, also zu $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a_{0,2}$ und $a_{0,2}d_{0,2} = 1$.

Umgekehrt folgen auch aus den drei Bedingungen für die Aufzinsungsfaktoren

$$a_{0,2} = 1/d_{0,2}, \qquad a_{1,2,H} = d_{0,1,S}/d_{0,2}, \qquad a_{1,2,S} = d_{0,1,H}/d_{0,2}.$$

die drei Inzidenzen $\mathbf{R}^1 \in \text{ray } \mathbf{K}^2$, $\mathbf{R}^2_H \in H^S \setminus G$, $-\mathbf{R}^2_S \in H^H \setminus G$, daraus noch $G = \text{lin } \mathbf{R}^1$ und dann auch die Übereinstimmung der zulässigen Supplementmengen:

$$\begin{aligned} C'_{M^2} &= (\text{ray } \mathbf{R}^1 + \text{ray } \mathbf{R}^2_H) \cup (\text{ray } (-\mathbf{R}^1) + \text{ray } \mathbf{R}^2_H) \\ &\quad \cup (\text{ray } \mathbf{R}^1 + \text{ray } (-\mathbf{R}^2_S)) \cup (\text{ray } (-\mathbf{R}^1) + \text{ray } (-\mathbf{R}^2_S)) \\ &= (G + \text{ray } \mathbf{R}^2_H) \cup (G + \text{ray } (-\mathbf{R}^2_S)) \\ &= (G + \text{ray } (-\mathbf{K}^1_S + a_{1,2H}\mathbf{K}^2)) \\ &\quad \cup (G + \text{ray } (\mathbf{K}^1_H + a_{1,2,S}(-\mathbf{K}^2))) \qquad (G = \text{lin } \mathbf{K}^2) \\ &= (G + \text{ray } (-\mathbf{K}^1_S)) \cup (G + \text{ray } \mathbf{K}^1_H) \\ &= H^S \cup H^H \\ &= C_{M^2}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung von (GDmm') und (GAmm') sind diese drei theoretisch erfüllbaren Bedingungen für die Aufzinsungsfaktoren also charakteristisch für das Vorliegen von (GZS) und damit für die Übereinstimmung der beiden Präferenzordnungen $\succcurlyeq_B$ und $\succcurlyeq_E$. Damit ist gezeigt, dass auch bei einem unvollkommenen Supplementsystem L, also bei teilweise gespaltenen Auf- und Abzinsungsfaktoren, diese Präferenzordnungen übereinstimmen können.

Anzumerken ist dazu noch, dass dieser Fall in der Praxis ziemlich ungewöhnlich sein dürfte: Sollen nämlich die Auf- und Abzinsungsfaktoren speziell aus den einperiodischen Terminzinsfaktoren $q_{0,1,D}$ und $q_{1,2,D}$ der Zinsperioden [0,1] und [1,2] gebildet werden, so erfolgt zunächst die plausible Festlegung von

$$d_{0,1,D} = 1/q_{0,1,D}, \qquad a_{1,2,D} = q_{1,2,D} \qquad \text{für } D = H, S.$$

Bei Beachtung der obigen Bedingungen für (GZS) erhält man dann

$$a_{1,2,H}/d_{0,1,S} = 1/d_{0,2} = a_{1,2,S}/d_{0,1,H},$$
$$q_{0,1,S}q_{1,2,H} = a_{0,2} = q_{0,1,H}q_{1,2,S},$$
$$q_{0,1,S}/q_{0,1,H} = q_{1,2,S}/q_{1,2,H} = a_{0,2}/(q_{0,1,H}q_{1,2,H}) =: \alpha,$$

daraus die Beziehung zwischen den Soll- und Habenzinsfaktoren der Zeitintervalle [0,1] und [1,2]

$$q_{0,1,S} = \alpha q_{0,1,H}, \qquad q_{1,2,S} = \alpha q_{1,2,H} \text{ mit einem } \alpha \geq 1$$

und dann die doch etwas exotische Festlegung des zum Zeitintervall [0,2] gehörigen und vom Zinssatztyp $D = H, S$ unabhängigen Aufzinsungsfaktors $a_{0,2}$ und Abzinsungsfaktors $d_{0,2} = 1/a_{0,2}$ durch

$$a_{0,2} = \alpha\, q_{0,1,H}\, q_{1,2,H} = q_{0,1,S}\, q_{1,2,S}/\alpha.$$ △

6.3.7 Spezielle Zeitwertmethode mit konstantem nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor

6.3.7.1 Zeitwert mit konstantem Kalkulationszinsfaktor

Der Spezialfall der Zeitwert-Berechnung mit einem für alle Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ konstanten und nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor

$$q_k = q = q_K > 0 \qquad (k = 1,\ldots,n;\ \text{flache Zinskurve})$$

wurde schon zu Beginn des Kapitels 6 betrachtet. In diesem Fall erhält man die speziellen nichtgespaltenen (d. h. nicht mehr von der Diathese Haben oder Soll abhängigen) Auf- und Abzinsungsfaktoren zu

$$a_{j,m,D} = a_{j,m} = q^{m-j} \qquad \text{für } j = 0,\ldots,m,$$
$$d_{m,j,F} = d_{m,j} = q^{m-j} = 1/q^{j-m} \qquad \text{für } j = m+1,\ldots,n$$

und die Zeitwert-Funktion

$$Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = \mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{m-j}$$

mit dem speziellen Transpositionsvektor

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^m &= (a_{0,m},\ldots,a_{m,m},d_{m,m+1},\ldots,d_{m,n})^\mathsf{T}\\ &= (q^m,\ldots,1,\frac{1}{q},\ldots,\frac{1}{q^{n-m}})^\mathsf{T}\\ &= q^m(1,\ldots,\frac{1}{q^m},\frac{1}{q^{m+1}},\ldots,\frac{1}{q^n})^\mathsf{T}\\ &= q^m\mathbf{T}^0 = q^m\mathbf{P}(q)\end{aligned}$$

und dem speziellen Diskontierungsvektor

$$\mathbf{P}(q) := (1, \ldots, \frac{1}{q^n})^{\mathsf{T}}.$$

6.3.7.2 Präferenzordnung der klassischen Methoden

In diesem Spezialfall sind bei fest vorgegebenem Kalkulationszinsfaktor $q > 0$ für beliebige Vergleichszeitpunkte m, $m' \in \{0,\ldots,n\}$ die Gleichungen (GA), (GD) bzw. (GA‘), (GD‘) erfüllt. Weiter ist für die Zeitwert-Funktionen

$$Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = \mathbf{T}^{m\mathsf{T}}\mathbf{X} \quad = q^m B_n(\mathbf{X},q) \text{ und}$$
$$Z_{m',n}(\mathbf{X},q) = \mathbf{T}^{m'\mathsf{T}}\mathbf{X} \quad = q^{m'} B_n(\mathbf{X},q)$$

die Bedingung (GRT) mit $\delta = q^{m'-m}$ für deren Transpositionsvektoren erfüllt,

$$\mathbf{T}^{m'} = q^{m'-m}\mathbf{T}^m,$$

sodass nach Zusatz 6.3, 2) die zugehörigen Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z = \succcurlyeq_{Z,q}$ und $\succcurlyeq_{Z'} = \succcurlyeq_{\mathbf{Z}',q}$ übereinstimmen:

$$\succcurlyeq_{Z'} = \succcurlyeq_Z.$$

Insbesondere stimmen auch die zum Vergleichszeitpunkt $m = 0$ gehörige Kapitalwert-Präferenzordnung (Barwert-Präferenzordnung, B-Präferenzordnung) $\succcurlyeq_B = \succcurlyeq_{B,q}$ und die zu $m = n$ gehörige Endwert-Präferenzordnung (E-Präferenzordnung) $\succcurlyeq_E = \succcurlyeq_{E,q}$ überein:

$$\succcurlyeq_B = \succcurlyeq_E.$$

In Abschnitt 4.3.3 wird allgemeiner für die mit dem positiven Diskontierungsvektor $\mathbf{P} \in K^{\perp}$ definierte Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ definierte Barwert-Präferenzordnung oder Abstand-Präferenzordnung $\trianglerighteq$ gezeigt, dass diese die einzige durch das Konzept der Replizierung oder Duplizierung auf einem vollkommenen Kapitalmarkt erzeugbare Präferenzordnung ist und auch noch konvex, monoton und abgeschlossen bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation ist. Demnach hat auch die hier zum speziellen Diskontierungsvektor $\mathbf{P} = \mathbf{P}(q)$ ($\in K^{*\perp}$) gehörige spezielle Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{B,q}$ diese Eigenschaften. Sie wird noch bei der Methode des internen Zinssatzes in Kapitel 7 verwendet. Das zum Vergleichszeitpunkt $t = m$ gehörige Supplementsystem $L = L(m, q, \mathbf{P}^j, \mathbf{M}^j)$ für die Replizierung auf diesen speziellen Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ wird mittels der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{P}^j$ und $\mathbf{M}^j$ gebildet und ist nach Zusatz 6.3, 1), ii) ein vollkommenes Supplementsystem:

$$\mathbf{S}_H^j = \mathbf{P}^j, \qquad \mathbf{S}_S^j = -\mathbf{P}^j \qquad \text{für } j = 1,\ldots,m,$$
$$\mathbf{S}_H^j = \mathbf{M}^j, \qquad \mathbf{S}_S^j = -\mathbf{M}^j \qquad \text{für } j = m+1,\ldots,n$$

mit

$$\mathbf{P}^j = -\mathbf{e}_j + q^{m-j+1}\mathbf{e}_{m+1}$$
$$= (0,..,0,-1,0,..,0,q^{m-j+1},0,\ldots\ldots\ldots,0)^{\mathsf{T}} \qquad \text{für } j = 1,\ldots,m,$$
$$\mathbf{M}^j = -q^{m-j}\mathbf{e}_{m+1} + \mathbf{e}_{j+1}$$
$$= (0,\ldots\ldots\ldots..,0,-q^{m-j},0,..,0,1,0,..,0)^{\mathsf{T}} \qquad \text{für } j = m+1,\ldots,n.$$

Die zum Supplementsystem $L = L(m, q, \mathbf{P}^j, \mathbf{M}^j)$ gehörige zulässige Supplementmenge C_{M^n} und der zugehörige fiktive Kapitalmarkt $K^{*m} := \text{cone } L$ stimmen nach

Zusatz 6.3, 1) ii) jeweils mit der Hyperebene $H_{\mathbf{T}^m,0}$ mit dem Transpositionsvektor $\mathbf{T}^m = q^m\mathbf{T}^0 = q^m\mathbf{P}(q)$ bzw. $\mathbf{P}(q)$ als Normalenvektor überein:

$$K^{*m} = C_{M^n}(L) = H_{\mathbf{T}^m,0} = H_{\mathbf{P}(q),0}.$$

Somit erhält man für alle Vergleichszeitpunkte $m \in \{0,\dots,n\}$ zum jeweiligen Supplementsystem L dieselbe zulässige Supplementmenge und denselben vollkommenen fiktiven Kapitalmarkt

$$\begin{aligned} K^{*m} &= K^* = C_{M^n}(L) = H_{\mathbf{P}(q),0} \\ &= \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{Z} = 0\} \\ &= \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : Z_{m,n}(\mathbf{Z}) = 0\} = \operatorname{Ind}_{\succcurlyeq_{Z,q}}(\mathbf{O}), \end{aligned}$$

der die Nulllinie der hier betrachteten Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_{Z,q}$ darstellt. Diese Nulllinie wird auch in Kapitel 7 bei der Methode des internen Zinssatzes (MIZ) verwendet, da alle Zahlungsströme $\mathbf{Z} \in H_{\mathbf{P}(q),0}$, $Z_0 \neq 0$, den Kalkulationszinsfaktor q als internen Zinsfaktor besitzen ($m = n$, $E_n(\mathbf{Z},q) = 0$ für alle $\mathbf{Z} \in K^*$). Bei der Interpretation der Präferenzordnung der klassischen Methoden als eine R-Präferenzordnung werden also die Supplemente $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ des speziellen vollkommenen Kapitalmarkts $K^* = H_{\mathbf{P}(q),0}$ verwendet.

Beispiele für Zahlungsströme in dieser Nulllinie K^* sind neben den in den Abschnitten 6.1, 6.2 bzw. 6.3 verwendeten $(n\text{-}j\text{+}1)$-periodischen Termingeschäften $\mathbf{R}^j$ ($j = 1,\dots,n$), j-periodischen Kassageschäften $\mathbf{K}^j$ ($j = 1,\dots,n$), $(m\text{-}j\text{+}1)$- bzw. $(j\text{-}m)$-periodischen Termingeschäften $\mathbf{P}^j$ ($j = 1,\dots,m$) bzw. $\mathbf{M}^j$ ($j = m+1,\dots,n$) auch die nach Abschnitt 4.1.4 jetzt aber mit Hilfe des speziellen positiven Preisvektors $\mathbf{P} = \mathbf{P}(q)$ nachweisbaren einperiodischen Termingeschäfte

$$\mathbf{T}^j = -\,\mathbf{e}_j + q\mathbf{e}_{j+1} = (0,\dots,0,-1,+q,0,\dots,0)^\mathsf{T},$$

die allgemeineren $(n\text{-}j\text{+}1)$-periodischen Termingeschäfte (nicht zu verwechseln mit obigem Transpositionsvektor $\mathbf{T}^m$)

$$\mathbf{T}^j = -\,\mathbf{e}_j + \sum_{k=j}^{n} T_k^j \mathbf{e}_{k+1} = (0,..,0,-1,T_j^j,..,T_n^j)^\mathsf{T}$$

($\mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{T}^j = 0$), die j-periodischen Kassageschäfte

$$\mathbf{D}^j = -\,d_j\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{j+1} = (-\,d_j,0,\dots,0,+1,0,\dots,0)^\mathsf{T}$$

(für den Erwerb der reinen Wertpapiere, $d_j = 1/q^j$, $\mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{D}^j = 0$) und die allgemeineren j-periodischen Kassageschäfte

$$\mathbf{K}^j = \sum_{k=0}^{j-1} K_k^j \mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{e}_{j+1} = (K_0^j, K_1^j,\dots,K_{j-1}^j,1,0,\dots,0)^\mathsf{T}$$

($\mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{K}^j = 0$, $j = 1,\dots,n$).

Für die zum Vergleichszeitpunkt $m = n$ gehörige Endwertfunktion

$$E_n(\mathbf{X},q) = Z_{n,n}(\mathbf{X}) = q^n\mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j}$$

wird das vollkommene Supplementsystem $L = L(q,\mathbf{R}^j)$ mittels der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{P}^j = \mathbf{R}^j$ gebildet:

$$\mathbf{R}^j = -\,\mathbf{e}_j + q^{n-j+1}\mathbf{e}_{n+1} = (0,..,0,-1,0,..,0,q^{n-j+1})^\mathsf{T} \qquad (j = 1,\dots,n).$$

Für die zum Vergleichszeitpunkt $m = 0$ gehörige Kapitalwertfunktion (Barwertfunktion)

$$B_n(\mathbf{X},q) = Z_{0,n}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{-j}$$

wird das vollkommene Supplementsystem $L = L(q,\mathbf{K}^j)$ mittels der $\mathbf{M}^j = \mathbf{K}^j$ gebildet:

$$\mathbf{K}^j = -\,q^{-j}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{j+1} = (-q^{-j},0,\dots,0,1,0...,0)^\mathsf{T} \qquad (j = 1,\dots,n).$$

Die Indifferenzklasse und die Bessermenge eines Zahlungsstroms **Y** für diese spezielle Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{Z,q}$ sind in Abbildung 6.12 dargestellt.

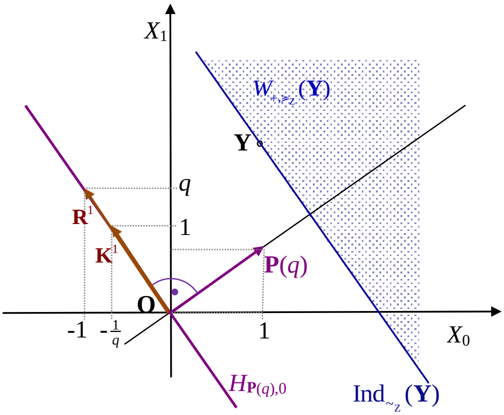


Abb. 6.12 Die Indifferenzklasse $\mathrm{Ind}_{\sim_Z}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + H_{\mathbf{P}(q),0}$ und die Bessermenge $W_{+,\succcurlyeq_Z}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + H^{\geq}_{\mathbf{P}(q),0}$ des Zahlungsstroms $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ zur speziellen Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{Z,q}$

6.3.7.3 Ökonomische Interpretation der speziellen Zeitwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor

Implizite Prämisse für die ökonomische Interpretation des Zeitwerts eines einzelnen Zahlungsstroms

Oben wurde in Abschnitt 6.3.3 bereits allgemeiner mit einem von der Diathese der Komponenten (Verwendung der Komponenten als Anlage- oder Kreditzinsfaktor mit den Indizes *H* oder *S*) abhängigen Transpositionsvektor begründet, dass die implizite Prämisse für die ökonomische Interpretation des Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ *eines festen Zahlungsstroms* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ als eine real mögliche Margenentnahme zum Zeitpunkt $t = m$ in der realen Verfügbarkeit des Supplements

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \in C_{M^n}(L),\; L = L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j}),$$

$$\text{mit } Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{m} X_j a_{j,m,D_j(\mathbf{X})} + \sum_{j=m+1}^{n} X_j d_{m,j,F_j(\mathbf{X})}$$

auf dem für den Entscheider zugänglichen Kapitalmarkt K besteht: $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in K$. Hier bei der speziellen Zeitwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor bedeutet dies jetzt die speziellere Voraussetzung:

(RSmq) Zum Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ steht das zugehörige Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1} \in H_{\mathbf{P}(q),0} \text{ mit } Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{m-j}$$

auf dem für den Entscheider zugänglichen Kapitalmarkt K zur Verfügung:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in K.$$

Implizite Prämisse für die ökonomische Interpretation der Zeitwertmethode auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$

Die implizite Prämisse einer ökonomischen Interpretation der speziellen Zeitwertmethode *auf dem gesamten Raum* $\mathbb{R}^{n+1}$ dagegen besteht nach Abschnitt 6.3.3 in der realen Verfügbarkeit der gesamten zulässigen Supplementmenge $H_{\mathbf{P}(q),0} = C_{M^n}(L)$ ($L = L(m,q,\mathbf{P}^j,\mathbf{M}^j)$) auf dem für den Entscheider zugänglichen Kapitalmarkt K:

$$C_{M^n}(L) = H_{\mathbf{P}(q),0} \subseteq K.$$

Die implizite Prämisse bedeutet also die sehr starke Voraussetzung, dass im realen Kapitalmarkt K auch die Hyperebene $K^* = H_{\mathbf{P}(q),0}$ mit dem speziellen Preisvektor $\mathbf{P}(q) = (1,1/q,\ldots,1/q^n)^\top$ liegt und damit auch die oben beispielhaft angegebenen speziellen Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{P}^j$ ($j = 1,\ldots,m$), $\mathbf{M}^j$ ($j = m+1,\ldots,n$), $\mathbf{T}^j$, $\mathbf{D}^j$, $\mathbf{K}^j$ und $\mathbf{R}^j$ ($j = 1,\ldots,n$) zur Verfügung stehen. Da die Hyperebene $H_{\mathbf{P}(q),0}$ von m unabhängig ist, ist diese implizite Prämisse dann auch gleich für jeden Vergleichszeitpunkt $m \in \{0,\ldots,n\}$ erfüllt.

Gültigkeit der impliziten Prämisse für die ökonomische Interpretation der Zeitwertmethode auf der Menge der Zahlungsströme, die auf einem Konto verrechnet werden können und dabei die Abhebung ihres Zeitwerts ermöglichen:

Die Voraussetzung, dass zumindest *für eine gewisse Menge $G = G(m,q) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$* von Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ die jeweilige reale Glattstellung von $\mathbf{X} \in G$ auf den Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ zu einem konstanten Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ möglich ist, kann für den Entscheider durchaus in konkreten Situationen vorliegen. Für den gewählten Vergleichszeitpunkt $t = m$, den Zinsfaktor q, den Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in G(m,q)$ und für den Entscheider steht dann das Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + \sum_{j=0}^{n} X_j q^{m-j} \cdot\mathbf{e}_{m+1} \in H_{\mathbf{P}(q),0}$$

als reales Kapitalmarktgeschäft zur Verfügung. Zu beachten ist hierbei jedoch, dass dann die ökonomische Interpretation des Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ als Margenentnahme ei-

ner Glattstellung zum Zeitpunkt $t = m$ jetzt nur für den festen Vergleichszeitpunkt m und die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ der Menge $G = G(m,q)$ gesichert ist, auch wenn theoretisch im Spezialfall des konstanten Kalkulationszinsfaktors alle zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten m‘ gehörigen Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_{Z‘}$ übereinstimmen.
Für eine derartige spezielle finanzielle Situation des Entscheiders wird jetzt ein Beispiel angegeben, in dem zumindest die Zahlungsströme $\mathbf{X} = (X_0,\ldots,X_n)^\mathsf{T}$ einer bestimmten Teilmenge $G = G(m,q)$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Hilfe eines zur Verfügung stehenden sogenannten Verrechnungskontos ohne Vorzeichenwechsel der Kontostände verrechnet, auf ihren m-ten Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ glattgestellt werden können und die Abhebung des Zeitwerts gestatten. Es werden die Fälle betrachtet, dass der zu beurteilende Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ eine Investition ($X_0 < 0$) oder eine Finanzierung ($X_0 > 0$) ist und das Verrechnungskonto ein Anlage- oder ein Kreditkonto ist. In dem Beispielteil 4) wird die Menge $G(m,q)$ dieser Zahlungsströme $\mathbf{X}$, deren m-ter Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ ökonomisch als Margenentnahme interpretiert werden kann, auch noch geometrisch als konvexer affiner Kegel beschrieben. Insbesondere beschreibt das Beispiel in Teil 1, c) mit $m = 0$ auch den Fall, in dem der mit konstantem Kalkulationszinsfaktor berechnete Kapitalwert $B_n(\mathbf{X}) = Z_{0,n}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{X}$ als real mögliche Sofortentnahme zum Zeitpunkt $t = 0$ entnommen werden kann. In Teil 1, a) des Beispiels liegt für den Vergleichszeitpunkt $m = n$ unter der Voraussetzung der Verrechenbarkeit des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ auf dem Konto ohne Vorzeichenwechsel des Kontostands somit die Bedingung (RSnq) vor, dass also zum Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ das Supplement $\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) \in H_{\mathbf{P}(q),0}$ real existiert. Der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ tritt dabei als Zinsfaktor einer realen Verzinsung der Zahlungsstromkomponenten X_j auf. Somit entspricht die Bedingung (RSnq) der in der Literatur vielzitierten „Wiederanlageprämisse“ für den Kalkulationszinsfaktor, welche fordert, dass bei einer Investition $\mathbf{X}$ zur Transposition der Zahlungen X_j auf den Endzeitpunkt $t = n$ nicht nur die Auszahlungen X_j (< 0) zum Kalkulationszinsfaktor q_K finanziert werden können, sondern auch die Rückflüsse X_j (> 0) zum Kalkulationszinsfaktor q_K wieder angelegt werden können. Diese Möglichkeit für die Gültigkeit der Bedingung (RSnq) wird auch schon von Locarek (1992), S. 83, in seiner Bemerkung zur impliziten Prämisse der Kapitalwertmethode und von Tietze (1999), S. 232, in seiner Bemerkung zur sogenannten Wiederanlageprämisse bei der Ermittlung des internen Zinssatzes erwähnt.

Beispiel 6.2 Beispiel für die Gültigkeit der impliziten Prämisse der Zeitwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$

1) Es soll eine **Investition** $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) a) mittels ihres Endwerts oder b) mittels ihres Zeitwerts beurteilt werden, deren Anfangsauszahlung X_0 mit dem Eigenkapital $C_0 \geq |X_0|$ des Entscheiders finanziert werden kann. Das Eigenkapital $C_0 > 0$ liegt auf einem **Anlagekonto** des Entscheiders mit dem Habenzinsfaktor (Anlagezinsfaktor) $q = q_H$ (> 0) und hätte während der Laufzeit n der Investition $\mathbf{X}$ ohne die Verbuchung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ die Kontostandsentwicklung $C_j \geq 0$ ($j = 0,\ldots,n$-1, z. B. $C_j = C_0q^j$). Bei einem Vorzeichenwechsel der Kontostände C_j käme nämlich für die Verzinsung neben dem Habenzinsfaktor q_H auch ein im Allgemeinen davon verschiedener Sollzinsfaktor (Kreditzinsfaktor) q_S zur Anwendung. Um die nachfolgende Verbuchung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ auf dem Konto und seine Verzinsung mit dem Zinsfaktor q deutlicher darzustellen, wird noch der Zahlungsstrom $\mathbf{B} = (B_0,\ldots,B_n)^\mathsf{T}$ ver-

wendet, der auf ein neu angelegtes Konto eingezahlt die Kontostandsentwicklung C_j verursacht. Wegen $C_j \geq 0$ erhält man mit dem konstanten Kontozinsfaktor $q = q_H$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die rekursive Kontostandsformel

$$C_0 = B_0 =: E_0(\mathbf{B},q),$$
$$C_1 = C_0 \cdot q + B_1 = E_0(\mathbf{B},q) \cdot q + B_1 = E_1(\mathbf{B},q),$$
$$\ldots$$
$$C_j = C_{j-1} \cdot q + B_j = E_{j-1}(\mathbf{B},q) \cdot q + B_j = E_j(\mathbf{B},q) \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

mit dem j-ten Horner-Schema-Polynom (nach dem englischen Mathematiker William George Horner, 1786–1837)

$$E_j(\mathbf{B},q) = q \cdot E_{j-1}(\mathbf{B},q) + B_j$$
$$= B_0 q^j + \ldots + B_j \qquad (j = 1,\ldots,n).$$

Für die Investition soll nun die erste Auszahlung X_0 vom Konto aus erfolgen, also X_0 auf das Konto gebucht werden. Ebenso sollen alle Rückflüsse X_j ($j = 1,\ldots,n$) der Investition auf das Konto eingezahlt werden. Weiter wird über den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ vorausgesetzt, dass auch die durch seine Buchung resultierenden Kontostände C_j^* ($j = 0,\ldots,n\text{-}1$) keinen Vorzeichenwechsel aufweisen, also alle nichtnegativ sind und daher ebenfalls mit dem Habenzinsfaktor $q = q_H$ verzinst werden. Da insgesamt der Zahlungsstrom $\mathbf{Z} := \mathbf{B} + \mathbf{X}$ auf das neu angelegte Konto eingezahlt wird, erhält man die Kontostände

$$C_0^* = Z_0 = E_0(\mathbf{Z},q),$$
$$C_1^* = C_0^* \cdot q + Z_1 = E_0(\mathbf{Z},q) \cdot q + Z_1 = E_1(\mathbf{Z},q),$$
$$\ldots..$$
$$C_j^* = C_{j-1}^* \cdot q + Z_j = E_{j-1}(\mathbf{Z},q) \cdot q + Z_j = E_j(\mathbf{Z},q)$$
$$= E_j(\mathbf{B}+\mathbf{X},q)$$
$$= E_j(\mathbf{B},q) + E_j(\mathbf{X},q)$$
$$= C_j + E_j(\mathbf{X},q) \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

und die durch $\mathbf{X}$ verursachten Kontostandsänderungen

$$\Delta C_j := C_j^* - C_j = E_j(\mathbf{X},q) = X_0 q^j + \ldots + X_j \qquad (j = 0,\ldots,n).$$

An Voraussetzungen wird die Nichtnegativität der C_j ($j = 0,\ldots,n\text{-}1$) für die Darstellung $C_j = E_j(\mathbf{B},q)$ und die Nichtnegativität der C_j^*,

$$C_j^* \geq 0 \quad \text{für } j = 0,\ldots,n\text{-}1,$$

für die Darstellung $C_j^* = E_j(\mathbf{B}+\mathbf{X},q)$ mit dem konstanten Kontozinsfaktor q verwendet. Unter diesen Voraussetzungen ist der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ auf dem Konto mit dem festen Kontozinsfaktor verrechenbar und verzinsen sich alle eingezahlten Zahlungen X_k ($k = 1,\ldots,j$) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mit dem Habenzinsfaktor $q = q_H$. Aufgezinst ergeben sie zusammen zum Zeitpunkt $t = j$ die Kontostandsänderung $E_j(\mathbf{X},q) = C_j^* - C_j$. Nach Abhebung des Endwerts $E_n(\mathbf{X},q)$ zum Zeitpunkt $t = n$ erhält man den Kontostand C_n, den man ohne die Einzahlung und Verrechnung von $\mathbf{X}$ erhalten hätte.

a) Die für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ geforderte Voraussetzung $C_j^* \geq 0$ ($j = 0,\ldots,n\text{-}1$) gewährleistet hier im Konto-Beispiel speziell für $\mathbf{X}$ die reale Existenz des speziellen Supplements

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + E_n(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_{n+1} \in C_{M^n}(L(q,\mathbf{R}^j)) = H_{\mathbf{P}(q),0}$$

für die Glattstellung von $\mathbf{X}$ auf den Endwert $E_n(\mathbf{X})$, wobei aber keine Aussage getroffen wird über die Verfügbarkeit der gesamten zulässigen Supplementmenge $H_{\mathbf{P}(q),0}$: Nach erfolgter Verrechnung des gesamten Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ auf dem Konto kann nämlich zum Zeitpunkt $t = n$ der mit dem Habenzinsfaktor $q = q_H$ des Kontos berechnete **Endwert** $E_n(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms als Endentnahme vom Konto abgehoben werden und auf dem Konto bleibt der Kontostand C_n, den man ohne die Einzahlung von $\mathbf{X}$ und Abhebung von $E_n(\mathbf{X},q)$ erhalten hätte. Somit bedeutet die auf dem Konto mögliche Verbuchung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mit der Kontostandsänderung $E_n(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = n$ für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ die Addition von $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ und die damit verbundene Transformation in den Margenzahlungsstrom $E_n(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_{n+1}$.

b) Eine analoge Aussage ergibt sich für die Margenentnahme in Höhe des mit dem Habenzinsfaktor $q = q_H$ berechneten **Zeitwerts** $\mathrm{Z}_{m,n}(\mathbf{X}) = \mathrm{Z}_{m,n}(\mathbf{X},q)$ zum Zeitpunkt $t = m$, wenn auch die resultierenden Kontostände $\overline{C}_j$ der Zeitpunkte $j = 0,\ldots,n\text{-}1$ nichtnegativ bleiben. Bei der

Einzahlung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ auf das Konto und der Abhebung des Wertes $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ vom Konto zum Zeitpunkt $t = m$ resultieren nämlich die Kontostände $\bar{C}_j$, welche sich bei der Einzahlung des Zahlungsstroms

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Z}} &= \mathbf{B} + \bar{\mathbf{X}} \\ &= \mathbf{B} + \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{e}_{m+1}\end{aligned}$$

auf ein neu angelegtes Konto ergeben:

$$\begin{aligned}\bar{C}_0 &= \bar{Z}_0 = E_0(\bar{\mathbf{Z}},q) && (j = 0),\\ \bar{C}_j &= \bar{C}_{j-1}\, q + \bar{Z}_j \\ &= E_j(\bar{\mathbf{Z}},q) = \bar{Z}_0 q^j + \ldots + \bar{Z}_j && (j = 1,\ldots,n).\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung der Nichtnegativität der Kontostände C_j und der Nichtnegativität der Kontostände $\bar{C}_j$ $(j = 0,\ldots,n\text{-}1)$ verzinsen sich alle Zahlungen B_j und $\bar{Z}_j$ und damit auch die Zahlungen $\bar{X}_j = \bar{Z}_j - B_j$ $(j = 0,\ldots,n\text{-}1)$ des Differenzzahlungsstroms

$$\bar{\mathbf{X}} := \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{e}_{m+1}$$

mit dem Habenzinsfaktor $q = q_H$. Für die durch die Buchung von $\bar{\mathbf{X}}$ verursachten Kontostandsänderungen erhält man

$$\begin{aligned}\bar{C}_j - C_j &= E_j(\mathbf{B}+\bar{\mathbf{X}},q) - E_j(\mathbf{B},q) \\ &= E_j(\bar{\mathbf{X}},q) && \text{für } j = 0,\ldots,n.\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\bar{C}_j - C_j &= E_j(\mathbf{X},q) && \text{für } j = 0,\ldots,m\text{-}1,\\ \bar{C}_j - C_j &= E_j(\mathbf{X},q) - Z_{m,n}(\mathbf{X},q)q^{j-m} \\ &= E_j(\mathbf{X},q) - Z_{j,n}(\mathbf{X},q) \\ &= \sum_{k=0}^{j} X_k q^{j-k} - \sum_{k=0}^{n} X_k q^{j-k} \\ &= \sum_{k=j+1}^{n} X_k q^{j-k} && \text{für } j = m,\ldots,n.\end{aligned}$$

Auch hier erhält man wie in Teil a) zum Zeitpunkt $t = n$ den Kontostand $\bar{C}_n = C_n$, den man ohne die Einzahlung von $\mathbf{X}$ und die Abhebung von $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ erhalten hätte. Somit ist der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ eine realisierbare Margenentnahme zum Zeitpunkt $t = m$ und ein ökonomisch interpretierbarer Maßstab für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$. Mit der Möglichkeit der Einzahlung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ auf das Anlagekonto können dessen Zahlungen X_j auf den Zeitpunkt $t = m$ transponiert werden und dort als Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ entnommen werden ohne den Kontoendstand C_n zu verändern.

Die hier im Konto-Beispiel für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ geforderte Voraussetzung $\bar{C}_j = \bar{C}_j(\mathbf{X}) \geq 0$ $(j = 0,\ldots,n\text{-}1)$ sichert für die Glattstellung des festen Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ auf den Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ die reale Existenz des speziellen Supplements

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \in C_{M^n}(L(m,q,\mathbf{P}^j,\mathbf{M}^j)) = H_{\mathbf{P}(q),0}$$

von Abschnitt 6.3.7.2.

c) Insbesondere ergibt sich unter der entsprechenden Voraussetzung für den Vergleichszeitpunkt $m = 0$ auf dem Konto die Glattstellung von $\mathbf{X}$ auf den **Kapitalwert** (Barwert) $B_n(\mathbf{X})$ mit dem realen speziellen Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} + B_n(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_1 \in C_{M^n}(L(q,\mathbf{K}^j)) = H_{\mathbf{P}(q),0}.$$

2) Es soll eine **Investition X** ($X_0 < 0$) mittels ihres Zeitwerts beurteilt werden, deren Anfangsauszahlung X_0 mit einem Kredit (Fremdkapital) der Höhe $F_0 = |X_0|$ fremdfinanziert wird. Dazu

steht ein **Kreditkonto** oder ein sich im Soll befindliches Girokonto mit dem Sollzinsfaktor $q = q_S > 0$ und der Kontostandsentwicklung $C_j \le 0$ ($j = 0,\dots,n$) zur Verfügung. Zwischen Kreditgeber und Kreditnehmer ist vereinbart, dass neben der Buchung der Anfangszahlung X_0 auch die Rückflüsse X_j ($j = 1,\dots,n$) auf das Konto eingezahlt werden können. Diese stellen bei $X_j \ge 0$ eine Tilgungsrate und bei $X_j < 0$ eine Erhöhung der Restschuld dar. Wie oben beim Anlagekonto wird auch hier beim Kreditkonto vorausgesetzt, dass die nach der Einzahlung von $\mathbf{X}$ und der Abhebung des Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ zum Zeitpunkt $t = m$ resultierenden Kontostände $\bar{C}_j$ keinen Vorzeichenwechsel aufweisen und somit hier nichtpositiv sind:

$$\bar{C}_j = C_j + E_j(\mathbf{X},q) \le 0 \qquad \text{für } j = 0,\dots,m\text{-}1,$$

$$\bar{C}_j = C_j + E_j(\mathbf{X},q) - Z_{j,n}(\mathbf{X},q) \le 0 \qquad \text{für } j = m,\dots,n.$$

Alle eingezahlten Zahlungen $\bar{X}_k$ ($k = 0,\dots,n$-1) des Zahlungsstroms

$$\bar{\mathbf{X}} := \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{e}_{m+1}$$

verzinsen sich hier mit dem Sollzinsfaktor $q = q_S$ und ergeben zum Zeitpunkt $t = j$ die Kontostandsänderung $E_j(\mathbf{X},q)$ ($j = 0,\dots,m$-1) bzw. $E_j(\mathbf{X},q) - Z_{j,n}(\mathbf{X},q)$ ($j = m,\dots,n$). Wie oben beim Anlagekonto erhält man auch beim Kreditkonto zum Zeitpunkt $t = n$ wegen $Z_{n,n}(\mathbf{X},q) = E_n(\mathbf{X},q)$ den Kontostand $\bar{C}_n = C_n$, den man ohne die Einzahlung von $\mathbf{X}$ und die Abhebung von $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ erhalten hätte. Somit können die Zahlungen X_j des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mit Hilfe des Kontos auf den Zeitpunkt $t = m$ transponiert werden und als Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ entnommen werden, ohne den Kontoendstand C_n des Kontos zu verändern. Dem Entscheider steht also mit dem Konto für diesen Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ das reale spezielle Supplement

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \in C_{M^n}(L(m,q,\mathbf{P}^j,\mathbf{M}^j)) = H_{\mathbf{P}(q),0}$$

von Abschnitt 6.3.7.2 mit dem konstanten Kalkulationszinsfaktor $q = q_S$ zur Verfügung.

3) Analog kann auch eine **Finanzierung X** ($X_0 > 0$) oder ein **beliebiger Zahlungsstrom X** $\in \mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ beurteilt werden, der mit einem konstanten Kalkulationszinsfaktor q berechnet wird und als reale Margenentnahme entnommen werden kann. Dazu wird vorausgesetzt, dass entweder ein Anlagekonto mit dem Habenzinsfaktor $q = q_H$ und der Kontostandsentwicklung $C_j \ge 0$ ($j = 0,\dots,n$-1) oder ein Kreditkonto mit dem Sollzinsfaktor $q = q_S$ und der Kontostandsentwicklung $C_j \le 0$ ($j = 0,\dots,n$-1) zur Verfügung steht, auf das der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ eingezahlt und von dem zum Zeitpunkt $t = m$ der Betrag $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ abgehoben werden kann. Weiter wird vorausgesetzt, dass die resultierenden Kontostände

$$\bar{C}_j = C_j + E_j(\mathbf{X},q) \qquad \text{für } j = 0,\dots,m\text{-}1,$$

$$\bar{C}_j = C_j + E_j(\mathbf{X},q) - Z_{j,n}(\mathbf{X},q) \qquad \text{für } j = m,\dots,n$$

ebenfalls alle nichtnegativ oder alle nichtpositiv sind und daher mit dem Zinsfaktor q verzinst werden. Wie oben erhält man zum Zeitpunkt $t = n$ den Kontostand $\bar{C}_n = C_n$, den man ohne die Einzahlung von $\mathbf{X}$ und die Abhebung von $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ erhalten hätte. Die Zahlungen X_j des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ können also unter Verwendung des Kontos auf den Zeitpunkt $t = m$ transponiert werden und dort als Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ entnommen werden. Somit steht dem Entscheider auch hier mit dem Konto und dessen Zinsfaktor q für diesen Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ das reale spezielle Supplement

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \in C_{M^n}(L(m,q,\mathbf{P}^j,\mathbf{M}^j)) = H_{\mathbf{P}(q),0}$$

von Abschnitt 6.3.7.2 mit dem konstanten Kalkulationszinsfaktor q zur Verfügung.

4) **Geometrische Beschreibung der Menge** $G = G(m,q,\mathbf{C})$ der Zahlungsströme $\mathbf{X}$, die mit dem Konto auf ihren Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ glattgestellt werden können und deren Zeitwert als Marge entnommen werden kann: Es soll also die Menge derjenigen Zahlungsströme $\mathbf{X}$ beschrieben werden, für die der um den Zeitwert reduzierte Zahlungsstrom $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{e}_{m+1}$ auf dem Konto verrechenbar ist. Dazu wird der Fall der Eigenfinanzierung

betrachtet, sodass ein Anlagekonto vorliegt, dessen Kontostandsentwicklung

$$\mathbf{C} = (C_0,\ldots,C_{n-1},C_n)^\top$$

mit $C_j \geq 0$ ($j = 0,\ldots,n$-1) durch die Einzahlung des Zahlungsstroms $\mathbf{B} = (B_0,\ldots,B_n)^\top$ auf ein neu angelegtes Konto erzeugt wird. Auf dieses Anlagekonto wird noch der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ eingezahlt und es wird zum Zeitpunkt $t = m$ der Zeitwert

$$\zeta_m := \mathrm{Z}_{m,n}(\mathbf{X},q)$$

vom Konto abgehoben. Die resultierende Kontostandsentwicklung

$$\bar{\mathbf{C}} = (\bar{C}_0,\ldots,\bar{C}_{n-1},\bar{C}_n)^\top$$

mit $\bar{C}_j \geq 0$ ($j = 0,\ldots,n$-1) wird somit durch die Verbuchung des Zahlungsstroms

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{B} + \mathbf{X} - \zeta_m \mathbf{e}_{m+1}$$

auf dem neu angelegten Konto verursacht. In der Komponentenschreibweise erhält man die Kontostände mittels einer Rekursionsformel bzw. einer Endwertformel:

$$\begin{aligned} \bar{C}_0 &= \bar{Z}_0, \\ \bar{C}_j &= \bar{C}_{j-1}\, q + \bar{Z}_j \\ &= E_j(\bar{\mathbf{Z}},q) = \bar{Z}_0\, q^j + \ldots + \bar{Z}_j \quad \text{für } j = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

In der Matrizenschreibweise erhält man den Kontostandsvektor $\bar{\mathbf{C}}$ zu

$$\bar{\mathbf{C}} = H\bar{\mathbf{Z}}$$

mit der Horner-Schema-Aufzinsungsmatrix

$$H = (\mathbf{H}^1,\ldots,\mathbf{H}^{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ q & 1 & . & & . \\ . & q & . & . & . \\ . & & . & 1 & 0 \\ q^n & q^{n\text{-}1} & . & q & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)},$$

deren Spaltenvektoren

$$\mathbf{H}^j = \sum_{k=j}^{n+1} q^{k-j}\mathbf{e}_k = (0,\ldots,0,1,q,\ldots,q^{n+1-j})^\top$$

und den Standardbasisvektoren

$$\mathbf{e}_j = (0,..,0,1,0,..,0)^\top = (\delta_{jk})_{k=1,..,n+1} \quad (j = 1,\ldots,n+1)$$

des $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Matrix H ist eine untere Dreiecksmatrix mit den Elementen 1 in der Hauptdiagonalen, q in der ersten Subdiagonalen (der unter der Hauptdiagonalen gelegenen Diagonalen), q^2 in der zweiten Subdiagonalen, usw. bis zu q^n als Element $H_{1,n+1}$.

Die Auflösung der Rekursionsformel der $\bar{C}_j$ nach $\bar{Z}_j$ liefert die Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} \bar{Z}_0 &= \bar{C}_0, \\ \bar{Z}_j &= -\,q\,\bar{C}_{j-1} + \bar{C}_j \quad \text{für } j = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

und in der Matrizenschreibweise

$$\bar{\mathbf{Z}} = F\bar{\mathbf{C}}$$

mit der Matrix

$$F = (\mathbf{F}^1,\ldots,\mathbf{F}^n,\mathbf{F}^{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ -q & 1 & . & & . \\ 0 & -q & . & . & . \\ . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & 0 & -q & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

und deren Spaltenvektoren

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{e}_j - q\mathbf{e}_{j+1} = (0,..,0,1,-q,0,..,0)^\top \text{ für } j = 1,\ldots,n, \quad \mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{e}_{n+1} = (0,\ldots,0,1)^\top.$$

Die Matrix F ist eine untere Bidiagonalmatrix mit den Elementen 1 in der Hauptdiagonalen und - q in der ersten Subdiagonalen. Die Matrix F ist die inverse (reziproke) Matrix von H. Es gilt also $FH = E = (\delta_{jk})_{j,k=1,,n+1}$, $F = H^{-1}$, $H = F^{-1}$. Analog erhält man auch bei der Verbuchung von $\mathbf{B}$ auf einem neu angelegten Konto den resultierenden Kontostandsvektor $\mathbf{C} = H\mathbf{B}$ und aus $\mathbf{C}$ mittels der Matrix F den Zahlungsstrom $\mathbf{B} = F\mathbf{C}$.

Die Auflösung der Gleichung für $\bar{\mathbf{Z}}$ nach $\mathbf{X}$ ergibt wegen $\bar{\mathbf{Z}} = F\bar{\mathbf{C}}$ und $\bar{C}_n = C_n$ die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \zeta_m\mathbf{e}_{m+1} - \mathbf{B} + \bar{\mathbf{Z}}\\ &= \zeta_m\mathbf{e}_{m+1} - \mathbf{B} + C_n\mathbf{e}_{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1}\bar{C}_j\mathbf{F}^{j+1}\\ &= \mathbf{\Theta}^m + \bar{C}_0\mathbf{F}^1 + \ldots + \bar{C}_{n-1}\mathbf{F}^n\end{aligned}$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{\Theta}^m := \zeta_m\mathbf{e}_{m+1} + \mathbf{\Theta},$$
$$\mathbf{\Theta} := -\mathbf{B} + C_n\mathbf{e}_{n+1}.$$

Wegen der Vorzeichenbedingungen $\bar{C}_j \geq 0$ ($j = 0,\ldots,n$-1) liegt demnach $\mathbf{X}$ im konvexen affinen Kegel

$$\mathbf{\Theta}^m + C(q)$$

mit dem Scheitelpunkt (der Spitze) $\mathbf{\Theta}^m = \mathbf{\Theta}^m(q,\mathbf{C},\zeta_m)$ und dem zugehörigen endlich erzeugten konvexen linearen Kegel

$$C(q) = \text{cone}\,\{\mathbf{F}^1,\ldots,\mathbf{F}^n\}.$$

Damit liegt $\mathbf{X}$ auch in der Vereinigungsmenge der Kegelschar, die man durch die Variation des Parameters $\zeta_m \in \mathbb{R}$ erhält:

$$\begin{aligned}G &:= G(m,q,\mathbf{C}) := \bigcup_{\zeta_m\in\mathbb{R}}\left(\mathbf{\Theta}^m(q,\mathbf{C},\zeta_m) + C(q)\right)\\ &= \mathbf{\Theta} + \text{lin}\,\mathbf{e}_{m+1} + C(q).\end{aligned}$$

Die Menge G ist ein konvexer affiner Kegel mit dem Scheitelpunkt $\mathbf{\Theta}$, dem Linienraum lin $\mathbf{e}_{m+1}$ und dem spitzen konvexen linearen Kegel $C(q)$ ($C(q) \cap (-C(q)) = O$ wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathbf{F}^1,\ldots,\mathbf{F}^n$).

Umgekehrt wird jetzt gezeigt, dass für beliebig vorgegebenen Parameter $\zeta_m \in \mathbb{R}$ jedes $\mathbf{X} \in \mathbf{\Theta}^m(q,\mathbf{C},\zeta_m) + C(q)$ den Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = \zeta_m$ besitzt und die Verbuchung des zugehörigen Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{B} + \mathbf{X} - \zeta_m\mathbf{e}_{m+1}$ auf dem Konto mit der vorgegebenen Kontostandsentwicklung $\mathbf{C}$ ($C_j \geq 0$ für $j = 0,\ldots,n$-1) ebenfalls nichtnegative Kontostände $\bar{C}_j$ im Zeitraum [0,n-1] verursacht. Für das im konvexen affinen Kegel $\mathbf{\Theta}^m(q,\mathbf{C},\zeta_m) + C(q)$ gewählte $\mathbf{X}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{\Theta}^m(q,\mathbf{C},\zeta_m) + \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\mathbf{F}^{j+1}\\ &= \zeta_m\mathbf{e}_{m+1} + \mathbf{\Theta} + \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\mathbf{F}^{j+1}\\ &= \zeta_m\mathbf{e}_{m+1} + \mathbf{S}\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Theta} + \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\mathbf{F}^{j+1},\ \ \lambda_j \geq 0 \text{ für } j = 0,\ldots,n\text{-}1.$$

Mit dem Transpositionsvektor $\mathbf{T} = \mathbf{P}(q) = (1,\ldots,1/q^n)^\mathsf{T}$ der Barwert-Funktion $B_n(\mathbf{X},q) = \mathbf{T}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ gilt

$$\mathbf{T}^\mathsf{T}\mathbf{F}^j = \mathbf{T}^\mathsf{T}\mathbf{e}_j - q\,\mathbf{T}^\mathsf{T}\mathbf{e}_{j+1} = Q_{j-1} - qQ_j = \frac{1}{q^{j-1}} - \frac{q}{q^j} = 0 \ \text{ für } j = 1,\ldots,n.$$

Weiter gelten für den inhomogenen Term

$$\mathbf{\Theta} = -\mathbf{B} + C_n\mathbf{e}_{n+1}$$

von **S** wegen $E_n(\mathbf{B},q) = C_n$ und $E_n(\mathbf{e}_{n+1},q) = 1$ die Gleichungen $E_n(\mathbf{\Theta},q) = 0$ und

$$\mathbf{T}^\top\mathbf{\Theta} = B_n(\mathbf{\Theta},q) = E_n(\mathbf{\Theta},q)/q^n = 0.$$

Insgesamt erhält man daher für **S** den Zeitwert

$$Z_{m,n}(\mathbf{S},q) = q^m B_n(\mathbf{S},q) = q^m\mathbf{T}^\top\mathbf{S} = 0$$

und die Inzidenz $\mathbf{S} \in H_{\mathbf{T},0} \cap (\mathbf{\Theta} + C(q))$. Wegen $\mathbf{T}^\top\mathbf{e}_{m+1} = Q_m = 1/q^m$ hat dann **X** den Zeitwert

$$\begin{aligned} Z_{m,n}(\mathbf{X},q) &= Z_{m,n}(\zeta_m\mathbf{e}_{m+1},q) + Z_{m,n}(\mathbf{S},q) \\ &= \zeta_m q^m\mathbf{T}^\top\mathbf{e}_{m+1} \\ &= \zeta_m. \end{aligned}$$

Weiter erhält man für $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1},\lambda_n)^\top$, $\lambda_n := C_n$, mit dem zu **X** gehörigen Zahlungsstrom

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}} &:= \mathbf{B} + \mathbf{X} - \zeta_m\mathbf{e}_{m+1} \\ &= \mathbf{B} + \mathbf{S} \\ &= \mathbf{B} - \mathbf{B} + C_n\mathbf{e}_{n+1} + \sum_{j=0}^{n-1}\lambda_j\mathbf{F}^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\lambda_j\mathbf{F}^{j+1} \\ &= F\boldsymbol{\lambda} \end{aligned}$$

die Identität

$$\bar{\mathbf{C}} = H\bar{\mathbf{Z}} = F^{-1}\bar{\mathbf{Z}} = \boldsymbol{\lambda}$$

und daher insbesondere die Nichtnegativität der Kontostände $\bar{C}_j = \lambda_j$ für $j = 0,\ldots,n$-1.

Damit ist bewiesen, dass jeder Zahlungsstrom **X** des konvexen affinen Kegels $G := G(m,q,\mathbf{C})$ auf dem vorliegenden Anlagekonto eingezahlt und der zugehörige Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ zum Zeitpunkt $t = m$ vom Konto abgehoben werden kann, dabei die Kontostände $\bar{C}_j$ im Zeitintervall $[0,n$-1] keinen Vorzeichenwechsel aufweisen und der Kontoendstand unverändert bleibt: $\bar{C}_n = C_n$. Für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in G(m,q,\mathbf{C})$ stellt also der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ eine ökonomische Größe dar, nämlich die mögliche Margenentnahme zum Zeitpunkt $t = m$ bei gleichbleibendem Kontoendstand C_n. Anzumerken ist hier noch, dass zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten m auch verschiedene Mengen $G(m,q,\mathbf{C})$ der auf den Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ glattstellbaren Zahlungsströme gehören.

Im alternativen Fall der Fremdfinanzierung wird der Zahlungsstrom $\bar{\mathbf{X}} := \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{e}_{m+1}$ auf ein Kreditkonto eingezahlt wird. Für den Zahlungsstrom **X** erhält man dann die Bedingung einer Kontostandsentwicklung $\bar{C}_j \le 0$ ($j = 0,\ldots,n$-1), sodass **X** im spitzen konvexen affinen Kegel $\mathbf{\Theta} + \zeta_m\mathbf{e}_{m+1} - C(q)$ liegt. Im Spezialfall eines neu angelegten Kreditkontos mit $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{\Theta} = \mathbf{O}$ ergibt sich die Bedingung $\mathbf{X} \in \zeta_m\mathbf{e}_{m+1} - C(q)$ bzw. bei Variation des Parameters $\zeta_m \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{X} \in \text{lin } \mathbf{e}_{m+1} - C(q). \qquad \triangle$$

6.3.7.4 Ökonomische Interpretation des Kalkulationszinsfaktors als Zinsfaktor einer Zahlungsstromverzinsung

Es wird nun untersucht, wann der Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ als Zinsfaktor einer realen Verzinsung des Zahlungsstroms **X** oder eines modifizierten Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$ auftritt. Bei Vorliegen der im vorigen Abschnitt angegebenen Voraussetzung (RSmq), dass also zum Zahlungsstrom **X** das Supplement (Ergänzungsgeschäft)

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1}$$

auf dem Kapitalmarkt für den Entscheider real verfügbar ist, wird zur Realisierung des Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ zum Vergleichszeitpunkt $t = m$ die Kombination (Summe) des Zahlungsstroms **X** und des Supplements $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ gebildet:

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}`(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1} \text{ mit } Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{m-j}\ .$$

Man erhält damit den Margenzahlungsstrom $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1}$, der in der einzigen Zahlung $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ zum Zeitpunkt $t = m$ besteht. Rechnerisch werden mit dem Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ die Aufzinsungsfaktoren $a_{j,m} = q^{m\text{-}j}$ gebildet und mit diesen die Zahlungen X_j ($j = 0,\ldots,m$) des Zeitraums $[0,m]$ auf den Vergleichszeitpunkt $t = m$ aufgezinst bzw. transponiert. Außerdem werden mit $q = q_K$ die Diskontierungsfaktoren $d_{m,j} = q^{j\text{-}m}$ gebildet und mit diesen die Zahlungen X_j ($j = m+1,\ldots,n$) des Zeitraums $[m+1,n]$ auf den Vergleichszeitpunkt $t = m$ abgezinst bzw. transponiert. Bei Verwendung eines Vergleichszeitpunkts m mit $0 \le m < n$ werden die Zahlungen $X_{m+1}, \ldots, X_n$ abgezinst, also nicht aufgezinst, und es liegt *keine* Verzinsung im strengen Sinne einer Aufzinsung des Zahlungsstroms mit dem Zinsfaktor q vor.

Verzinsung von X mit dem Kalkulationszinsfaktor
Speziell bei Verwendung des Vergleichszeitpunkts $m = n$ jedoch, also unter der Voraussetzung (RSnq) der realen Existenz des Supplements

$$\mathbf{S}`(\mathbf{X}) \quad = -\,\mathbf{X} + E_n(\mathbf{X},q)\mathbf{e}_{n+1}$$

auf dem Kapitalmarkt, werden bei der Bildung des Margenzahlungsstroms als Kombinationszahlungsstrom

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}`(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X},q)\mathbf{e}_{n+1} \text{ mit } E_n(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j}$$

alle Zahlungen X_j ($j = 0,\ldots,n$) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mittels des Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ auf den Vergleichszeitpunkt $t = n$ aufgezinst, sodass in diesem Spezialfall der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ als Zinsfaktor einer realen Verzinsung der Zahlungsstromkomponenten X_j auftritt. Zum Zeitpunkt $t = n$ steht der Endwert $E_n(\mathbf{X},q)$ zur Margenentnahme zur Verfügung. Die Voraussetzung (RSnq) entspricht daher der in der Literatur vielzitierten „Wiederanlageprämisse“ für den Kalkulationszinsfaktor bei der Endwertmethode. Diese Prämisse fordert, dass bei einer Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) zur Transposition der Zahlungen X_j auf den Endzeitpunkt $t = n$ nicht nur die Auszahlungen $X_j < 0$ zum Kalkulationszinsfaktor q_K finanziert werden können, sondern auch die Rückflüsse $X_j > 0$ zum Kalkulationszinsfaktor q_K angelegt werden können und somit alle Zahlungen X_j mit dem Zinsfaktor q_K verzinst werden.

Verzinsung von $\bar{\mathbf{X}}$ mit dem Kalkulationszinsfaktor
Es wird nun noch gezeigt, dass bei der Wahl eines Vergleichszeitpunkts $t = m < n$ der Kalkulationszinsfaktor q zwar nicht der Zinsfaktor der Verzinsung von $\mathbf{X}$, aber der Zinsfaktor der Verzinsung eines modifizierten Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$ ist. In Abschnitt 6.3.3 zur ökonomischen Interpretation des allgemeiner definierten Zeitwerts wurde nämlich bereits angegeben, dass das zur Glattstellung von $\mathbf{X}$ auf den m-ten Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ verwendete Supplement $\mathbf{S}`(\mathbf{X}) \in C_{M^n}(L)$, $L = L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j})$, auch die Glattstellung des Differenzzahlungsstroms

$$\bar{\mathbf{X}} := \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1}$$

auf den m-ten Zeitwert $Z_{m,n}(\bar{\mathbf{X}}) = 0$ von $\bar{\mathbf{X}}$ ermöglicht:

$$\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{O}.$$

Der Differenzzahlungsstrom $\bar{\mathbf{X}}$ ist die Kombination (Summe) des realen Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ und des realisierbaren Entnahmezahlungsstroms $\mathbf{N}(v(\mathbf{X}))$, wobei der Entnahmezahlungsstrom

$$\mathbf{N}(v(\mathbf{X})) = -\,\mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = -\,Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1}$$

der umgekehrte Zahlungsstrom (der Gegenvektor, das Negative, das additive Inverse) zu dem bei der Zeitwertmethode zu $\mathbf{X}$ erhaltenen Margenzahlungsstrom $\mathbf{V}(v(\mathbf{X}))$ ist. Der um die Marge korrigierte Zahlungsstrom $\bar{\mathbf{X}}$ wird also mit dem Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\,\bar{\mathbf{X}} = -\,\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \in C_{M^n}(L)$$

der Zeitwertmethode zum Vergleichszeitpunkt m auf den Nullvektor $\mathbf{O}$ glattgestellt. Hier im Spezialfall des Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$ mit einem konstanten Kalkulationszinsfaktor $q = q_K > 0$ ist dann auch für jeden beliebigen Vergleichszeitpunkt $t = m'$ der m'-te Zeitwert $Z_{m',n}(\bar{\mathbf{X}},q)$ von $\bar{\mathbf{X}}$ gleich Null,

$$Z_{m',n}(\bar{\mathbf{X}},q) = q^{m'-m}Z_{m,n}(\bar{\mathbf{X}},q) = 0.$$

Außerdem folgt für das zu $\bar{\mathbf{X}}$ und dessen m'-ten Zeitwert $Z_{m',n}(\bar{\mathbf{X}},q)$ gehörige Supplement $\mathbf{S}''(\bar{\mathbf{X}}) \in C_{M^n}(L(m',q,\mathbf{P}'^j,\mathbf{M}'^j))$ aus der Replizierung

$$\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}''(\bar{\mathbf{X}}) = Z_{m',n}(\bar{\mathbf{X}},q)\cdot\mathbf{e}_{m'+1} = \mathbf{O}$$

auch die Übereinstimmung mit $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{S}''(\bar{\mathbf{X}}) = -\,\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{S}'(\mathbf{X}).$$

Aus der Voraussetzung (RSmq), d. h. der realen Existenz des Supplements $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ für die Glattstellung von $\mathbf{X}$ auf dessen m-ten Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$, ergibt sich mit diesem Supplement also auch für jeden beliebigen Vergleichszeitpunkt m' die reale Glattstellung von $\bar{\mathbf{X}}$ auf dessen m'-ten Zeitwert $Z_{m',n}(\bar{\mathbf{X}},q) = 0$. Insbesondere erhält man auch für den Endzeitpunkt $m' = n$ mit $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ die reale Glattstellung von $\bar{\mathbf{X}}$ auf dessen Endwert $E_n(\bar{\mathbf{X}},q) = 0$:

$$\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{O} = E_n(\bar{\mathbf{X}},q)\cdot\mathbf{e}_{n+1}.$$

Damit ist der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ der Zinsfaktor der realen Verzinsung (Aufzinsung) der Zahlungen $\bar{X}_j$ des Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$. Diese Verzinsung von $\bar{\mathbf{X}}$ liefert zum Zeitpunkt $t = n$ den Endwert $E_n(\bar{\mathbf{X}},q) = 0$, sodass der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ auch ein interner Zinsfaktor des Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$ ist.

Insgesamt hat man eine ökonomische Interpretation des Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ als Zinsfaktor der realen Verzinsung eines Zahlungsstroms, nämlich des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ unter der Voraussetzung (RSnq) bzw. des Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1}$ unter der Voraussetzung (RSmq) für ein beliebiges $m \in \{0,\ldots,n\}$.

Verzinsung von $\bar{\mathbf{X}}$ mit dem Kontozinsfaktor eines Verrechnungskontos

In der konkreten Situation des obigen Beispiels 6.2, in dem der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ durch den konstanten Kontozinsfaktor eines bereits vorhandenen Verrechnungskontos gegeben ist, ist für bestimmte Zahlungsströme $\mathbf{X}$ die Voraussetzung

(RSmq) erfüllt. Demzufolge tritt der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ auch als Zinsfaktor einer realen Verzinsung der Zahlungsstromkomponenten $\bar{X}_j$ ($j = 0,\ldots,n$) des Differenzzahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$ auf. Die Buchung und Verzinsung des Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$ mit dem Zinsfaktor $q = q_K$ auf dem Konto (siehe Beispiel 6.2, Teil b) liefert zum Zeitpunkt $t = n$ den Endwert von $\bar{\mathbf{X}}$ und damit die Kontostandsänderung

$$\bar{C}_n - C_n = E_n(\bar{\mathbf{X}},q) = 0.$$

Insbesondere ist auch hier der Kalkulationszinsfaktor bzw. Kontozinsfaktor q ein interner Zinsfaktor des Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$.
Die wesentlichen Voraussetzungen in diesem Beispiel bestehen darin, dass die vorgegebenen Kontostände C_j ($j = 0,\ldots,n$-1) keinen Vorzeichenwechsel aufweisen und auch die Einzahlung des Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$ auf dem Konto keinen Vorzeichenwechsel der Kontostände $\bar{C}_j$ hervorruft. Für die nach der Buchung von $\bar{\mathbf{X}}$ resultierenden Kontostände $\bar{C}_j = \bar{C}_j(\mathbf{X})$ ($j = 0,\ldots,n$-1) sollen also auf einem Anlagekonto mit $C_j \geq 0$ (bzw. Kreditkonto mit $C_j \leq 0$) noch die folgenden Vorzeichenbedingungen gelten:

(VCm)
$$\begin{aligned}
\bar{C}_j &= C_j + E_j(\bar{\mathbf{X}},q) \\
&= C_j + E_j(\mathbf{X},q) \qquad \geq 0\ (\leq 0) \qquad \text{für } j = 0,\ldots,m-1, \\
\bar{C}_j &= C_j + E_j(\bar{\mathbf{X}},q) \\
&= C_j + E_j(\mathbf{X},q) - Z_{m,n}(\mathbf{X},q)q^{j-m} \\
&= C_j + \sum_{k=j+1}^{n} X_k q^{j-k} \qquad \geq 0\ (\leq 0) \qquad \text{für } j = m,\ldots,n-1,n.
\end{aligned}$$

Die Bedingung (RSmq) für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ und an den für den Beurteiler zugänglichen Kapitalmarkt wird hier im Kontobeispiel also durch eine Voraussetzung für die Verbuchung des Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$ formuliert.

Speziell für den Vergleichszeitpunkt $m = 0$ erhält man für die nach der Buchung von

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{X} - B_n(\mathbf{X},q)\mathbf{e}_1 \\
&= (X_0 - B_n(\mathbf{X},q),X_1,\ldots,X_n)^{\mathsf{T}}
\end{aligned}$$

resultierenden Kontostände $\bar{C}_j = \bar{C}_j(\mathbf{X})$ die Vorzeichenbedingungen

(VC0)
$$\begin{aligned}
\bar{C}_j &= C_j + E_j(\mathbf{X},q) - B_n(\mathbf{X},q)q^j \\
&= C_j + \sum_{k=0}^{j} X_k q^{j-k} - \sum_{k=0}^{n} X_k q^{j-k} \\
&= C_j + \sum_{k=j+1}^{n} X_k q^{j-k} \qquad \geq 0\ (\leq 0) \qquad \text{für } j = 0,\ldots,n-1,n.
\end{aligned}$$

Speziell für den Vergleichszeitpunkt $m = n$ erhält man für die nach der Buchung von

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{X} - E_n(\mathbf{X},q)\mathbf{e}_{n+1} \\
&= (X_0,\ldots,X_{n-1},X_n - E_n(\mathbf{X},q))^{\mathsf{T}}
\end{aligned}$$

errechneten Kontostände $\bar{C}_j = \bar{C}_j(\mathbf{X})$ die Vorzeichenbedingungen

(VCn) $\quad \bar{C}_j = C_j + E_j(\mathbf{X},q) \quad \geq 0\ (\leq 0) \quad$ für $j = 0,\ldots,n\text{-}1,n$.

Falls man nun den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ statt auf ein Konto mit vorgegebener Kontostandsentwicklung C_j auf ein **neu angelegtes Konto** ($C_j = 0$ für $j = 0,\ldots,n$) mit einem festen Kontozinsfaktor $q = q_K$ buchen im Sinne von gutschreiben will, so kommt wegen $\bar{C}_0 = X_0$ für eine Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) nur ein Kreditkonto in Frage und für eine Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$) nur ein Anlagekonto. In diesem Spezialfall gelten für eine Investition (bzw. Finanzierung) $\mathbf{X}$ strengere Vorzeichenbedingungen:
Für einen beliebigen Vergleichszeitpunkt $m \in \{0,\ldots,n\}$ lauten diese

(VOm) $\quad \bar{C}_j = E_j(\mathbf{X},q) \quad \geq 0\ (\leq 0) \quad$ für $j = 0,\ldots,m\text{-}1$,

$$\bar{C}_j = \sum_{k=j+1}^{n} X_k q^{j-k} \geq 0\ (\leq 0) \quad \text{für } j = m,\ldots,n\text{-}1,n.$$

Für $m = 0$ lauten diese Vorzeichenbedingungen

(VO0) $\quad \bar{C}_j = E_j(\bar{\mathbf{X}},q) = \sum_{k=j+1}^{n} X_k q^{j-k} \leq 0\ (\geq 0) \quad$ für $j = 0,\ldots,n\text{-}1$,

was bedeutet, dass für jedes $j = 0,\ldots,n\text{-}1$ der zum Zeitpunkt $t = j$ gehörige Zeitwert des im Intervall $[j+1,n]$ liegenden Zahlungsstroms $(X_{j+1},\ldots,X_n)^{\mathsf{T}}$ nichtpositiv (bzw. nichtnegativ) ist.
Für $m = n$ lauten diese Vorzeichenbedingungen

(VOn) $\quad \bar{C}_j = E_j(\bar{\mathbf{X}},q) = E_j(\mathbf{X},q) \quad \leq 0\ (\geq 0) \quad$ für $j = 0,\ldots,n\text{-}1$.

Da außerdem $\bar{C}_n = E_n(\bar{\mathbf{X}},q) = 0$ ist, bedeutet dies, dass der Kalkulationszinsfaktor bzw. Kontozinsfaktor q ein interner Zinsfaktor von $\bar{\mathbf{X}}$ und ein sogenannter Verrechnungskontozinsfaktor des Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}}$ ist. Die Definition des Verrechnungskontozinsfaktors (VK-Zinsfaktors) wird in Abschnitt 7.1.3 bei der Behandlung der Methode des internen Zinssatzes für einen regulären Zahlungsstrom angegeben.

6.4 Annuitätenmethode

Bei der zu Beginn von Kapitel 6 angegebenen Definition des Annuitätenniveaus $\alpha_n(\mathbf{X})$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ für den Spezialfall der Verwendung eines fristigkeitsunabhängigen Kalkulationszinsfaktors $q > 0$, der noch gleichzeitig als Haben- und Sollzinsfaktor dient, wird bei der Herleitung der expliziten Formel für das Annuitätenniveau ein Umweg über einen anderen Maßstab (Endwert, Kapitalwert oder Zeitwert) beschritten. Aufgrund der möglichen Umrechnungen für Endwert, Kapitalwert und m-ten Zeitwert ergibt sich dabei für das Annuitätenniveau stets derselbe Wert.

Bei der jetzt folgenden allgemeineren Definition des Annuitätenniveaus mit der Verwendung von Auf- und Abzinsungsfaktoren, die auch von der Fristigkeit (Laufzeit) und der Diathese (Handlungsrichtung, Verwendung des Zinssatzes als Anlagezinssatz oder Kreditzinssatz mit den Indizes H für Haben und S für Soll) abhängen, werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt.

Das eine Mal wird zur Herleitung einer expliziten Formel $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ für das Annuitätenniveau einer der Maßstäbe Endwert, Kapitalwert oder Zeitwert verwendet. Je nach verwendetem Maßstab resultieren daraus verschiedene Definitionen und im Allgemeinen auch verschiedene Präferenzordnungen. Es wird nämlich auch gezeigt, dass die zur Annuitäten-Nutzenfunktion $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ gehörige Annuitäten-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{AZ}}$ übereinstimmt mit der verwendeten Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{Z}}$, deren Vielfalt bereits in Satz 6.1 beschrieben wird. Eine ökonomische Interpretierbarkeit des zeitwertbezogenen Annuitätenniveaus ist dann nur über den verwendeten Zeitwert als Margenzahlung möglich.

Das andere Mal wird der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ glattgestellt auf die Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O}$) der Annuitätenentnahme und durch den resultierenden Beurteilungsparameter $\tilde{v}(\mathbf{X})$ das replizierbare Annuitätenniveau $\tilde{\alpha}(\mathbf{X})$ definiert. Hier ist dann die direkte ökonomische Interpretierbarkeit des Annuitätenzahlungsstroms als Margenzahlungsstrom möglich. Als Supplementsystem kann dabei das System L von Abschnitt 6.3.3 für die ökonomische Interpretation des Zeitwerts oder ein beliebiges Supplementsystem L^* zur Anwendung kommen, für welches die eindeutige Replizierung auf die Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu)$ in ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ gesichert ist. Beispiele für derartige Beurteilungskurven werden in Abschnitt 8.4 angegeben. Für verschiedene Supplementsysteme L^* mit unterschiedlichen zulässigen Supplementmengen $C_{M^n}(L^*)$ erhält man verschiedene R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RL^*\tilde{V}}$ und verschiedene replizierbare Annuitätenniveau-Nutzenfunktionen $\tilde{\alpha}^*(\mathbf{X})$.

Anzumerken ist noch, dass sowohl bei der zeitwertbezogenen als auch bei der replizierbaren Annuitätenmethode als Spezialfälle auch die einzelnen Zeitwertmethoden mit den Richtungsvektoren $\mathbf{A} = \mathbf{e}_{m+1}$ der Beurteilungskurven enthalten sind.

6.4.1 Zeitwertbezogenes Annuitätenniveau

Bei der expliziten auf einen Zeitwert bezogenen Definition des Annuitätenniveaus genügt es den Weg über den Zeitwert zum Zeitpunkt $t = m$ zu behandeln, da dabei auch der Weg über den Endwert bzw. Barwert als Spezialfall für $m = n$ bzw. $m = 0$ enthalten ist. Für die Herleitung der Formel für das auf den m-ten Zeitwert bezogene Annuitätenniveau $\alpha = \alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ wird gefordert, dass der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ übereinstimmt mit dem Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{G})$ des Annuitätenzahlungsstroms $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\alpha) = \alpha\cdot\mathbf{A}$, wobei $\mathbf{A} = (A_0,\ldots,A_n)^\mathsf{T} \gtrdot \mathbf{O}$ die konstant vorgegebene Zahlungsstromstruktur des Annuitätenzahlungsstroms $\mathbf{G}(\alpha)$ beschreibt:

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{G}) \qquad \text{mit } \mathbf{G} = \alpha_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{A} = \mathbf{G}(\alpha_{m,n}(\mathbf{X})).$$

Geometrisch gesehen ist der Punkt $\mathbf{G}(\alpha_{m,n}(\mathbf{X}))$ also der Schnittpunkt der Annuitätengeraden $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\alpha)$ mit der Indifferenzklasse von $\mathbf{X}$ bezüglich der Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ der Zeitwertmethode (siehe Abbildung 6.13 für $n = 1$, $m = 0$, $\succcurlyeq_Z = \succcurlyeq_B$). Nachfolgend wird bewiesen, dass das zeitwertbezogene Annuitätenniveau $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ durch die folgende explizite Formel gegeben ist:

$$\alpha_{m,n}(\mathbf{X}) = \frac{Z_{m,n}(\mathbf{X})}{\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X}))}$$

$$\text{mit } \sigma_{m,n}(\mathbf{X}) := \operatorname{sgn} Z_{m,n}(\mathbf{X}) \in \{+1, 0, -1\},$$

$$\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) := \sum_{j=0}^{m} A_j a_{j,m,D_j(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{A})} + \sum_{j=m+1}^{n} A_j d_{m,j,F_j(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{A})} .$$

Im Gegensatz zu dem zu Beginn des Kapitels 6 behandelten Spezialfall eines einheitlichen Kalkulationszinsfaktors q, in dem $\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) = \mathrm{Z}_{m,n}(\mathbf{A})$ ist, ist hier der positive Summenausdruck $\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X}))$ kein für alle Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ konstanter Ausdruck. In Abhängigkeit vom Vorzeichen $\sigma_{m,n}(\mathbf{X}) \in \{-1, 0, +1\}$ des Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ kann $\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X}))$ im Allgemeinen drei verschiedene Werte annehmen, nämlich

$$\text{im Fall } \sigma_{m,n}(\mathbf{X}) = +1: \quad \zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) = \sum_{j=0}^{m} A_j a_{j,m,H} + \sum_{\substack{j=m+1\\ A_j>0}}^{n} A_j d_{m,j,S} = Z_{m,n}(\mathbf{A}),$$

$$\text{im Fall } \sigma_{m,n}(\mathbf{X}) = 0: \quad \zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) = \sum_{j=0}^{m} A_j a_{j,m,H} + \sum_{j=m+1}^{n} A_j d_{m,j,H} ,$$

$$\text{im Fall } \sigma_{m,n}(\mathbf{X}) = -1: \quad \zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) = \sum_{\substack{j=0\\ A_j>0}}^{m} A_j a_{j,m,S} + \sum_{j=m+1}^{n} A_j d_{m,j,H} .$$

Dennoch kann auch hier nachfolgend gezeigt werden, dass die zum zeitwertbezogenen Annuitätenniveau $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ gehörige Annuitäten-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{AZ}$ mit der zur Zeitwert-Nutzenfunktion $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ gehörigen Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_Z$ übereinstimmt:

$$\succcurlyeq_{AZ} = \succcurlyeq_Z.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \succcurlyeq_{AZ} \mathbf{Y} &\Leftrightarrow \alpha_{m,n}(\mathbf{X}) \geq \alpha_{m,n}(\mathbf{Y})\\ &\Leftrightarrow Z_{m,n}(\mathbf{X}) \geq Z_{m,n}(\mathbf{Y})\\ &\Leftrightarrow \mathbf{X} \succcurlyeq_Z \mathbf{Y}.\end{aligned}$$

Beweis für die explizite Formel des zeitwertbezogenen Annuitätenniveaus: Aus der Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned}Z_{m,n}(\mathbf{X}) &= Z_{m,n}(\mathbf{G}(\alpha))\\ &= \alpha\cdot\Big[\sum_{j=0}^{m} A_j a_{j,m,D_j(\alpha\mathbf{A})} + \sum_{j=m+1}^{n} A_j d_{m,j,F_j(\alpha\mathbf{A})}\Big]\\ &= \alpha\cdot\zeta(\alpha)\end{aligned}$$

für $\alpha = \alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ ergeben sich wegen $\mathbf{A} \mathrel{\dot{\geq}} \mathbf{O}$, $a_{j,n,D_j(\alpha\mathbf{A})} > 0$, $d_{m,j,F_j(\alpha\mathbf{A})} > 0$ zunächst die Positivität des in eckigen Klammern stehenden Summenausdrucks

$$\zeta(\alpha) := \sum_{j=0}^{m} A_j a_{j,m,D_j(\alpha\mathbf{A})} + \sum_{j=m+1}^{n} A_j d_{m,j,F_j(\alpha\mathbf{A})},$$

dann die Vorzeichengleichungen

$$\sigma_{m,n}(\mathbf{X}) := \operatorname{sgn} Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \operatorname{sgn} \alpha \qquad (\zeta(\alpha) > 0),$$

$$\operatorname{sgn} \alpha A_j = \operatorname{sgn} \sigma_{m,n}(\mathbf{X}) A_j \qquad (A_j > 0, j = 0,\ldots,n)$$

und Zinssatztypgleichungen

$$D_j(\alpha\mathbf{A}) = D_j(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{A}),$$

$$F_j(\alpha\mathbf{A}) = F_j(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{A}),$$

sodass der Summenausdruck

$$\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) = \sum_{j=0}^{m} A_j a_{j,m,D_j(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{A})} + \sum_{j=m+1}^{n} A_j d_{m,j,F_j(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{A})}$$

eindeutig durch **X** bzw. genauer nur durch $\sigma_{m,n}(\mathbf{X})$ bestimmt ist und somit nur drei Werte annimmt. Damit erhält man für das zeitwertbezogene Annuitätenniveau $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms **X** die explizite Formel

$$\alpha_{m,n}(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{X})/\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})). \qquad \square$$

Beweis der Übereinstimmung der Präferenzordnungen $\succcurlyeq_{AZ}$ und $\succcurlyeq_Z$: Es werden zwei Beweise angegeben. Der erste Beweis argumentiert mit den entsprechenden Ungleichungen für die Funktionswerte der Nutzenfunktionen $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ und $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$. Der zweite Beweis stellt eine der Nutzenfunktionen als eine streng monotone Transformation der anderen Nutzenfunktion dar.

1. Beweis: a) $\succcurlyeq_Z \subseteq \succcurlyeq_{AZ}$: Aus der Relation $\mathbf{X} \succcurlyeq_Z \mathbf{Y}$ für die Zahlungsströme bzw. der Ungleichung

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}) \geq Z_{m,n}(\mathbf{Y})$$

für die Zeitwerte folgt wegen der Monotonie der Vorzeichenfunktion sgn auch die entsprechende Ungleichung für deren Vorzeichen:

$$\sigma_{m,n}(\mathbf{X}) \geq \sigma_{m,n}(\mathbf{Y}).$$

Wegen $\sigma_{m,n}(\mathbf{Z}) = \operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{Z})$ ($\mathbf{Z} = \mathbf{X}, \mathbf{Y}$) entspricht dies der Vorzeichenungleichung

$$\operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{X}) \geq \operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{Y}).$$

für die Annuitätenniveaus. Um jedoch auf die entsprechende Ungleichung

$$\alpha_{m,n}(\mathbf{X}) \geq \alpha_{m,n}(\mathbf{Y})$$

für die Annuitätenniveaus selbst zu schließen, ist eine Fallunterscheidung nötig.

Falls $\sigma_{m,n}(\mathbf{X}) > \sigma_{m,n}(\mathbf{Y})$ ist, folgt die Vorzeichenungleichung

$$\operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{X}) = \sigma_{m,n}(\mathbf{X}) > \sigma_{m,n}(\mathbf{Y}) = \operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{Y})$$

und daraus (wegen der Monotonie der Vorzeichenfunktion) notwendig die Annuitätenungleichung

$$\alpha_{m,n}(\mathbf{X}) > \alpha_{m,n}(\mathbf{Y})$$

und die Relation $\mathbf{X} \succcurlyeq_{AZ} \mathbf{Y}$.

Falls $\sigma_{m,n}(\mathbf{X}) = \sigma_{m,n}(\mathbf{Y})$ ist, benutzt man die Übereinstimmung $\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) = \zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{Y}))$ und erhält damit auch die Ungleichung

$$\alpha_{m,n}(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{X})/\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) \geq Z_{m,n}(\mathbf{Y})/\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{Y})) = \alpha_{m,n}(\mathbf{Y})$$

für die Annuitätenniveaus bzw. die Relation $\mathbf{X} \succcurlyeq_{AZ} \mathbf{Y}$.

b) $\succcurlyeq_{AZ} \subseteq \succcurlyeq_Z$: Falls umgekehrt die Relation $\mathbf{X} \succcurlyeq_{AZ} \mathbf{Y}$ bzw. die Annuitätenungleichung $\alpha_{m,n}(\mathbf{X}) \geq \alpha_{m,n}(\mathbf{Y})$ gültig ist, folgt wegen der Monotonie der Vorzeichenfunktion die Vorzeichenungleichung

$$\sigma_{m,n}(\mathbf{X}) = \operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{X}) \geq \operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{Y}) = \sigma_{m,n}(\mathbf{Y}).$$

Im Falle $\sigma_{m,n}(\mathbf{X}) = \sigma_{m,n}(\mathbf{Y})$ gilt $\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) = \zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{Y}))$ (> 0) und damit auch die Ungleichung

$$Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \alpha_{m,n}(\mathbf{X})\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) \geq \alpha_{m,n}(\mathbf{Y})\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{Y})) = Z_{m,n}(\mathbf{Y})$$

für die Zeitwerte bzw. die Relation $\mathbf{X} \succcurlyeq_Z \mathbf{Y}$.

Im Falle $\sigma_{m,n}(\mathbf{X}) > \sigma_{m,n}(\mathbf{Y})$ erhält man wie in Teil a) die Vorzeichenungleichung

$$\operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{X}) > \operatorname{sgn} \alpha_{m,n}(\mathbf{Y}),$$

wegen $\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{X})) > 0$, $\zeta(\sigma_{m,n}(\mathbf{Y})) > 0$ die weitere Vorzeichenungleichung

$$\operatorname{sgn} Z_{m,n}(\mathbf{X}) = \operatorname{sgn} (\alpha_{m,n}(\mathbf{X})\zeta(\mathbf{X})) > \operatorname{sgn} (\alpha_{m,n}(\mathbf{Y})\zeta(\mathbf{Y})) = \operatorname{sgn} Z_{m,n}(\mathbf{Y}),$$

daraus notwendig die Zeitwerte-Ungleichung $Z_{m,n}(\mathbf{X}) > Z_{m,n}(\mathbf{Y})$ und die Relation $\mathbf{X} \succcurlyeq_Z \mathbf{Y}$. Damit ist die

Übereinstimmung der beiden Präferenzordnungen $\succcurlyeq_{AZ}$ und $\succcurlyeq_{Z}$ nachgewiesen.

2. Beweis: Durch die Zuordnungsvorschrift

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \delta(x) := x/\zeta(\operatorname{sgn} x) \in \mathbb{R}$$

wird auf $\mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion $\delta(x)$ als Quotient der Identität $id(x) = x$ und und der positiven Treppenfunktion $\zeta(\operatorname{sgn} x)$ definiert. Da die einzige Sprungstelle der Treppenfunktion bei der Vorzeichenwechselstelle $x = 0$ der streng monotonen steigenden Identität $id(x)$ liegt, ist auch $\delta(x)$ eine streng monoton steigende Funktion. Mit dieser Funktion $\delta(x)$ gilt für die Nutzenfunktionen $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ und $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ die Beziehung

$$\alpha_{m,n}(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{X})/\zeta(\operatorname{sgn} Z_{m,n}(\mathbf{X})) = \delta(Z_{m,n}(\mathbf{X})),$$

sodass nach einer Anmerkung zu Beginn von Kapitel 6 die zu den Nutzenfunktionen gehörigen Präferenzordnungen übereinstimmen: $\succcurlyeq_{AZ} = \succcurlyeq_{Z}$. □

Als Spezialfälle erhält man für $m = n$ das endwertbezogene Annuitätenniveau $\alpha_{n,n}(\mathbf{X})$ mit der zugehörigen Präferenzordnung

$$\succcurlyeq_{AE} = \succcurlyeq_{E}$$

und für $m = 0$ das kapitalwertbezogene (barwertbezogene) Annuitätenniveau $\alpha_{0,n}(\mathbf{X})$ mit der zugehörigen Präferenzordnung

$$\succcurlyeq_{AB} = \succcurlyeq_{B}.$$

Das kapitalwertbezogene Annuitätenniveau, die Indifferenzklasse und die Bessermenge eines Zahlungsstroms $\mathbf{Y}$ zur Kapitalwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{B}$ sind in Abbildung 6.13 dargestellt.

Ökonomische Interpretation der zeitwertbezogenen Annuitätenmethode

Bei der hier verwendeten Definition des Annuitätenniveaus als zeitwertbezogenes Annuitätenniveau $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ besteht eine ökonomische Interpretation darin, dass der gemeinsame Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{G})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ und des Annuitäten-Zahlungsstroms

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\alpha_{m,n}(\mathbf{X})) = \alpha_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{A}$$

nach Abschnitt 6.3.3 auch als die Margenentnahme

$$\breve{v}(\mathbf{X}) = \breve{v}(\mathbf{G}) = Z_{m,n}(\mathbf{X})$$

zum Vergleichszeitpunkt $t = m$ bei der Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{G}$ mittels des Supplements

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \quad = -\,\mathbf{X} \;+\; Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \;\in\; C_{M^n}(L) \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{S}'(\mathbf{G}) \quad = -\,\mathbf{G} \;+\; Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} \;\in\; C_{M^n}(L),\quad L = L(m,\mathbf{P}^j_{E_j},\mathbf{M}^j_{E_j}),$$

und der Beurteilungskurve $\breve{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\mathbf{e}_{m+1}$ erhalten wird. Der bei der Glattstellung von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{G}$ jeweils erhaltene Margenzahlungsstrom hat die Struktur

$$\breve{\mathbf{V}}(\breve{v}(\mathbf{X})) = Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{e}_{m+1} = Z_{m,n}(\mathbf{X})\cdot(0,..,0,1,..,0)^{\mathsf{T}}.$$

Die **implizite Prämisse** dieser ökonomischen Interpretation der Annuitätenmethode für einen *fest fixierten Zahlungsstrom* $\mathbf{X}$ besteht in der Forderung der realen Verfügbarkeit des speziellen Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ bzw. $\mathbf{S}'(\mathbf{G})$.

Dem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird mittels des Annuitätenniveaus $\alpha_{m,n}(\mathbf{X})$ ein Zahlungsstrom $\mathbf{G}(\alpha_{m,n}(\mathbf{X}))$ auf der Geraden

$$G : \mathbf{G}(\alpha) = \alpha\cdot\mathbf{A},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

zugeordnet, der zu $\mathbf{X}$ äquivalent ist bezüglich der zeitwertbezogenen Annuitäten-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{AZ}}$, bezüglich der Zeitwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{Z}}$ und bezüglich der in Abschnitt 6.3.3 angegebenen R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}L\breve{V}}$. Es gilt also

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\alpha_{m,n}(\mathbf{X})) \in G \cap \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}L\breve{V}}(\mathbf{X}) .$$

Die implizite Prämisse der ökonomischen Interpretation der Annuitätenmethode *auf ganz* $\mathbb{R}^{n+1}$ stimmt überein mit der impliziten Prämisse für die ökonomische Interpretation der verwendeten Zeitwertmethode und besteht somit in der Voraussetzung der realen Existenz der zulässigen Supplementmenge $C_{M^n}(L)$ des speziellen Supplementsystems $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$ auf dem Kapitalmarkt.

Zu unterscheiden von der Glattstellung der beiden Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{G} \in G$ mittels des Supplementsystems $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$ auf einen Punkt

$$\breve{\mathbf{V}}(\breve{v}(\mathbf{X})) = \breve{v}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_{m+1} = Z_{m,n}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_{m+1}$$

der Beurteilungskurve $\breve{\mathbf{V}}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{e}_{m+1}$ (Gerade mit Richtungsvektor $\mathbf{e}_{m+1}$) mit der Zeitwertentnahme bei $t = m$ ist aber die Glattstellung von $\mathbf{X}$ mittels eines geeignet gewählten Supplementsystems L^* auf einen Punkt

$$\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{v}(\mathbf{X})) = \tilde{v}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}$$

der Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{A}$ (Gerade mit Richtungsvektor $\mathbf{A}$) der Annuitätenentnahme mit der Margenzahlungsstromstruktur $\mathbf{A}$. Mit der letzeren Glattstellung von $\mathbf{X}$ erhält man eine im Allgemeinen von $\trianglerighteq_{\mathrm{R}L\breve{V}}$ verschiedene R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}L^*\tilde{V}}$. Diese zweite Art der Glattstellung wird im folgenden Abschnitt 6.4.2 zum replizierbaren Annuitätenniveau behandelt und auch schon in Abbildung 6.13 dargestellt.

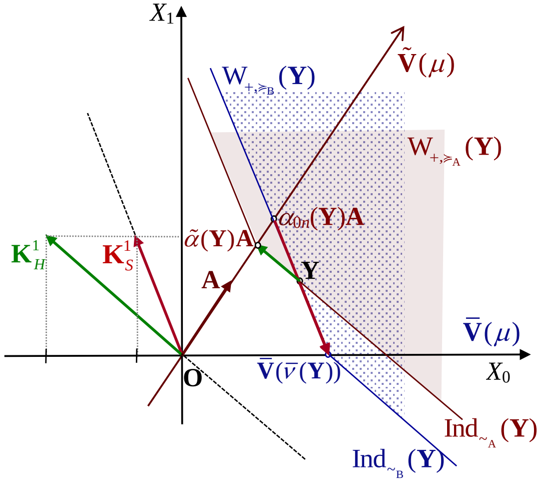


Abb. 6.13 Der kapitalwertbezogene Annuitätenzahlungsstrom $\alpha_{0n}(\mathbf{Y})\mathbf{A}$, der replizierbare Annuitätenzahlungsstrom $\tilde{\alpha}(\mathbf{Y})\mathbf{A}$, die Beurteilungskurvenpunkte $\bar{\mathbf{V}}(\bar{v}(\mathbf{Y})) = Z_{0,n}(\mathbf{Y})\mathbf{e}_1$ und $\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{v}(\mathbf{Y})) = \tilde{\alpha}(\mathbf{Y})\mathbf{A}$, die Indifferenzklassen $\mathrm{Ind}_{\sim_B}(\mathbf{Y})$, $\mathrm{Ind}_{\sim_A}(\mathbf{Y})$ und die Bessermengen $W_{+,\succcurlyeq_B}(\mathbf{Y})$, $W_{+,\succcurlyeq_A}(\mathbf{Y})$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ bei einem unvollkommenen Supplementsystem $L = L(\mathbf{K}_H^1, \mathbf{K}_S^1)$ $(n = 1)$

6.4.2 Replizierbares Annuitätenniveau

Es wird nun gezeigt, dass ein Annuitätenzahlungsstrom $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\alpha) = \alpha \cdot \mathbf{A}$ mit der konstant vorgegebenen Zahlungsstromstruktur $\mathbf{A} = (A_0, \ldots, A_n)^\mathsf{T} \gtrdot \mathbf{O}$ des Annuitätenzahlungsstroms $\mathbf{G}$ auch eindeutig als Margenzahlungsstrom $\tilde{\mathbf{V}}(\tilde{v}(\mathbf{X}))$ bei einer speziellen Replizierung (Glattstellung) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{v}(\mathbf{X})), \; \mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in C_{M^n}(L),$$

gewonnen werden kann, nämlich bei der Replizierung mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$, der Beurteilungskurve

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{A} = \mu \cdot (A_0, \ldots, A_n)^\mathsf{T} \qquad (\mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O})$$

der Annuitätenentnahme und beispielsweise dem speziellen Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}_{E_j}^j, \mathbf{M}_{E_j}^j)$ der Zeitwertmethode von Abschnitt 6.3.3. Damit wird mit der gemäß Abschnitt 5.2.1 gelieferten R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RL\tilde{V}}$ auch eine Annuitätenniveau-Nutzenfunktion $\tilde{v}(\mathbf{X}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{X})$ definiert, welche die Annuitäten-Präferenzordnung $\succcurlyeq_A = \trianglerighteq_{RL\tilde{V}}$ beschreibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \succcurlyeq_A \mathbf{Y} \quad &:\Leftrightarrow \tilde{\alpha}(\mathbf{X}) \geq \tilde{\alpha}(\mathbf{Y}) \\ &\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{v}(\mathbf{X})) \geq \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{v}(\mathbf{Y})). \end{aligned}$$

Dieses mit der Replizierung erhaltene sog. replizierbare Annuitätenniveau $\tilde{\alpha}(\mathbf{X})$ kann im Allgemeinen nicht mittels einer expliziten Formel berechnet werden, sondern muss mit einem Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung einer Hilfsfunktion bestimmt werden. Das im Anschluss an den Beweis folgende Zahlenbeispiel zeigt für einen konkreten Zahlungsstrom **X** die explizite Berechnung des zeitwertbezogenen Annuitätenniveaus und die iterative Bestimmung des replizierbaren Annuitätenniveaus.

Beweis: für die Existenz und Einzigkeit der Replizierung mit dem Supplementsystem L und der Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu)$: Für die Glattstellung des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf einen Annuitätenzahlungsstrom $\mathbf{G} = \tilde{\alpha}(\mathbf{X})\,\mathbf{A}$ verwendet man wie bei der Zeitwertmethode in Abschnitt 6.3.3 (mit beliebigem Vergleichszeitpunkt m) den Supplementansatz

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{P}^j_{E_j(\mathbf{X})} + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{M}^j_{E_j(\mathbf{X})} \in C_{M^n} \qquad (\lambda_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\ldots,n)$$

mit dem dort ausführlicher beschriebenen Supplementsystem $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$ und der Supplementbedingung

(SBPM) $\quad E_j(\mathbf{X}) = H \quad$ bei $\lambda_j(\mathbf{X}) \geq 0$,
$\qquad\qquad E_j(\mathbf{X}) = S \quad$ bei $\lambda_j(\mathbf{X}) < 0$.

Die Replizierungsgleichung

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{V}}(\tilde{\nu}(\mathbf{X}))$$

mit dem Supplementansatz für $\mathbf{S}‘(\mathbf{X})$ lautet dann in der Vektorschreibweise

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{P}^j_{E_j(\mathbf{X})} + \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})\mathbf{M}^j_{E_j(\mathbf{X})} = -\,\mathbf{X} + \tilde{\nu}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A},$$

in der Matrizenschreibweise (mit $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{X})$, $\nu = \tilde{\nu}(\mathbf{X})$)

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \lambda_1(\mathbf{X}) & . & . & \lambda_m(\mathbf{X}) & \lambda_{m+1}(\mathbf{X}) & . & \lambda_n(\mathbf{X}) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\
0 & -1 & . & & & & . \\
. & 0 & -1 & . & & & . \\
0 & . & 0 & -1 & 0 & . & 0 \\
a_{0,m,H/S} & . & . & a_{m,m,H/S} & -d_{m,m+1,H/S} & . & -d_{m,n,H/S} \\
0 & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\
. & & & & 0 & 1 & 0 \\
0 & . & . & . & . & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ \lambda_m \\ \lambda_{m+1} \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -X_0 + A_0\nu \\ -X_1 + A_1\nu \\ . \\ . \\ -X_m + A_m\nu \\ . \\ . \\ -X_n + A_n\nu \end{pmatrix}$$

und in der Komponentenschreibweise

$$\lambda_j(\mathbf{X}) = X_{j-1} - A_{j-1}\,\tilde{\nu}(\mathbf{X}) \qquad (j = 1,\ldots,m),$$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(\mathbf{X})a_{j-1,m,E_j(\mathbf{X})} - \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j(\mathbf{X})d_{m,j,E_j(\mathbf{X})} = -\,X_m + A_m\,\tilde{\nu}(\mathbf{X}),$$

$$\lambda_j(\mathbf{X}) = -\,X_j + A_j\,\tilde{\nu}(\mathbf{X}) \qquad (j = m+1,\ldots,n).$$

Um die Existenz von genau einer Lösung $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\nu)$ des Gleichungssystems nachzuweisen, betrachtet man nach einer Beweisidee[1] von Kruschwitz (1976), S. 18–20, zu vorgegebener unabhängiger Variable

[1] Diese Beweisidee wird von Kruschwitz für die Replizierung mit einperiodischen Termingeschäften und linearer Beurteilungskurve verwendet und hier in Abschnitt 8.4 bzw. auf der Autoren-Website

$\nu \in \mathbb{R}$ die Parameter λ_j als Funktionen von ν. Unter Nutzung der speziellen Matrixstruktur erhält man hier aus den ersten m Gleichungen und den letzten n-m Gleichungen die Transformationsparameter

$$\lambda_j = r_j(\nu) := X_{j-1} - A_{j-1}\,\nu \qquad \text{für } j = 1,\ldots,m,$$
$$\lambda_j = s_j(\nu) := -\,X_j + A_j\,\nu \qquad \text{für } j = m+1,\ldots,n.$$

Die mit diesen Funktionen $r_j(\nu)$ und $s_j(\nu)$ zu fest vorgegebenem ν sukzessive für aufsteigende Indizes j berechneten Parameter λ_j und zugehörigen Zinssatztypen $E_j = H/S$ liefern zusammen mit ν genau dann eine Lösung des Gleichungssystems, wenn diese noch die (m+1)-te Gleichung erfüllen, wenn also ν eine Nullstelle der folgenden Hilfsfunktion $h(\nu)$ ist:

$$h(\nu) := f(\nu) + g(\nu) + r_{m+1}(\nu)$$

mit

$$f(\nu) := \sum_{j=1}^{m} r_j(\nu)a_{j-1,m,E_j(\nu)} \qquad \text{mit } E_j(\nu) = H \text{ bei } r_j(\nu) \geq 0, \quad E_j(\nu) = S \text{ bei } r_j(\nu) < 0,$$

$$g(\nu) := -\sum_{j=m+1}^{n} s_j(\nu)d_{m,j,E_j(\nu)} \qquad \text{mit } E_j(\nu) = H \text{ bei } s_j(\nu) \geq 0, \quad E_j(\nu) = S \text{ bei } s_j(\nu) < 0,$$

$$r_{m+1}(\nu) := X_m - A_m\,\nu.$$

Wegen $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ sind die Funktionen $r_j(\nu)$ (schwach) monoton fallend und die Funktionen $s_j(\nu)$ (schwach) monoton steigend. Wegen der Positivität der Auf- und Abzinsungsfaktoren sind dann $f(\nu)$ und $g(\nu)$ monoton fallend und damit auch $h(\nu)$ monoton fallend.

Wegen $\mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O}$, also $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ und $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, gibt es einen Index p, $0 \leq p \leq n$, mit

$$A_0 = \ldots A_{p-1} = 0, \quad A_p > 0, \quad A_j \geq 0 \text{ für } j = p+1,\ldots,n.$$

Im Fall $p \leq m - 1$ ist $p+1 \leq m$, $r_{p+1}(\nu) = X_p - A_p\,\nu$ streng monoton fallend und damit $f(\nu)$ und $h(\nu)$ streng monoton fallend.

Im Fall $p = m$ ist $r_{m+1}(\nu) = X_m - A_m\,\nu$ streng monoton fallend und damit auch $h(\nu)$ streng monoton fallend.

Im Fall $p \geq m+1$ ist $s_p(\nu) = -\,X_p + A_p\,\nu$ streng monoton steigend und damit $g(\nu)$ und $h(\nu)$ streng monoton fallend. In allen drei Fällen ist also $h(\nu)$ streng monoton fallend.

Nun sind die Funktionen $r_j(\nu)$ und $s_j(\nu)$ affin-lineare (inhomogen lineare) Funktionen, wobei die $r_j(\nu)$ konstant oder streng monoton fallend mit genau einer Vorzeichenwechselstelle und die $s_j(\nu)$ konstant oder streng monoton steigend mit genau einer Vorzeichenwechselstelle sind. Die Aufzinsungsfaktoren $a_{j-1,m,E_j(\nu)}$ und Abzinsungsfaktoren $d_{m,j,E_j(\nu)}$ sind jeweils positive Treppenfunktionen, deren einzig mögliche Sprungstelle jeweils bei der r_j- bzw s_j-Nullstelle ist. Demzufolge sind die Produktfunktionen $r_j(\nu)a_{j-1,m,E_j(\nu)}$ bzw. $s_j(\nu)d_{m,j,E_j(\nu)}$ stückweise affin-linear und ebenfalls stetig. Als Summe von stetigen stückweise affin-linearen Funktionen sind auch die Funktionen $f(\nu)$, $g(\nu)$ und $h(\nu)$ ebenfalls stetig und stückweise affin-linear. Unter stückweise affin-linearer Funktion wird hier eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion verstanden, für die $\mathbb{R}$ in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann, so dass auf jedem Teilintervall die Funktion mit einer affin-linearen Funktion übereinstimmt.

Da die Funktion $h(\nu)$ stückweise affin-linear und streng monoton fallend ist, besitzt sie das Grenzwertverhalten $h(\nu) \longrightarrow +\infty$ bei $\nu \longrightarrow -\infty$ und $h(\nu) \longrightarrow -\infty$ bei $\nu \longrightarrow +\infty$, sodass sie nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano (1741–1848) auch surjektiv und insgesamt bijektiv ist. Sie besitzt demnach genau eine Nullstelle $\nu^* \in \mathbb{R}$. Diese Nullstelle von $h(\nu)$ kann mit einem Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung[2] numerisch bestimmt werden.

Zu fest vorgegebenem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt also die oben angegebene Replizierungsgleichung genau eine Lösung $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\nu) = (\lambda_1(\mathbf{X}),\ldots,\lambda_n(\mathbf{X}), \tilde{\nu}(\mathbf{X}))$. Durch diese eindeutige Replizierung wird daher auf $\mathbb{R}^{n+1}$ eine R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{RL}\tilde{V}}$ und mit dem Beurteilungsparameter $\tilde{\nu}(\mathbf{X})$ als sog.

---

www.pleier-r.de für die Duplizierung und Replizierung mit (n-j+1)-periodischen Termingeschäften bzw. j-periodischen Kassageschäften und beliebiger Beurteilungskurve.

2 Anmerkungen zur Nullstellenbestimmung einer Funktion mittels Iterationsverfahren findet man in Abschnitt 7.1.1.

replizierbares Annuitätenniveau eine Nutzenfunktion $\tilde{v}(\mathbf{X}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{X})$ definiert. Mit dem replizierbaren Annuitätenniveau $\tilde{\alpha}(\mathbf{X})$ erhält man den replizierbaren Annuitätenzahlungsstrom

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\alpha}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}. \qquad \square$$

Beispiel 6.3 Bestimmung des zeitwertbezogenen und des replizierbaren Annuitätenniveaus für einen Zahlungsstrom X $\in \mathbb{R}^3$

Bei der Laufzeit $n = 2$ und dem Vergleichszeitpunkt $m = 1$ sei das zur Zeitwertmethode gehörige Supplementsystem gegeben durch

$$L = L(1, \mathbf{P}_{E_1}^1, \mathbf{M}_{E_2}^2) = \{ \mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_S^1, \mathbf{S}_H^2, \mathbf{S}_S^2 \},$$

$$\mathbf{S}_H^1 = \mathbf{P}_H^1 = (-1, a_{0,1,H}, 0)^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{S}_S^1 = -\mathbf{P}_S^1 = (1, -a_{0,1,S}, 0)^\mathsf{T},$$

$$\mathbf{S}_H^2 = \mathbf{M}_H^2 = (0, -d_{1,2,H}, 1)^\mathsf{T}, \qquad \mathbf{S}_S^2 = -\mathbf{M}_S^2 = (0, d_{1,2,S}, -1)^\mathsf{T}$$

mit den folgenden Auf- und Abzinsungsfaktoren:

$$a_{0,1,H} = 1{,}1; \qquad a_{0,1,S} = 1{,}2;$$

$$d_{1,2,H} = 0{,}8; \qquad d_{1,2,S} = 0{,}6.$$

Die Annuitätenzahlungsstromstruktur sei gegeben durch den Vektor

$$\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2)^\mathsf{T} = (1;1{,}1;1{,}21)^\mathsf{T}.$$

a) Für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)^\mathsf{T} = (-1000;200;900)^\mathsf{T}$$

berechnet sich der erste Zeitwert zu

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(\mathbf{X}) &= X_0\, a_{0,1,D_0(\mathbf{X})} + X_1 + X_2\, d_{1,2,F_2(\mathbf{X})} \\ &= -1000 \cdot 1{,}2 + 200 \cdot 1 + 900 \cdot 0{,}6 \\ &= -460. \end{aligned}$$

Für die explizite Berechnung des zeitwertbezogenen Annuitätenniveaus $\alpha_{1,2}(\mathbf{X})$ von **X** wird noch der Ausdruck $\zeta(\sigma)$ für das Vorzeichen $\sigma = \sigma_{1,2}(\mathbf{X}) = \operatorname{sgn} Z_{1,2}(\mathbf{X}) = -1$ benötigt:

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma) &= A_0\, a_{0,1,D_0(\sigma\mathbf{A})} + A_1 + A_2\, d_{1,2,F_2(\sigma\mathbf{A})} \\ &= 1 \cdot 1{,}2 + 1{,}1 \cdot 1 + 1{,}21 \cdot 0{,}8 \\ &= 3{,}268. \end{aligned}$$

Damit erhält man das zeitwertbezogene Annuitätenniveau

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2}(\mathbf{X}) &= Z_{1,2}(\mathbf{X})/\zeta(\sigma) = -460/3{,}268 \\ &= -140{,}76 \end{aligned}$$

und den zugehörigen zeitwertbezogenen Annuitätenzahlungsstrom

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \alpha_{1,2}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A} = -140{,}76 \cdot (1;1{,}1;1{,}21)^\mathsf{T} \\ &= (-140{,}76;-154{,}83;-170{,}32)^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Tatsächlich besitzt dieser Annuitätenzahlungsstrom **G** denselben Zeitwert wie **X**:

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(\mathbf{G}) &= G_0\, a_{0,1,D_0(\mathbf{G})} + G_1 + G_2\, d_{1,2,F_2(\mathbf{G})} \\ &= -140{,}76 \cdot 1{,}2 - 154{,}83 - 170{,}32 \cdot 1{,}2 \\ &= -460 \\ &= Z_{1,2}(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

b) Als Nächstes soll nun das replizierbare Annuitätenniveau $\tilde{\alpha}(\mathbf{X})$ von **X** bestimmt werden. Wie im obigen Beweis für die eindeutige Replizierung von **X** mittels $L = L(m, \mathbf{P}_{E_j}^j, \mathbf{M}_{E_j}^j)$ und $\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{A}$ dargestellt wurde, ist dazu die einzige Nullstelle $\tilde{v}(\mathbf{X}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{X})$ der rekursiv definierten Funktion $h(v)$ zu bestimmen. Die Rekursionsformeln lauten hier:

$$\begin{aligned} r_1(v) &= X_0 - A_0 v, \\ r_2(v) &= X_1 - A_1 v, \\ s_2(v) &= -X_2 + A_2 v, \end{aligned}$$

$f(\nu) \;= r_1(\nu)\, a_{0,1,E_1(\nu)}$ mit $E_1(\nu) = H$ bei $r_1(\nu) \geq 0$, $E_1(\nu) = S$ bei $r_1(\nu) < 0$,

$g(\nu) \;= s_2(\nu)\, d_{1,2,E_2(\nu)}$ mit $E_2(\nu) = H$ bei $s_2(\nu) \geq 0$, $E_2(\nu) = S$ bei $s_2(\nu) < 0$,

$h(\nu) \;= f(\nu) + g(\nu) + r_2(\nu)$.

Für den Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (-1000;200;900)^{\mathrm{T}}$ kann die iterative numerische Bestimmung der Nullstelle der Hilfsfunktion $h(\nu)$ beispielsweise mit dem Programm Excel von Microsoft Office im Menüpunkt ‚Was-wäre-wenn-Analyse' des Menüs ‚Daten' erfolgen, indem dort bei der Zielwertsuche als Zielzelle die Zelle mit der Berechnung des Funktionswerts $h(\nu)$, als Zielwert die Zahl 0 und als veränderbare Zelle die Zelle mit dem Wert für ν gewählt wird. Man erhält damit das replizierbare Annuitätenniveau

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{X}) = -978{,}40$$

und den replizierbaren Annuitätenzahlungsstrom

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\alpha}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A} = -(978{,}40;1076{,}24;1183{,}86)^{\mathrm{T}}. \qquad \triangle$$

Ökonomische Interpretation der replizierbaren Annuitätenmethode

Die ökonomische Interpretation des replizierbaren Annuitätenniveaus $\tilde{\alpha}(\mathbf{X})$ besteht darin, dass nach der Hinzunahme des Supplements $\mathbf{S}'(\mathbf{X}) \in C_{M^n}(L)$ zum Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ der resultierende Annuitätenzahlungsstrom $\mathbf{G} = \tilde{\alpha}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}$ zu den Zeitpunkten $t = 0,\dots,n$ als Marge entnommen werden kann. Die **implizite Prämisse** für die ökonomische Interpretation des Annuitätenzahlungsstroms als realen Margenzahlungsstrom für einen *fest fixierten Zahlungsstrom* $\mathbf{X}$ besteht also in der Forderung der realen Verfügbarkeit des speziellen Kapitalmarktgeschäfts

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\,\mathbf{X} + \tilde{\alpha}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{A}.$$

Die implizite Prämisse der ökonomischen Interpretation der Annuitätenmethode *auf ganz* $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht dann analog zu Abschnitt 6.3.3 darin, dass die spezielle zulässige Supplementmenge $C_{M^n}(L)$, $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$, auf dem für den Entscheider zugänglichen Kapitalmarkt K zur Verfügung steht.

Weitere replizierbare Annuitätenmethoden

Anstelle des Supplementsystems $L = L(m, \mathbf{P}^j_{E_j}, \mathbf{M}^j_{E_j})$ der Zeitwertmethode zum Vergleichszeitpunkt m von Abschnitt 6.3.3 kann auch ein beliebiges Supplementsystem L^* verwendet werden, das zusammen mit der Beurteilungskurve $\tilde{\mathbf{V}}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{A}$ der Annuitätenentnahme die eindeutige Replizierung für alle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sichert. Beispielsweise kann hierzu ein Supplementsystem L^* von Abschnitt 8.4 genommen werden, für welches die eindeutige Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ sogar für beliebige Beurteilungskurven nachgewiesen ist. Für unterschiedliche zulässige Supplementmengen $C_{M^n}(L^*)$ erhält man nach Satz 5.1 aber auch verschiedene R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}L^*\tilde{V}}$ und verschiedene replizierbare Annuitätenniveau-Nutzenfunktionen $\tilde{\alpha}^*(\mathbf{X})$.

7 Methode des internen Zinssatzes

Zu den klassischen Bewertungsmethoden der dynamischen Investitionsrechnung gehört neben den in Kapitel 6 behandelten Methoden (Endwert-, Barwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode) auch die Methode des internen Zinssatzes (Interner Zinssatz-Methode, Interner Zinsfuß-Methode, englisch: method of internal rate of return; Abkürzung: MIZ). Eine umfangreiche Liste von weiteren deutsch- und englischsprachigen Bezeichnungen für den internen Zinssatz und die zugehörige Methode findet man bei Altrogge (1996), S. 314. Diese Methode berechnet zu einem Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

einen auf die Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ (im Allgemeinen Jahre; $k = 1,\ldots,n$) der Laufzeit n bezogenen konstanten Zinssatz

$$i_0 = i_{int}(\mathbf{X}),$$

einen sogenannten **internen Zinssatz** des Zahlungsstroms **X**, und verwendet diesen Zinssatz als Maßstab, um den Zahlungsstrom **X** für sich als vorteilhaft, indifferent (neutral) oder unvorteilhaft zu beurteilen oder um den Zahlungsstrom **X** mit einem anderen Zahlungsstrom **Y** zu vergleichen.

Bevor in den Abschnitten 7.2, 7.3 und 7.4 der eingeschränkte Anwendungsbereich der Methode des internen Zinssatzes noch auf weitere Zahlungsströme ausgedehnt wird und dann in Abschnitt 7.5 die allgemeinste und universell anwendbare Definition hergeleitet wird, soll diese Methode zunächst in Abschnitt 7.1 für die *Beurteilung* (Bewertung) spezieller Zahlungsströme durch Rückführung auf die Kapitalwertmethode plausibel gemacht werden. Zu dieser Plausibilitätsbetrachtung wird in der Literatur meist eine sogenannte Normalinvestition **X** verwendet.

Bei einer **Normalinvestition X** folgen auf die negative Auszahlung X_0 nur noch positive Einzahlungen $X_1, \ldots, X_n$:

$$X_0 < 0, X_1 > 0, \ldots, X_n > 0.$$

Eine **Normalfinanzierung X** liegt vor, wenn **- X** eine Normalinvestition ist.

Zahlenbeispiele zur Beurteilung einer Normalinvestition mittels der Methode des internen Zinssatzes findet man beispielsweise bei Caprano[1] und Gierl[2] (1992), S. 88 $n = 2$, S. 90–91 $n = 5$, $n = 4$; Köhler[3] (1992), S. 168 $n = 2$; Locarek[4] (1992), S. 85

[1] Eugen Caprano war Oberstudiendirektor und Lehrbeauftragter für Finanzmathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München.

[2] Anton Gierl war Oberstudiendirektor am Adolf-Weber-Gymnasium München und Lehrbeauftragter für Finanzmathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München.

[3] Harald Köhler (1936–2020) war Professor an der Fachhochschule Dortmund und verfasste ein Buch zur Finanzmathematik.

[4] Hermann Locarek-Junge (1957–) ist ein deutscher Ökonom und Wirtschaftsinformatiker und Professor an der Universität Essen und später an der TU Dresden.

$n = 3$; Hax[5] (1993), S. 36 $n = 4$; Pfeifer[6] (1995), S. 90f $n = 2$, $n = 8$, (2016), S. 96–97 $n = 7$; Altrogge[7] (1996), S. 321 $n = 9$; Kruschwitz[8] (1998), S. 88 $n = 1$, S. 90 $n = 2$; Tietze[9] (1999), S. 231 $n = 3$, Götze[10] (2008), S. 74, 98 $n = 5$.

Zur Plausibilität der Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung eines Zahlungsstroms wird diese im nachfolgenden Abschnitt 7.1 noch etwas allgemeiner für sogenannte reguläre Zahlungsströme hergeleitet. Darüber hinaus wird bei der Herleitung der Methode schon herausgearbeitet, welche charakteristischen Eigenschaften ein Zahlungsstrom aufweisen muss, damit die Methode des internen Zinssatzes anwendbar ist *und* sogar für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor im Beurteilungsergebnis mit der Kapitalwertmethode übereinstimmt.
Dies führt in Abschnitt 7.2 speziell bei der Verwendung von positiven internen Zinsfaktoren genau auf eine umfangreichere Klasse von Zahlungsströmen, die dort als NU-Zahlungsströme bezeichnet werden. Darin sind insbesondere auch die Normalzahlungsströme, die regulären Zahlungsströme und die VK-Zahlungsströme mit positivem Verrechnungskontozinsfaktor enthalten. Dabei sind die VK-Investitionen mit positivem internen Zinsfaktor die sogenannten „isoliert durchführbaren Investitionen“, die bisher in der Literatur (siehe Kilger[11] (1965), S. 776, Blohm[12] und Lüder[13] (1995), S. 90f., und Götze (2008), S. 97; die Plausibilisierung der Bezeichnung „isoliert durchführbar“ erfolgt in Abschnitt 7.1.3) als Anwendungsbereich der MIZ-Beurteilung (I-Beurteilung) angegeben wurden. Zu diesen Zahlungsströmen gelangt auch Altrogge (1996), S. 313–317, 325, der die ökonomische Interpretationsmöglichkeit des internen Zinsfaktors q_{int} einer Investition $\mathbf{X}$ als Zinsfaktor der fiktiven „Verzinsung nichtnegativer Kapitalbindungen“ $\tilde{C}_j = -E_j(\mathbf{X}, q_{int})$ fordert (siehe Abschnitte 7.1.3 und 7.7.2).

Hinsichtlich einer weiteren Verallgemeinerung der Methode werden in Abschnitt 7.4 beispielhaft auch noch andere Varianten angegeben, bei denen zur Beurteilung des

---

5 Herbert Hax (1933–2005) war ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und übte Lehrtätigkeiten an den Universitäten Saarbrücken, Wien und Köln aus.

6 Andreas Pfeifer ist Mathematiker und war Professor für Finanz- und Wirtschaftsmathematik an der Fachhochschule Darmstadt.

7 Günter Altrogge (1939–2014) war ein deutscher Ökonom und Professor für Betriebswirtschaftslehre an der Universität Hamburg.

8 Lutz Kruschwitz (1943–) ist ein deutscher emeritierter Professor für Bank- und Finanzwirtschaft mit vormaligen Lehrtätigkeiten an der Technischen Universität Berlin, der Universität Lüneburg und der Freien Universität Berlin.

9 Jürgen Tietze ist emeritierter Professor für Wirtschafts- und Finanzmathematik an der Fachhochschule Aachen.

10 Uwe Götze (1960–) ist ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor für Unternehmensrechnung an der TU Chemnitz.

11 Wolfgang Kilger (1927–1986) war ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor an der Universität des Saarlandes.

12 Hans Blohm (1920–2005) war ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor für Produktionswirtschaft an der TU Berlin und der TU Chemnitz.

13 Klaus Lüder (1935–) ist ein deutscher Ökonom und Professor für Betriebswirtschaftslehre an der Universität Hamburg und der Deutschen Hochschule Speyer.

Zahlungsstroms nur ein einziger interner Zinsfaktor verwendet wird bzw. alle internen Zinsfaktoren herangezogen werden. Auch bei diesen Varianten sind jedoch die Fragen zu klären, wie für einen Zahlungsstrom die Zugehörigkeit zum eingeschränkten Anwendungsbereich zu prüfen ist und wie ein passender interner Zinsfaktor zu wählen ist. Die Klärung dieser Fragen führt bei Vermeidung des unmittelbaren Rückgriffs auf die Kapitalwertmethode aber auf die in Abschnitt 7.5 behandelte universell anwendbare IB-Beurteilung des Zahlungsstroms. Diese ist eigentlich eine Charakterisierung der Barwert- bzw. Endwert-Beurteilung mittels einer gewissen Gesamtvielfachheit von internen Zinsfaktoren und damit die allgemeinste Variante der Methode, die auch noch universell auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ einsetzbar ist. Damit wird deutlich, dass alle anderen I-Beurteilungen mit einem einzelnen internen Zinsfaktor nur Spezialfälle dieser IB-Beurteilung sind und stets einen eingeschränkten Anwendungsbereich haben.

Für den *Vergleich* von alternativen Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ mittels interner Zinssätze werden Plausibiltätsbetrachtungen in den Abschnitten 7.9 – 7.11 durchgeführt. Hier werden bei der Methode (IV) interne Zinssätze von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ miteinander verglichen und bei der Methode (ID) interne Zinssätze des Differenzzahlungsstroms $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ mit dem Kalkulationszinsfaktor verglichen. In Abschnitt 7.13 wird begründet, dass dabei der allgemeinste Vergleich durch die Methode (ID) erfolgt, wenn hier für den Differenzzahlungsstrom die IB-Beurteilung eingesetzt wird.

Die ökonomische Interpretation der Methode für die Beurteilung und den Vergleich und auch die ökonomische Interpretation der internen Zinssätze selbst wird in den Abschnitten 7.6, 7.7, 7.14 und 7.15 behandelt. Damit ist insgesamt sowohl für die Beurteilung als auch für den Vergleich von Zahlungsströmen das Mysterium der Interner Zinssatz-Methode gelöst.

Der Leser, der nur an der Verallgemeinerung der Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung oder den Vergleich von Zahlungsströmen interessiert ist, kann die Abschnitte zur traditionellen Methode mit der Verwendung eines einzelnen internen Zinssatzes des Zahlungsstroms überspringen und sogleich die Abschnitte 7.5 und 7.13 lesen. Dort wird mit der Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren eine Methode zur Verwendung von internen Zinsfaktoren dargestellt, die universell anwendbar ist und gleichberechtigt neben den anderen klassischen Methoden der dynamischen Investitionsrechnung steht.

7.1 I-Beurteilung eines regulären Zahlungsstroms

In der Finanzierungs- und Investitionstheorie wird ein Zahlungsstrom als regulärer Zahlungsstrom bezeichnet, wenn er genau einen Vorzeichenwechsel aufweist (Gerke und Bank (1998), S. 8). Dabei tritt definitionsgemäß ein Vorzeichenwechsel (VZW) bei einem Glied a_m einer (endlichen) reellen Zahlenfolge

$$(a_j)_{j=0,\ldots,n} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{m-1}, a_m, \ldots, a_n)$$

auf, wenn ein Index $k \in \{0,1,\ldots,m\text{-}1\}$ existiert mit

$a_k a_m < 0$ und $a_j = 0$ für $k+1 \le j \le m-1$.

Demnach ist eine Investition $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 < 0$) genau dann **regulär**, wenn es einen (kleinsten) Index $m \in \{1,\ldots,n\}$ gibt mit

$$X_0 < 0, \quad X_j \le 0 \text{ für } j = 1,\ldots,m-1,$$
$$X_m > 0, \quad X_j \ge 0 \text{ für } j = m+1,\ldots,n.$$

Analog ist eine Finanzierung $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 > 0$) genau dann regulär, wenn es einen Index $m \in \{1,\ldots,n\}$ gibt mit

$$X_0 > 0, \quad X_j \ge 0 \text{ für } j = 1,\ldots,m-1,$$
$$X_m < 0, \quad X_j \le 0 \text{ für } j = m+1,\ldots,n.$$

Eine Finanzierung $\mathbf{X}$ ist genau dann regulär, wenn der Zahlungsstrom - $\mathbf{X}$ eine reguläre Investition ist. Sowohl für die reguläre Investition $\mathbf{X}$ als auch für die reguläre Finanzierung $\mathbf{X}$ gilt $X_0 \cdot X_j \ge 0$ für $1 \le j \le m-1$, $X_0 \cdot X_m < 0$ und $X_0 \cdot X_j \le 0$ für $m+1 \le j \le n$. Der Index m gibt den Zeitpunkt des einzigen Vorzeichenwechsels in der regulären Zahlungsfolge $\mathbf{X}$ an. Wählt man noch den Index p, $m \le p \le n$, als den größten Index mit $X_0 \cdot X_p < 0$, so ist $X_j = 0$ für $j = p+1,\ldots,n$.

7.1.1 Existenz eines positiven internen Zinsfaktors

Zu einer fest vorgegebenen regulären Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) wird jetzt die bereits in Abschnitt 6.3.7 betrachtete Kapitalwert-Funktion (Barwert-Funktion) betrachtet, die mit einem für alle Zinsperioden konstanten und nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor $q_k = q_K = q > 0$ ($k = 1,\ldots,n$) berechnet wird:

$$\begin{aligned} B_n(q) &= B_n(\mathbf{X},q) = \mathbf{P}(q)^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{-j} \\ &= X_0 + \frac{X_1}{q} + \ldots + \frac{X_{p-1}}{q^{p-1}} + \frac{X_p}{q^p} \\ &= \frac{1}{q^p}\left[X_0 q^p + X_1 q^{p-1} + \ldots + X_{p-1} q + X_p \right]. \end{aligned}$$

Für die Kapitalwert-Funktion $B_n(q)$ einer regulären Investition $\mathbf{X}$ erhält man wegen $X_0 < 0$ und $X_p > 0$ an den Grenzen des Intervalls $]0,\infty[$ die Grenzwerte

$$\lim_{q\to\infty} B_n(q) = X_0 < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{q\to 0\\ q>0}} B_n(q) = +\infty.$$

Die Funktionsgraphen (Graphen) der Kapitalwert-Funktion $B_n(q)$, einer (gebrochen)rationalen Funktion, und der zugehörigen Endwert-Funktion $E_n(q) = q^n B_n(q)$, einer ganzrationalen Funktion (Polynomfunktion) für ein Beispiel einer Normalinvestition mit der Laufzeit $n = 2$ sind in der Abbildung 7.1 dargestellt.

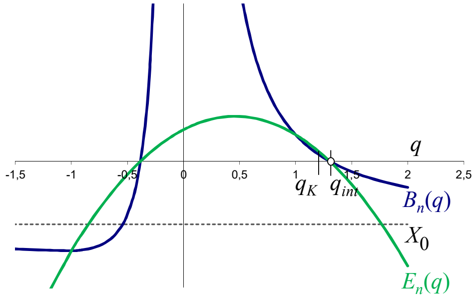


Abb. 7.1 Die Graphen der Kapitalwertfunktion $B_n(q)$ und Endwertfunktion $E_n(q)$ einer Normalinvestition **X** der Laufzeit $n = 2$

Nach dem Nullstellensatz oder Zwischenwertsatz von Bolzano (benannt nach dem böhmischen Mathematiker, Philosophen und Theologen Bernard Bolzano, 1781–1848) gibt es daher zu der auf $]0,\infty[$ stetigen Funktion $B_n(q)$ eine Lösung $q = q_1 \in\,]0,\infty[$ der Nullstellengleichung

$$B_n(q) = E_n(q)/q^n = 0.$$

Allgemein wird eine reellwertige Nullstelle $q = q_{int}$ der Endwert-Funktion

$$\begin{aligned} E_n(q) &= E_n(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j} \\ &= X_0 q^n + X_1 q^{n-1} + \ldots + X_{n-1} q + X_n \end{aligned}$$

bzw. eine von Null verschiedene reellwertige Nullstelle der Barwert-Funktion $B_n(q)$ des Zahlungsstroms als **interner Zinsfaktor** des Zahlungsstroms **X** bezeichnet. Der zugehörige Zinssatz $i_{int} = q_{int} - 1$ wird als ein **interner Zinssatz** des Zahlungsstroms **X** bezeichnet. Die Stelle q_{int} ist genau dann ein interner Zinsfaktor von **X**, wenn sie interner Zinsfaktor von $\lambda\mathbf{X}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) ist.

Die Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms **X** ist als Funktion von q eine Polynomfunktion (ganzrationale Funktion) n-ten Grades in der Standarddarstellung mit der Koeffizientenfolge $\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n)$. Die Bestimmung eines internen Zinsfaktors als Nullstelle der Endwertfunktion $E_n(q)$ führt daher ab einem Grad $n \geq 2$ auf eine nichtlineare Gleichung, nämlich eine Polynomgleichung (algebraische Gleichung), die ab $n \geq 5$ im Allgemeinen nicht mehr explizit, sondern nur mit numerischen Iterationsverfahren gelöst werden kann.

Das Problem der Nullstellenbestimmung für Polynome wird beispielsweise dargestellt in Bronstein et al. (1997), S. 36–41, 56–59, 824–826, im Teubner-Taschenbuch, Teil 1 (1996), S. 644–653, 1136f., 1141–1145, und in Stoer (1994), S. 285–346. Nur bei einem Polynomgrad von $n \leq 4$ gibt es für die Nullstellen explizite Lösungsformeln mit Hilfe von Wurzelausdrücken (Radikalen). Für den allgemeinen Fall ab $n \geq 5$ existieren nach dem Satz von Abel (nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel, 1802–1829) derartige Lösungsformeln nicht mehr und die Nullstellen sind mit Iterationsverfahren numerisch zu bestimmen. Speziell für Polynome vom Grad $n = 5$ lassen sich die Nullstellen nach dem französischen Mathematiker Charles Hermite (1822–1901) (1858) stets mit elliptischen oder hypergeometrischen Funktionen ausdrücken, die aber in der Regel zu kompliziert für den Praxiseinsatz sind. In der Praxis werden schon für einen Polynomgrad $n \geq 3$ die Nullstellen des Polynoms mit numerischen Iterationsmethoden bestimmt. So ist beispielsweise das Softwaresystem Mathematica von Wolfram Research in der Lage, mit der Funktion Solve oder NSolve alle Nullstellen eines Polynoms (ggf. als komplexe Zahlen) zu berechnen (Aufruf in der Form `NSolve[f[x]= =0,x]`). Die Beschreibung des Verfahrens findet man bei Wolfram (1997), S. 90–93, 104, 844–863, 947–952 oder Bronstein et al. (1997), S. 883.

In der oben angegebenen Literatur wird eine Vielzahl verschiedener Verfahren zur Nullstellenbestimmung für eine beliebige Funktion $f(x)$ und speziell für ein Polynom $f(x)$ angegeben. Für eine beliebige Funktion $f(x)$ hat man aus der Fülle von Verfahren beispielsweise das Newton-Verfahren (nach dem englischen Mathematiker, Physiker und Naturforscher Isaac Newton, 1624–1726), das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierungsmethode), das Verfahren der Regula falsi, die Sekantenmethode, das Verfahren von Muller (mittels eines interpolierenden Polynoms 2. Grades), das Verfahren der inversen Interpolation (für die Bestimmung einer einfachen Nullstelle). Für ein Polynom $f(x)$ gibt es darüber hinaus beispielsweise das Newton-Verfahren mit Hilfe des Horner-Schemas, das Doppelschritt-Verfahren, das Newton-Verfahren in der Maehly-Form, das Graeffe-Verfahren (das Gräffe-Verfahren oder Dandelin-Gräffe-Verfahren wurde unabhängig voneinander 1837 von dem deutschen Mathematiker Karl Heinrich Gräffe[14] (1799–1873), 1826 von dem französisch-belgischen Mathematiker, Soldaten unter Napoleon und Professor der Ingenieurwissenschaften Germinal Pierre Dandelin (1794–1847) und 1834 von dem russischen Mathematiker und Professor an der Kasaner Universität Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792–1856) entwickelt), die Eigenwertmethode mit dem QR-Algorithmus, die Methode von Bernoulli (nach dem Schweizer Mathematiker und Physiker Daniel Bernoulli, 1700–1782) und die Methode von Bairstow (nach dem englischen Mathematiker Leonard Bairstow, 1880–1963). In Mathematica (Version 3.0) verwendet die Funktion FindRoot für die Suche nach einer Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ bei einem vorgegebenen Startwert x_0 im Aufruf `FindRoot[f[x]= =0,{x,x0}]` das Newton-Verfahren und bei zwei angegebenen Startwerten x_0, x_1 im Aufruf `FindRoot[f[x]= =0,{x,{x0,x1}}]` das Sekanten-Verfahren.

Eine ausführliche Betrachtung zur Empfindlichkeit der Polynomnullstellen in Abhängigkeit von den Polynomkoeffizienten X_j bei der Standarddarstellung eines Polynoms $E_n(\mathbf{X},r) = X_0 r^n + \ldots + X_n$ findet man bei Stoer (1994), S. 333–335. Demnach ist hierbei die Nullstellenbestimmung schlecht konditioniert. Dabei können schon einfache Nullstellen schlecht konditioniert sein, während mehrfache Nullstellen stets schlecht konditioniert sind. Dies heißt, dass ein kleiner relativer Fehler in den als Ausgangsdaten vorgegebenen Koeffizienten X_j große relative Fehler in den Rechenresultaten für die Polynomnullstellen bewirkt.

7.1.2 Einzigkeit des positiven internen Zinsfaktors

Die Existenz von genau einer positiven Nullstelle der hier vorliegenden Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ bzw. von genau einem positiven internen Zinsfaktor eines regulären Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ lässt sich mit der Descartesschen Vorzeichenregel[15] (benannt nach dem französischen Philosophen, Mathematiker und Naturwissenschaftler René Descartes oder Renatus Cartesius, 1596–1650) begründen. Diese besagt, dass die Anzahl der (in ihrer Vielfachheit gezählten) positiven Nullstellen eines reellen Polynoms $E_n(q)$ gleich der Anzahl w der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge $(X_j)_{j=0,\ldots,n}$ oder um eine gerade Zahl kleiner ist. Sind alle Nullstellen des

---

14 Karl Heinrich Gräffe (1799–1873) war ein deutscher Mathematiker, der am Technischen Institut, an der Oberen Industrieschule und an der Universität in Zürich unterrichtete.

15 Weitere Ausführungen zur Descartesschen Vorzeichenregel findet man beispielsweise in Bronstein et al. (1997), S. 41, 825, im Teubner-Taschenbuch, Teil 1 (1996), S. 650, und im Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S. 387f. Eine Beweisskizze zur Vorzeichenregel von Descartes findet man bei Strick (2020), S. 185–189, einen Beweis durch vollständige Induktion nach dem Grad n des Polynoms bei Seiler (2018), S. 4–5.

Polynoms reell, dann ist die Anzahl der positiven Nullstellen gleich w. Da nach Voraussetzung hier der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ genau einen Vorzeichenwechsel besitzt, ist die Anzahl der positiven Nullstellen von $E_n(q)$ gleich 1.
Nachfolgend wird die Einzigkeit der positiven Nullstelle q_1 von $E_n(q)$ auch noch auf eine andere Weise bewiesen, indem gezeigt wird, dass sämtliche Horner-Schema-Werte $E_j(q_1)$ $(j = 0,\ldots,n)$ keinen Vorzeichenwechsel aufweisen und dann das zur Stelle q_1 gehörige Quotientenpolynom $P_{n-1}(q)$ von $E_n(q)$ keine positive Nullstelle besitzt. Daraus wird dann geschlossen, dass die Nullstelle q_1 der Endwertfunktion $E_n(q)$ die einzige positive Nullstelle, eine einfache Nullstelle und eine Vorzeichenwechselstelle ist.

7.1.3 Der positive interne Zinsfaktor als Verrechnungskontozinsfaktor des Zahlungsstroms

In der hier vorliegenden Betrachtung wird eine Nullstelle $q = q_1 = q_{int} \in \mathbb{R}$ der Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$, also ein interner Zinsfaktor q_1 des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$, für welche der aus den Horner-Schema-Werten $E_j(q_1)$ $(j = 0,\ldots,n)$ der Horner-Schema-Polynome $E_j(q)$ gebildete Horner-Schema-Vektor

$$\mathbf{E}(q_1) = (E_0(q_1),E_1(q_1),\ldots,E_n(q_1))^{\mathrm{T}}$$

keinen Vorzeichenwechsel aufweist, als **Verrechnungskontozinsfaktor** (VK-Zinsfaktor) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ bezeichnet. Der zugehörige Zinssatz $i_1 = q_1 - 1$ heißt dann Verrechnungskontozinssatz (VK-Zinssatz).

Ein Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit einem VK-Zinsfaktor q_1 wird als **VK-Zahlungsstrom** bezeichnet. Für eine VK-Investition $\mathbf{X}$ $(E_0(\mathbf{X},q) \equiv X_0 < 0,\ E_n(\mathbf{X},q_1) = 0)$ gilt dann

$$\mathbf{E}(q_1) \leq \mathbf{O},$$

für eine VK-Finanzierung $\mathbf{X}$ $(E_0(\mathbf{X},q) \equiv X_0 > 0,\ E_n(\mathbf{X},q_1) = 0)$ gilt

$$\mathbf{E}(q_1) \geq \mathbf{O}.$$

Die j-ten Horner-Schema-Polynome $E_j(q)$ (benannt nach dem englischen Mathematiker William George Horner, 1786–1837) des Polynoms $E_n(q)$ berechnen sich mit der Rekursionsformel

$$E_0(q) = X_0,$$
$$E_j(q) = E_{j-1}(q)\cdot q + X_j \qquad \text{für } j = 1,\ldots,n$$

bzw. mit der expliziten Endwertformel

$$E_j(q) = \sum_{k=0}^{j} X_k q^{j-k} \qquad \text{für } j = 0,\ldots,n.$$

Wenn nun der Horner-Schema-Vektor $\mathbf{E}(q_1)$ keinen Vorzeichenwechsel aufweist, lassen sich die Horner-Schema-Werte $E_j(q_1) = E_j(\mathbf{X},q_1)$ finanzmathematisch als die Kontostände C_j eines neu angelegten fiktiven Verrechnungskontos (Abk.: VK) mit dem festen Kontozinsfaktor q_1 interpretieren, auf welches der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ gebucht wird. Wird eine Investition $\mathbf{X}$ auf das Konto *eingezahlt*, so ist q_1 der Sollzinsfaktor eines Kreditkontos, wird eine Finanzierung $\mathbf{X}$ auf das Konto eingezahlt, so ist

q_1 der Habenzinsfaktor eines Anlagekontos. Die Kontostände zu den Zeitpunkten $t = j$ sind gegeben durch

$$C_j = E_j(\mathbf{X},q_1),$$

nichtpositiv bei einer Investition und nichtnegativ bei einer Finanzierung **X**.
Wird dagegen eine Investition **X** vom Konto *abgebucht*, so ist q_1 der Habenzinsfaktor eines Anlagekontos, wird eine Finanzierung **X** zu Lasten des Kontos gebucht, so ist q_1 der Sollzinsfaktor eines Kreditkontos. Die Kontostände sind dann

$$\tilde{C}_j = - E_j(\mathbf{X},q_1)$$

und nichtnegativ bei einer Investition bzw. nichtpositiv bei einer Finanzierung **X**.
Der Zahlungsstrom **X** lässt sich also auf einem Verrechnungskonto mit nur einem Kontozinsfaktor q_1, also ohne abwechselnde Verwendung eines Habenzinsfaktors q_H und eines Sollzinsfaktors q_S, verrechnen, sodass q_1 hierbei als Verrechnungskontozinsfaktor bezeichnet wird.
Altrogge (1996), S. 313, 317, 325, der die Investition **X** *zu Lasten* eines neu angelegten sogenannten fiktiven Ersatzkontos bucht, also die Zahlungen X_j vom Konto abbucht, bezeichnet die Bedingung

$$\tilde{C}_j = - E_j(\mathbf{X},q_{int}) \geq 0 \qquad (j = 0,\ldots,n)$$

als die „nichtnegative Kapitalbindung" (Kapitalfestlegung) der Investition **X** auf dem Ersatzkonto, bei der auch die sinnvolle Interpretierbarkeit des internen Zinsfaktors q_{int} als Zinsfaktor der Verzinsung nichtnegativer Kapitalbindungen möglich ist.
Kilger (1965), S. 776, und mit Bezug auf diesen auch Blohm und Lüder (1995), S. 90f., und Götze (2008), S. 97, bezeichnen eine Investition **X** ($X_0 < 0$ und daher $C_0 = E_0(\mathbf{X},q_{int}) = X_0 < 0$) mit der Eigenschaft eines zu allen Zahlungszeitpunkten nichtpositiven „Vermögenswerts",

$$(*) \qquad C_j = E_j(\mathbf{X},q_{int}) \leq 0 \qquad (j = 0,\ldots,n),$$

als eine sogenannte „**isoliert durchführbare Investition**" („reine Investition", englisch: pure investment), da auch sämtliche Einzahlungen der Investition, also die X_j mit $X_j > 0$, nur für die Zinszahlung zum Sollzinssatz $i_{int} = q_{int} - 1$ und für die Kapitalrückzahlung an den Investor verwendet werden und keine ergänzende Kapitalanlage zu einem Habenzinssatz benötigt wird: Bei der Interpretation des „in der Investition gebundenen Kapitals", des „Vermögenswerts der Investition", als Kontostand $C_j \leq 0$ eines fiktiven Kreditkontos, auf welches der Zahlungsstrom **X** gebucht (*eingezahlt*) wird, wird nämlich jede auf dieses Konto gebuchte Zahlung X_j ($j \geq 1$) additiv zerlegt,

$$X_j = Z_j + T_j,$$

in die Zinszahlung

$$Z_j = R_{j-1} i_{int} = - C_{j-1} i_{int}$$

für die Restschuld $R_{j-1} = - C_{j-1}$ (≥ 0) und in die Kontostandsänderung (Tilgungsrate)

$$\begin{aligned} T_j &= \Delta C_j = C_j - C_{j-1} \\ &= C_{j-1} \cdot q_{int} + X_j - C_{j-1} \\ &= C_{j-1} i_{int} + X_j \\ &= - Z_j + X_j. \end{aligned}$$

Die Besonderheit bei einem derartigen Zahlungsstrom **X** mit $\mathbf{E}(q_{int}) \leq \mathbf{O}$ ist dabei, dass die Zahlung X_j ($\leq - C_{j-1} q_{int}$) bzw. die zugehörige Kontostandsänderung T_j

($\leq - C_{j\text{-}1}$) jeweils derart nach oben beschränkt ist, dass auch noch der resultierende Kontostand

$$\begin{aligned} C_j &= C_{j\text{-}1} \cdot q_{int} + X_j \\ &= C_{j\text{-}1} + T_j \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ist und somit keine Kapital*anlage* (bei $C_j > 0$) fällig wird.
Genauer bedeutet die Ungleichung (*) $C_j = C_{j\text{-}1} \cdot q_{int} + X_j \leq 0$ im Fall α) $q_{int} < 0$ für alle Zahlungsstromkomponenten X_j eine Beschränkung nach oben:

$$X_j \leq - C_{j\text{-}1} \cdot q_{int} \leq 0.$$

Insbesondere können im Fall α) keine echten Einzahlungen X_j ($X_j > 0$) auftreten.
Im Fall β) $q_{int} \geq 0$ liefert (*) speziell für die Einzahlungen X_j (≥ 0) jeweils eine Beschränkung nach oben:

$$X_j \leq - C_{j\text{-}1} \cdot q_{int} \; (\geq 0),$$

für die echten Auszahlungen X_j (< 0) dagegen keine Einschränkung, da hier die Ungleichung

$$X_j < 0 \leq - C_{j\text{-}1} \cdot q_{int}$$

und damit (*) $C_j = C_{j\text{-}1} \cdot q_{int} + X_j \leq 0$ sowieso erfüllt ist.

Herzberger[16] (1999), S. 144–146, bezeichnet die Eigenschaft der Nichtnegativität der negativen Horner-Schema-Werte $- E_j(q_1)$ ($j = 0,\ldots,n$) des Zinsfaktors $q_1 = q_{int}$, also

$$\tilde{C}_j = - E_j(\mathbf{X},q_1) \geq 0 \qquad (j = 0,\ldots,n),$$

als „Sparkontenprinzip" bei der „jährlichen Bilanz der Investition". Letztere entspricht einer Kontostandsentwicklung bei der fiktiven Zahlungsstromverrechnung, wenn man die Investition **X** zu Lasten eines Verrechnungskontos bucht. Für einen derartigen positiven Zinsfaktor q_1 begründet er mit dem fehlenden Vorzeichenwechsel der Koeffizienten $a_j = E_j(q_1)$ des Quotientenpolynoms $P_{n\text{-}1}(q)$ von $E_n(q)$ und der Descartesschen Vorzeichenregel die Nullstellenfreiheit von $P_{n\text{-}1}(q)$ in $]0,\infty[$ und dann mit der Nullstellenfreiheit von $P_{n\text{-}1}(q)$ die Einzigkeit der positiven Nullstelle q_1 der Endwertfunktion $E_n(q)$.

Im jetzt nachfolgenden Beweis wird zunächst für eine reguläre Investition **X** der positive interne Zinsfaktor q_1 als Verrechnungskontozinsfaktor nachgewiesen und dann direkt aus der Nichtpositivität der Koeffizienten $a_j = E_j(q_1)$ des Quotientenpolynoms $P_{n\text{-}1}(q)$ von $E_n(q)$ die Negativität und somit Nullstellenfreiheit von $P_{n\text{-}1}(q)$ in $]0,\infty[$ geschlossen. Daraus folgt weiter, dass q_1 die einzige positive Nullstelle, eine einfache Nullstelle und eine Vorzeichenwechselstelle ist.

Beweis für die Existenz eines positiven Verrechnungskontozinsfaktors und einer einzigen positiven Vorzeichenwechselstelle der Endwertfunktion einer regulären Investition **X**: Als Erstes wird gezeigt, dass die oben bereits nachgewiesene positive Nullstelle q_1 von $B_n(q)$ bzw. $E_n(q)$ auch ein sogenannter Verrechnungskontozinsfaktor des Zahlungsstroms **X** ist. Bei der Buchung des Zahlungsstroms **X** *zu*

[16] Jürgen Herzberger (1940–2009) war ein deutscher Mathematiker und Professor der Angewandten Mathematik an der Universität Oldenburg.

Gunsten des Verrechnungskontos errechnen sich die Kontostände C_j als die Werte der j-ten Horner-Schema-Polynome $E_j(q) = E_j(\mathbf{X},q)$ an der Stelle $q = q_1$:

$$C_j = E_j(q_1) = E_j(\mathbf{X},q_1) \qquad \text{für } j = 0,\ldots,n.$$

Mit der expliziten Endwertformel

$$E_j(q) = \sum_{k=0}^{j} X_k q^{j-k} \qquad \text{für } j = 0,\ldots,n.$$

der Horner-Schema-Polynome ergibt sich aus der Positivität der Nullstelle q_1 und den für die reguläre Investition $\mathbf{X}$ vorliegenden Vorzeichenbedingungen

$$X_k \leq 0 \;\text{ für } 1 \leq k \leq j \leq m\text{-}1$$

der Zahlungsstromkomponenten X_k zunächst die Negativität der Kontostände C_j für die Zeitpunkte $j = 0,\ldots,m$-1:

$$\begin{aligned} C_0 &= E_0(q_1) = X_0 < 0, \\ C_j &= E_j(q_1) = \sum_{k=0}^{j} X_k q_1^{\,j-k} \\ &\leq X_0 < 0 \qquad \text{für } j = 1,\ldots,m\text{-}1. \end{aligned}$$

Für die Zeitpunkte $j = m,\ldots,n$-1 verwendet man statt der Kontostandsformel in der Endwertform die Kontostandsformel in der Barwertform. Aus der Nullstellengleichung $E_n(q_1) = 0$ und den Vorzeichenbedingungen

$$X_k \geq 0 \;\text{ für } m < j\text{+}1 \leq k \leq n$$

der X_k erhält man für die Kontostände C_j der Zeitpunkte $j = m,\ldots,n$-1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} C_j &= E_j(q_1) - E_n(q_1)\cdot q_1^{\,j-n} \\ &= \sum_{k=0}^{j} X_k q_1^{\,j-k} - \sum_{k=0}^{n} X_k q_1^{\,j-k} \\ &= - \sum_{k=j+1}^{n} X_k q_1^{\,j-k} \leq 0 \qquad \text{für } j = m,\ldots,n\text{-}1. \end{aligned}$$

Für den Zeitpunkt $j = n$ ist

$$C_n = E_n(q_1) = 0.$$

Die Kontostände $C_j = E_j(\mathbf{X},q_1)$ ($j = 0,\ldots,n$-1) des Verrechnungskontos sind also alle nichtpositiv und besitzen keinen Vorzeichenwechsel.

Als Zweites wird nun gezeigt, dass der positive Verrechnungskontozinsfaktor q_1 die einzige positive Nullstelle des Polynoms $E_n(q)$, eine einfache Nullstelle und somit auch eine Vorzeichenwechselstelle ist. Für das Polynom $E_n(q)$ gibt es zur Stelle q_1 die Darstellung

$$E_n(q) = E_n(q) - E_n(q_1) = (q - q_1)P_{n-1}(q)$$

mit dem Quotientenpolynom

$$\begin{aligned} P_{n-1}(q) &= \frac{E_n(q) - E_n(q_1)}{q - q_1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j q^{n-1-j} = a_0 q^{n-1} + a_1 q^{n-2} + \ldots + a_{n-2} q + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Für dessen Koeffizienten a_j erhält man durch Koeffzientenvergleich[17] der Polynome $E_n(q)$ und $(q - q_1)P_{n-1}(q)$ die Rekursionsformel

$$a_0 = X_0,\;\; a_j = a_{j-1} q_1 + X_j \qquad \text{für } j = 1,\ldots n\text{-}1$$

und somit die Übereinstimmung mit den Horner-Schema-Werten $E_j(q)$ an der Stelle $q = q_1$:

$$a_j = E_j(q_1) = C_j \leq 0 \qquad \text{für } j = 0,\ldots,n\text{-}1.$$

Aus der Nichtpositivität der Koeffizienten a_j und der Negativität von $a_0 = X_0$ folgt für das Quotientenpolynom

$$P_{n-1}(q) \leq a_0 q^{n-1} < 0 \;\text{ für alle } q > 0$$

---

[17] Den Koeffizientenvergleich bzw. Identitätssatz für Polynome findet man beispielsweise bei Hildebrandt (2006), S. 164, Kor. 2, und Köhler (2006), S. 217f, Kor. 15.9 u. Satz 15.10.

und daraus für die Endwertfunktion $E_n(q) = (q - q_1)P_{n-1}(q)$ die Vorzeichenverteilung

$$E_n(q) < 0 \text{ für } q > q_1 \text{ und}$$
$$E_n(q) > 0 \text{ für } 0 < q < q_1.$$

Demnach ist q_1 die einzige positive Nullstelle des Polynoms $E_n(q)$, eine einfache Nullstelle und somit eine Vorzeichenwechselstelle von $E_n(q)$. Auch für die rationale Funktion $B_n(q) = E_n(q)/q^n$ ist q_1 die einzige positive Nullstelle, eine einfache Nullstelle und eine Vorzeichenwechselstelle. Damit ergibt sich die nachfolgend angegebene Vorzeichenverteilung (NUI) für die Barwert-Funktion der Investition **X**. □

7.1.4 Der positive interne Zinsfaktor als einzige positive Nullstelle und Vorzeichenwechselstelle der Kapitalwert-Funktion

Da bei einer regulären Investition **X** der positive interne Zinsfaktor q_1 als ein Verrechnungskontozinsfaktor die einzige positive Nullstelle, eine einfache Nullstelle und damit die einzige Vorzeichenwechselstelle der Barwert-Funktion (Kapitalwert-Funktion) auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ ist, erhält man für die Barwert-Funktion $B_n(q) = B_n(\mathbf{X},q)$ der regulären Investition **X** notwendig die folgende wichtige Eigenschaft hinsichtlich ihrer Vorzeichenverteilung. Bei der Bezeichnung (NUI) für diese Eigenschaft der Barwert-Funktion steht N für die Existenz einer einzigen Nullstelle auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$, U für die ungerade Ordnung dieser Nullstelle und I für die Investition **X** ($X_0 < 0$).

(NUI) Die Barwert-Funktion $B_n(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms **X** ($X_0 \neq 0$) besitzt eine positive Nullstelle $q = q_1$ und die Vorzeichenverteilung

$$B_n(\mathbf{X},q) > 0 \ \text{ für } q \in \ ]0,q_1[\ \text{ und}$$
$$B_n(\mathbf{X},q) < 0 \ \text{ für } q \in \ ]q_1,\infty[.$$

Anzumerken ist hierzu noch, dass auch jede andere zu beliebigem Vergleichszeitpunkt $m \in \{0,\ldots,n\}$ gehörige Zeitwert-Funktion $Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = q^m B_n(\mathbf{X},q)$ als Funktion des Zinsfaktors q auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ die gleiche Vorzeichenverteilung wie die Barwert-Funktion $B_n(\mathbf{X},q)$ hat. Die in Abschnitt 6.3.7 mit einem konstanten Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ und verschiedenen Vergleichszeitpunkten m gebildeten Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_Z \ = \ \succcurlyeq_{Z,m}$ stimmen alle überein. Ebenso stimmen die zugehörigen strengen Halbordnungen $\succ_Z$ überein: $\succ_Z = \succ_B$. Demnach ist die Z-Vorteilhaftigkeit ($\mathbf{X} \succ_Z \mathbf{O}$) zu beliebigem Vergleichszeitpunkt m gleichbedeutend zur B-Vorteilhaftigkeit ($\mathbf{X} \succ_B \mathbf{O}$).

Unter Verwendung dieser Eigenschaft (NUI) der Kapitalwert-Funktion $B_n(\mathbf{X},q) = \mathbf{P}(q)^\mathrm{T}\mathbf{X}$ bzw. der Zeitwert-Funktion $Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = q^m B_n(\mathbf{X},q)$ der Investition **X** und Verwendung der speziellen Kapitalwertmethode bzw. Zeitwertmethode von Abschnitt 6.3.7 erhält man für die Vorteilhaftigkeit des Zahlungsstroms **X** das folgende Entscheidungskriterium mittels des positiven Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ und des eindeutig bestimmten positiven internen Zinsfaktors $q_1 = q_{int}$ bzw. mittels des Kalkulationszinssatzes $i = i_K = q_K - 1$ ($> - 1$) und des internen Zinssatzes $i_{int} = q_{int} - 1$ ($> - 1$):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X} \succ_{\mathrm{Z}} \mathbf{O} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist Z-vorteilhaft}) \Leftrightarrow \mathbf{X} \succ_{\mathrm{B}} \mathbf{O} \ \ (\mathbf{X} \text{ ist B-vorteilhaft}) \\
& \Leftrightarrow B_n(\mathbf{X},q_K) > 0 = B_n(\mathbf{X},q_{int}) \\
& \Leftrightarrow q_K < q_{int} \\
& \Leftrightarrow i_K < i_{int}. \\
& \Leftrightarrow: \ \mathbf{X} \text{ ist I-vorteilhaft} \\
& \qquad (\text{symbolische Abk.: } \mathbf{X} \succ_{\mathrm{I}} \mathbf{O} \text{ bzw. } \mathbf{X} \succ_{\mathrm{I},q} \mathbf{O}).
\end{aligned}
$$

Dabei ist der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ ein vom Entscheider festgelegter Zinsfaktor, der beispielsweise der Haben-Zinsfaktor einer Geldanlage des zur Verfügung stehenden Eigenkapitals oder der Soll-Zinsfaktor eines Kredits zur Finanzierung der betrachteten Investition sein kann. Er muss aber nicht unbedingt ein interner Zinsfaktor einer tatsächlich zur Verfügung stehenden Zahlungsstrom-Alternative (Opportunität) sein. Für den Zinsfaktor-Vergleich wird neben dem Kalkulationszinsfaktor q_K der eindeutig bestimmte positive interne Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ verwendet, was implizit die Festlegung einer Interner Zinsfaktor-Funktion für die hier betrachteten regulären Investitionen bedeutet.

Anmerkung zur symbolischen Schreibweise

Bei der hier verwendeten symbolischen Abkürzung $\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I}} \mathbf{O}$, $\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I},q} \mathbf{O}$ oder $\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,Inv},q} \mathbf{O}$ für die I-Vorteilhaftigkeit der Investition $\mathbf{X}$ in der zunächst rein formal verwendeten Relationen-Schreibweise analog zur tatsächlich durch $B_n(\mathbf{X},q) > 0$ definierten Relation $\mathbf{X} \succ_{\mathrm{B}} \mathbf{O}$ ist zu beachten, dass mittels des internen Zinssatzes zunächst kein unmittelbarer Vergleich mit dem Null-Zahlungsstrom $\mathbf{O}$ stattfindet, da für $\mathbf{O}$ kein eindeutiger positiver interner Zinssatz definiert ist. Für den Null-Zahlungsstrom $\mathbf{O}$ ist nämlich die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{O},q)$ identisch Null und somit jeder reellwertige Zinsfaktor ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{O}$. Mit dieser symbolischen Schreibweise wird zunächst nur ausgedrückt, dass man sich hier auf die Nulllinie der Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{B},q} = \succcurlyeq_{\mathrm{Z},q} = \succcurlyeq_{\mathrm{E},q}$ $(q = q_K)$, also auf die zum Nullpunkt $\mathbf{O}$ gehörige Indifferenzklasse

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{B},q}(\mathbf{O}) = H_{\mathbf{P}(q),0} = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : E_n(\mathbf{Z},q) = q^n \mathbf{P}(q)^{\mathsf{T}} \mathbf{Z} = 0\},$$

bezieht, für deren Zahlungsströme $\mathbf{Z}$ insbesondere auch der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ ein interner Zinsfaktor ist und die Zinsfaktorungleichung

$$q_{int}(\mathbf{Z}) = q < q_{int}(\mathbf{X})$$

gilt. Erst nach Festlegung der Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ für die NU-Investitionen (Zahlungsströme mit der Eigenschaft (NUI)) $\mathbf{X}$ auf den Wert des eindeutigen positiven internen Zinsfaktors $q_1(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$ und für die Zahlungsströme $\mathbf{Z}$ in $H_{\mathbf{P}(q),0} \setminus H_{\mathbf{e}_1,0}$ auf den konstanten Wert $q = q_K > 0$,

$$q_{int}(\mathbf{Z}) := q = q_K \text{ für } \mathbf{Z} \in H_{\mathbf{P}(q),0},\ Z_0 \neq 0,$$

kann die I-Beurteilung (MIZ-Beurteilung) der NU-Investition $\mathbf{X}$ als spezieller I-Vergleich (MIZ-Vergleich) mit den Investitionen $\mathbf{Z}$ $(Z_0 < 0)$ dieser Hyperebene $H_{\mathbf{P}(q),0}$ angesehen werden. Definiert man darüber hinaus noch für den Nullpunkt $\mathbf{O}$ den Funktionswert der Interner Zinsfaktor-Funktion mit

$$q_{int}(\mathbf{O}) := q = q_K,$$

so kann die I-Beurteilung der NU-Investition $\mathbf{X}$ auch als I-Vergleich mit dem Nullpunkt $\mathbf{O}$ interpretiert werden.

Beispiele für Zahlungsströme $\mathbf{Z}$ in dieser Nulllinie $H_{\mathbf{P}(q),0}$ sind bereits in Abschnitt 6.3.7 angegeben. In diesem Abschnitt wird auch die implizite Prämisse für eine ökonomische Interpretation der speziellen Zeitwertmethode mit konstantem Kalkulationszinsfaktor q beschrieben. Die daraus resultierende ökonomische Interpretation der Methode des internen Zinssatzes wird noch im späteren Abschnitt 7.6 behandelt.

Die obige Betrachtung liefert nun für den Entscheider in Übereinstimmung (Konsistenz) mit der Kapitalwertmethode eine weitere Beurteilungsmethode unter Verwendung des vorgegebenen Kalkulationszinssatzes i_K (> - 1) und des internen Zinssatzes $i_{int} = i_{int}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$:

Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung einer regulären Investition
Die reguläre Investition $\mathbf{X}$ ist nach der Methode des internen Zinssatzes vorteilhaft (bzw. indifferent bzw. unvorteilhaft), wenn ihr eindeutig bestimmter interner Zinssatz $i_{int} \in\ ]-1,\infty[$ größer als der vorgegebene Kalkulationszinssatz i_K (bzw. gleich i_K bzw. kleiner als i_K) ist.

Die Investition $\mathbf{X}$ ist I-vorteilhaft ($\mathbf{X} \succ_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} > i_K$;
die Investition $\mathbf{X}$ ist I-indifferent ($\mathbf{X} \sim_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} = i_K$;
die Investition $\mathbf{X}$ ist I-unvorteilhaft ($\mathbf{X} \prec_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} < i_K$.

Das analoge Entscheidungskriterium erhält man für eine reguläre Finanzierung $\mathbf{X}$, da für deren Barwert-Funktion $B_n(\mathbf{X},q)$ die folgende notwendige Eigenschaft (NUF) hinsichtlich ihrer Vorzeichenverteilung vorliegt:

(NUF) Die Barwert-Funktion $B_n(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ ($X_0 \neq 0$) besitzt eine positive Nullstelle $q = q_1$ und die Vorzeichenverteilung

$B_n(\mathbf{X},q) < 0$ für $q \in\ ]0,q_1[$ und
$B_n(\mathbf{X},q) > 0$ für $q \in\ ]q_1,\infty[$.

Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung einer regulären Finanzierung
Die reguläre Finanzierung $\mathbf{X}$ ist nach der Methode des internen Zinssatzes vorteilhaft (bzw. indifferent bzw. unvorteilhaft), wenn ihr eindeutig bestimmter interner Zinssatz $i_{int} \in\ ]-1,\infty[$ kleiner als der vorgegebene Kalkulationszinssatz i_K (bzw. gleich i_K bzw. größer als i_K) ist.

Die Finanzierung $\mathbf{X}$ ist I-vorteilhaft ($\mathbf{X} \succ_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} < i_K$;
die Finanzierung $\mathbf{X}$ ist I-indifferent ($\mathbf{X} \sim_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} = i_K$;
die Finanzierung $\mathbf{X}$ ist I-unvorteilhaft ($\mathbf{X} \prec_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} > i_K$.

Demnach ist für einen regulären Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ die I-Vorteilhaftigkeit ($\mathbf{X} \succ_I \mathbf{O}$), d. h. die Vorteilhaftigkeit gemäß der Methode des internen Zinssatzes, gleichbedeutend zur B-Vorteilhaftigkeit ($\mathbf{X} \succ_B \mathbf{O}$) bzw. zur Z-Vorteilhaftigkeit ($\mathbf{X} \succ_Z \mathbf{O}$) nach der speziellen Kapitalwertmethode bzw. Zeitwertmethode von Abschnitt 6.3.7 mit dem konstanten Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$. Das Analoge gilt für die Unvorteilhaftigkeit und die Indifferenz gemäß der beiden Methoden. Falls für einen regulären Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ der interne Zinssatz i_{int} bekannt ist, so kann also auch ohne Berechnung seines Kapitalwerts $B_n(\mathbf{X},q_K)$ bzw. seines Zeitwerts $Z_{m,n}(\mathbf{X},q_K)$ zum vorgegebenen Kalkulationszinsfaktor $q_K = 1 + i_K$ der Zahlungsstrom auf seine Vorteilhaftigkeit geprüft werden, indem einfach der interne Zinssatz i_{int} mit dem Kalkulationszinssatz i_K verglichen wird. Anzumerken ist noch, dass diese Beurteilung eines regulären Zahlungsstroms mit jedem positiven Kalkulationszinsfaktor durchgeführt werden kann, das Ergebnis der Beurteilung (vorteilhaft, indifferent, unvorteilhaft) aber vom verwendeten Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ abhängt. Da die Vorzeichenverteilung der Barwert-Funktion einer Finanzierung entgegengesetzt zur Vorzeichenverteilung der Barwert-Funktion einer Investition ist, sind auch deren Zinsfaktorungleichungen für die I-Beurteilung (MIZ-Beurteilung) zueinander entgegengesetzt.

7.2 I-Beurteilung eines NU-Zahlungsstroms

Die Eigenschaften (NUI) und (NUF) lassen sich zusammenfassen zur Eigenschaft (NU) der Vorzeichenverteilung der Barwert-Funktion $B_n(\mathbf{X},q)$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $X_0 \neq 0$, da für hinreichend große $q > 0$ die Barwert-Funktion einer Investition $\mathbf{X}$ positiv und die Barwert-Funktion einer Finanzierung $\mathbf{X}$ negativ ist:

(NU) Die Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X},q)$ bzw. die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q) = q^n B_n(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) besitzt eine positive Nullstelle $q = q_1$ als einzige Nullstelle und als Vorzeichenwechselstelle auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$. Bei Vorliegen dieser Eigenschaft wird hier der interne Zinsfaktor q_1 von $\mathbf{X}$ als **NU-Zinsfaktor**, der zugehörige interne Zinssatz $i_1 = q_1 - 1$ als NU-Zinssatz und der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ als **NU-Zahlungsstrom** bezeichnet.
Die Barwert-Funktion $B_n(\mathbf{X},q)$ besitzt die Vorzeichenverteilung
$X_0 < 0$: $B_n(\mathbf{X},q) > 0$ für $q \in]0,q_1[$ und $B_n(\mathbf{X},q) < 0$ für $q \in]q_1,\infty[$;
$X_0 > 0$: $B_n(\mathbf{X},q) < 0$ für $q \in]0,q_1[$ und $B_n(\mathbf{X},q) > 0$ für $q \in]q_1,\infty[$.

Bei Verwendung eines *positiven* internen Zinsfaktors q_1 von $\mathbf{X}$ ist diese Vorzeichenverteilung (NU) charakteristisch für die Verwendbarkeit der Methode des internen Zinssatzes *und* für die Übereinstimmung (Konsistenz) der Beurteilungen des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mittels der Methode des internen Zinssatzes (MIZ) und der Kapitalwertmethode (KWM) *für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor q*. Die eindeutige Beurteilbarkeit eines NU-Zahlungsstroms mittels MIZ und des einzigen positiven internen Zinsfaktors ergibt sich aus der Totalität der strengen Halbordnung > („größer als“) in $]0,\infty[\subseteq \mathbb{R}$, nach der je zwei *verschiedene* Elemente in diesem Bereich mittels > vergleichbar sind und somit für die Zinsfaktoren $q_{int}, q_K \in]0,\infty[$ das Trichotomiegesetz gilt (Duden (1985), S. 341, 460): Es gilt genau eine der drei Aussagen: $q_{int} > q_K$, $q_{int} = q_K$, $q_{int} < q_K$. Das Ergebnis der Beurteilung ist dabei vom verwendeten Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ abhängig. Damit ergibt sich die nachfolgende allgemeine Definition der Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung eines NU-Zahlungsstroms $\mathbf{X}$.

Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung eines NU-Zahlungsstroms
Der Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) mit der Vorzeichenverteilung (NU) für seine Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ ist nach der Methode des internen Zinssatzes vorteilhaft,

indifferent bzw. unvorteilhaft, wenn sein eindeutig bestimmter NU-Zinssatz $i_1 = i_{int} \in\,]-1,\infty[$ und der beliebig vorgegebene Kalkulationszinssatz $i_K \in\,]-1,\infty[$ bzw. die zugehörigen positiven Zinsfaktoren $q_{int} = 1 + i_{int}$ und $q_K = 1 + i_K$ die angegebene Relation erfüllen:

Die Investition **X** ist I-vorteilhaft ($\mathbf{X} \succ_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} > i_K \quad \Leftrightarrow q_{int} > q_K$;
die Investition **X** ist I-indifferent ($\mathbf{X} \sim_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} = i_K \quad \Leftrightarrow q_{int} = q_K$;
die Investition **X** ist I-unvorteilhaft ($\mathbf{X} \prec_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} < i_K \quad \Leftrightarrow q_{int} < q_K$.

Die Finanzierung **X** ist I-vorteilhaft ($\mathbf{X} \succ_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} < i_K \quad \Leftrightarrow q_{int} < q_K$;
die Finanzierung **X** ist I-indifferent ($\mathbf{X} \sim_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} = i_K \quad \Leftrightarrow q_{int} = q_K$;
die Finanzierung **X** ist I-unvorteilh. ($\mathbf{X} \prec_I \mathbf{O}$) $\Leftrightarrow i_{int} > i_K \quad \Leftrightarrow q_{int} > q_K$.

Die funktionentheoretische Charakterisierung eines NU-Zahlungsstroms: Die Eigenschaft (NU) der Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ ist funktionentheoretisch gleichbedeutend dazu, dass die Endwertfunktion des Zahlungsstroms **X** eine positive Nullstelle q_1 besitzt, die eine ungerade Vielfachheit (Ordnung) m aufweist und für die das zugehörige m-te Quotientenpolynom

$$P_{n-m}(q) = \frac{E_n(q) - E_n(q_1)}{(q-q_1)^m} = \sum_{j=0}^{n-m} a_j^{(n-m)} q^{n-m-j}$$

auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ nullstellenfrei ist. Speziell für $m = 1$ erhält man eine funktionentheoretische Charakterisierung eines VK-Zahlungsstroms. Insbesondere ist auch bei einem regulären Zahlungsstrom die Nullstellenordung $m = 1$. Die Koeffizienten $a_j^{(n-m)}$ ($j = 0,\ldots,n-m$) des m-ten Quotientenpolynoms $P_{n-m}(q)$ berechnen sich dabei nach der Rekursionsformel des vollständigen Horner-Schemas sukzessive für $k = n,\ldots,n-m+1$:

$$a_j^{(n)} = X_j \qquad (j = 0,1,\ldots,n),$$

$$a_0^{(k-1)} = a_0^{(k)} = \ldots = a_0^{(n)} = X_0 \neq 0,$$

$$a_j^{(k-1)} = q_1 a_{j-1}^{(k-1)} + a_j^{(k)} \qquad (j = 1,\ldots,k-1),$$

$$a_k^{(k-1)} := P_k(q_1) = q_1 a_{k-1}^{(k-1)} + a_k^{(k)}.$$

Damit hat man eine funktionentheoretische Charakterisierung der Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $X_0 \neq 0$, die jeweils einen einzigen positiven internen Zinsfaktor q_1 besitzen, sodass mit diesem internen Zinsfaktor q_1 und jedem beliebigen Kalkulationszinsfaktor $q = q_K > 0$ die Methoden MIZ und KWM die gleiche Beurteilung für **X** ergeben.

Bei der Begründung der MIZ für die NU-Zahlungsströme wird schon deutlich, dass hierbei tatsächlich die Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren eine entscheidende Rolle spielen. Die Verfolgung dieses Gesichtspunkts führt dann in Abschnitt 7.5 zu einer Charakterisierung der Kapitalwertmethode mittels der internen Zinsfaktoren und damit zu einer auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ universell anwendbaren Verallgemeinung der Methode, nämlich zur ‚Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren'.

Die Eigenschaft (RG) der Regularität des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ ($X_0 \neq 0$) ist eine hinreichende Bedingung für die Eigenschaft (VK) der Existenz eines positiven Verrechnungskontozinsfaktors (mit Nullstellenordnung $m = 1$) für $\mathbf{X}$. Die Existenz eines positiven VK-Zinsfaktors wiederum ist eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines positiven NU-Zinsfaktors (mit ungerader Nullstellenordnung, nämlich $m = 1$).

Die Regularität von $\mathbf{X}$ oder die Existenz eines positiven Verrechnungskontozinsfaktors ist aber für eine Laufzeit $n \geq 3$ keine notwendige Bedingung für die spezielle Vorzeichenverteilung (NU) der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$. Das folgende Beispiel 7.1 zeigt, dass es auch nichtreguläre Zahlungsströme gibt, die einen VK-Zinsfaktor oder nur einen NU-Zinsfaktor besitzen. Für derartige Zahlungsströme ist aber eine Laufzeit $n \geq 3$ nötig, da bei den Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ die Eigenschaft (NU) nur für reguläre Zahlungsströme auftritt. Bei der Laufzeit $n = 1$ liegt ein NU-Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ ($X_0 \neq 0$) genau dann vor, wenn der einzige interne Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X}) = -X_1/X_0$ positiv ist ($X_0 \cdot X_1 < 0$).

Beweis der Regularität der Zahlungsströme mit der Eigenschaft (NUI) oder (NUF) für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$:

Für $n = 1$ hat jeder Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ mit $X_0 \neq 0$ und o. E. $X_0 < 0$ genau eine reelle Nullstelle q_1 der zugehörigen Endwertfunktion

$$E_1(\mathbf{X},q) = X_0 q + X_1.$$

Diese Nullstelle $q_1 = -X_1/X_0$ ist stets auch ein Verrechnungskontozinsfaktor, da $E_0(\mathbf{X},q_1) = X_0 < 0$ ist und somit die Folge der Horner-Schema-Werte $(E_0(\mathbf{X},q_1),\ldots,E_n(\mathbf{X},q_1)) = (E_0(\mathbf{X},q_1),0)$ keinen Vorzeichenwechsel aufweist.

Der Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ ($X_0 < 0$) hat genau dann die Eigenschaft (NUI), wenn $E_1(\mathbf{X},q) = qB_1(\mathbf{X},q)$ eine positive Nullstelle hat, also $X_1 > 0$ ist. In diesem Fall hat die Zahlungsfolge $\mathbf{X} = (X_0,X_1)^\mathsf{T}$ genau einen Vorzeichenwechsel und $\mathbf{X}$ ist ein Normalzahlungsstrom und ein regulärer Zahlungsstrom.

Für $n = 2$ hat die Endwertfunktion $E_2(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,X_1,X_2)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$, $X_0 \neq 0$ und o. E. $X_0 < 0$, die Produktdarstellung

$$E_2(\mathbf{X},q) = X_0 \cdot (q - q_1)(q - q_2)$$

mit den beiden komplexen Nullstellen q_1 und q_2. Allgemein besitzt nämlich für eine beliebige Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ als ein nichtkonstantes Polynom n-ten Grades ($n \geq 1$) nach dem Fundamentalsatz der klassischen Algebra von Gauß 1799 und d'Alembert 1746 (benannt nach dem französischen Mathematiker, Physiker und Philosophen Jean d'Alembert, 1717–1783, und dem deutschen Mathematiker, Astronomen, Geodäten und Physiker Carl Friedrich Gauß, 1777–1855) die Produktdarstellung mit Linearfaktoren

$$E_n(\mathbf{X},q) = X_0 \cdot (q - q_1)(q - q_2) \cdot \ldots \cdot (q - q_n)$$

mit den n komplexen Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_n$, die bis auf die Reihenfolge bestimmt sind und auch mehrfach vorkommen können. Nach dem (Wurzel-)Satz von Vieta (benannt nach dem französischen Advokaten und Mathematiker François Viète oder Franciscus Vieta, 1540–1603) lassen sich die Koeffizienten X_j des Polynoms durch seine Nullstellen ausdrücken. Weitere Ausführungen zum Fundamentalsatz der Algebra und zum Wurzelsatz von Vieta findet man beispielsweise im Duden (1985), S.27–29, 262, 517, in Bronstein et al. (1997), S. 39–40, und im Teubner-Taschenbuch, Teil 1 (1996), S. 646–652. Speziell für $n = 2$ erhält man damit

$$X_1 = -X_0 \cdot (q_1 + q_2),$$
$$X_2 = +X_0 \cdot q_1 q_2.$$

Falls $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) bzw. die zugehörige Endwertfunktion $E_2(\mathbf{X},q) = q^2 B_2(\mathbf{X},q)$ die Eigenschaft (NUI) hat, gibt es eine positive Nullstelle q_1 von $E_2(\mathbf{X},q)$. Weiter ist dann auch $q_2 = X_2/X_0 q_1$ eine reelle Nullstelle, die wegen (NUI) nur nichtpositiv sein kann. Daraus folgt $X_2 = X_0 q_1 q_2 \geq 0$. Hinsichtlich des Vorzeichens von X_1 werden jetzt zwei Fälle unterschieden. i) Falls $X_1 > 0$ ist, besitzt $\mathbf{X}$ genau einen Vorzeichenwechsel, nämlich bei X_1. ii) Falls $X_1 \leq 0$ ist, folgt aus der Vieta-Darstellung von X_1 die Ungleichung $q_1 + q_2 = X_1/(-X_0) \leq 0$ bzw. $q_2 \leq - q_1 < 0$. Daraus folgt mit der Vieta-Darstellung von X_2 die Ungleichung $X_2 = X_0q_1q_2 > 0$, sodass $\mathbf{X}$ ebenfalls genau einen Vorzeichenwechsel hat, nämlich bei X_2. Insgesamt ist damit die Regularität von $\mathbf{X}$ nachgewiesen. □

Beispiel 7.1 Beispiele für eine nichtreguläre Finanzierung mit der Eigenschaft (NUF) für die Vorzeichenverteilung der zugehörigen Kapitalwertfunktion bzw. der Endwertfunktion

Es werden nun drei NU-Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^4$ angegeben, die nichtregulär sind. Der erste ist auch ein VK-Zahlungsstrom, die beiden anderen sind keine VK-Zahlungsströme. Damit ist gezeigt, dass für eine Laufzeit $n \geq 3$ die Menge der regulären Zahlungsströme eine echte Teilmenge der VK-Zahlungsströme und diese wiederum eine echte Teilmenge der NU-Zahlungsströme ist.

1) Die Endwertfunktion

$$\begin{aligned} E_3(\mathbf{X},q) &= q^3 - q^2 + q - 1 \\ &= (q - 1)(q^2 + 1) = (q - 1)P_2(q) \end{aligned}$$

der Finanzierung $\mathbf{X} = (1,-1,1,-1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^4$ besitzt die positive Nullstelle $q_1 = 1$ und das zur Stelle q_1 gehörige Quotientenpolynom

$$P_2(q) = q^2 + 1 = a_0q^2 + a_1q + a_2$$

mit der Koeffizientenfolge $(a_0,a_1,a_2) = (1,0,1)$. Da die Koeffizienten $a_j = E_j(q_1)$ $(j = 0,1,2)$ alle nichtnegativ sind, also keinen Vorzeichenwechsel haben, und der erste Koeffizient $a_0 = X_0 = 1$ positiv ist, ist q_1 nach Abschnitt 7.1.3 ein sogenannter Verrechnungskontozinsfaktor (hier ein Darlehenszinsfaktor, Kreditzinsfaktor) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ und das Quotientenpolynom $P_2(q)$ positiv auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$. Demzufolge besitzt die Endwertfunktion $E_3(\mathbf{X},q)$ die Stelle q_1 auch als einzige positive Nullstelle, als einfache Nullstelle und die Vorzeichenverteilung (NUF): $E_3(\mathbf{X},q) < 0$ in $]0,q_1[$ und $E_3(\mathbf{X},q) > 0$ in $]q_1,\infty[$.

Die Finanzierung $\mathbf{X}$ besitzt in ihrer Zahlungsfolge +1, -1, +1, -1 aber $w = 3$ Vorzeichenwechsel und ist demnach keine reguläre Finanzierung.

2) Die Endwertfunktion

$$\begin{aligned} E_3(\mathbf{X},q) &= q^3 - 3q^2 + 7q - 5 \\ &= (q - 1)(q^2 - 2q + 5) = (q - 1)P_2(q) \end{aligned}$$

des Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (+1,-3,+7,-5)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^4$ besitzt die positive Nullstelle $q_1 = 1$ und das zur Stelle q_1 gehörige Quotientenpolynom

$$P_2(q) = q^2 - 2q + 5.$$

Da die Koeffizientenfolge $(a_0,a_1,a_2) = (+1,-2,+5)$ des Quotientenpolynoms zwei Vorzeichenwechsel aufweist, ist q_1 kein Verrechnungskontozinsfaktor.

Das Quotientenpolynom $P_2(q)$ hat aber dennoch keine Nullstelle, da $P_2'(q) = 2q - 2 < 0$ für $q < 1$, $P_2'(q) > 0$ für $q > 1$ und somit $P_2(q) \geq P_2(1) = 4 > 0$ für alle $q \in \mathbb{R}$. Demzufolge besitzt die Endwertfunktion $E_3(\mathbf{X},q)$ die Stelle q_1 als einzige positive Nullstelle und als einfache Nullstelle und die Vorzeichenverteilung (NUF). Die Finanzierung $\mathbf{X}$ besitzt aber $w = 3$ Vorzeichenwechsel und ist demnach keine reguläre Finanzierung.

3) Die Endwertfunktion

$$\begin{aligned} E_3(\mathbf{X},q) &= q^3 - 3q^2 + 3q - 1 \\ &= (q - 1)^3 \end{aligned}$$

des Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (+1,-3,+3,-1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^4$ besitzt $q_1 = 1$ als dreifache positive Nullstelle, einzige positive Nullstelle und Vorzeichenwechselstelle. Demnach hat die Endwertfunktion $E_3(\mathbf{X},q)$ die Vorzeichenverteilung (NUF). Als dreifache Nullstelle ist q_1 kein Verrechnungskontozinsfaktor. Die Finanzierung $\mathbf{X}$ besitzt $w = 3$ Vorzeichenwechsel und ist somit keine reguläre Finanzierung. △

In der Praxis ist der interne Zinssatz $i_{int}(\mathbf{X})$ eines Zahlungsstroms **X** ein beliebter Maßstab, um auch einen beliebigen Zahlungsstrom **X** auf seine Vorteilhaftigkeit hin zu untersuchen. Es ist aber noch zu klären, für welche Zahlungsströme die Methode des internen Zinssatzes oder eine verallgemeinerte Methode zur Beurteilung tatsächlich geeignet ist. Nachfolgend kann nun schon einmal der Anwendungsbereich B_{MIZ} der Methode des internen Zinssatzes angegeben werden, in dem bei Verwendung eines einzigen internen Zinsfaktors eine Beurteilung bezüglich *jedes* positiven Kalkulationszinsfaktors möglich ist.
In der Praxis werden interne Zinssätze $i_{int}(\mathbf{X})$ und $i_{int}(\mathbf{Y})$ meist auch ohne Überprüfung geeigneter Voraussetzungen und ohne klare Definition eines trichotomischen I-Vergleichs noch verwendet, um alternative Investitionen bzw. Finanzierungen **X** und **Y** miteinander zu vergleichen. Diese Methode des internen Zinssatzes für den Vergleich von Zahlungsströmen wird hier erst in den späteren Abschnitten 7.9 – 7.15 diskutiert.

Simultaner Anwendungsbereich der Methode des internen Zinssatzes für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren

Mit der Menge der **NU-Zahlungsströme** ist schon der Teil $B_{\text{MIZ},+}$ des Anwendungsbereichs B_{MIZ} der Methode des internen Zinssatzes bestimmt, in welchem für jeden Zahlungsstrom simultan für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ jeweils die I-Beurteilung (MIZ-Beurteilung) und die B-Beurteilung (Barwertbeurteilung, KWM-Beurteilung, EWM-Beurteilung) übereinstimmen. In $B_{\text{MIZ},+}$ sind diejenigen Zahlungsströme von B_{MIZ}, für deren I-Beurteilung ein positiver interner Zinsfaktor q_1 verwendet wird.
Analog bilden die im nächsten Abschnitt 7.3 behandelten **NF-Zahlungsströme** den Teil $B_{\text{MIZ},-}$ des Anwendungsbereichs B_{MIZ}, für dessen Zahlungsströme die I-Beurteilung mit einem nichtpositiven internen Zinsfaktor $q_1 \in [-\infty,0]$ durchgeführt wird. Die Eigenschaft (NF) wird dort durch die Nullstellenfreiheit der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ auf der positiven Halbachse definiert.
Bei einer näheren Untersuchung des Anwendungsbereichs B_{MIZ} genügt es den Anwendungsbereich

$$B_{\text{Inv}} = B_{\text{MIZ}} \cap H^{<}_{\mathbf{e}_1,0}$$

im Halbraum $H^{<}_{\mathbf{e}_1,0}$ der Investitionen zu betrachten, da man zeigen kann, dass der entsprechende Anwendungsbereich

$$B_{\text{Fin}} = B_{\text{MIZ}} \cap H^{>}_{\mathbf{e}_1,0}$$

der Finanzierungen aus dem Anwendungsbereich der Investitionen durch Spiegelung am Nullpunkt **O** erhalten wird: $B_{\text{Fin}} = -B_{\text{Inv}}$.
Der gesamte Anwendungsbereich (Konsistenzbereich) der Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit einem beliebig für die I-Beurteilung ausgewählten reellen internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ bzw. dem nichtreellen internen Zinsfaktors $q_{int}(\mathbf{X}) = -\infty$ und *allen positiven Kalkulationszinsfaktoren* wird charakterisiert durch die folgende Bedingung an die darin enthaltenen Zahlungsströme:

(BMIZ) Der Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) besitzt einen internen Zinsfaktor $q_1 \in \mathbb{R}$ oder keinen (reellen) internen Zinsfaktor ($q_1 = -\infty$) und für die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ gilt auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ die folgende Vorzeichenverteilung:
(NU) im Falle $q_1 > 0$ bzw.
(NF) im Falle $-\infty \leq q_1 \leq 0$.

Die Menge B_{MIZ} der Zahlungsströme mit der Eigenschaft (BMIZ) enthält genau die Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, die mittels eines einzigen internen Zinsfaktors und jedes beliebigen positiven Kalkulationszinsfaktors IB-konsistent beurteilt werden können. Ein Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in B_{\text{MIZ}}$ kann dabei aber zu verschiedenen Kalkulationszinsfaktoren auch verschiedene I- bzw. B-Beurteilungen aufweisen. Mit der

Einschränkung der Methode des internen Zinssatzes zur Beurteilung eines Zahlungsstroms auf diesen Anwendungsbereich B_{MIZ} (jetzt inklusive der NF_0–Zahlungsströme von Abschnitt 7.3) sind auch zwei wichtige Fragen der MIZ beantwortet. Als Erstes kann die Zugehörigkeit eines Zahlungsstroms zum Anwendungsbereich B_{MIZ} auch ohne unmittelbare Verwendung der Kapitalwertmethode geprüft werden: Die Zugehörigkeit eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zu B_{MIZ} kann dadurch geprüft werden, dass sämtliche (positive) Nullstellen des Polynoms $E_n(\mathbf{X},q)$ beispielsweise mittels des Softwaresystems Mathematica von Wolfram Research bestimmt werden und dann untersucht wird, ob die Eigenschaft (NU) oder (NF) vorliegt. Dabei wird zwar die Kapitalwertmethode mit der Berechnung des speziellen Kapitalwerts $B_n(\mathbf{X},q_K)$ bzw. des Endwerts $E_n(\mathbf{X},q_K)$ nicht unmittelbar verwendet, aber bei der numerischen Bestimmung der Nullstellen von $E_n(\mathbf{X},q)$ ein beträchtlich größerer Rechenaufwand betrieben. Als Zweites ist geklärt, welcher der internen Zinsfaktoren eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in B_{MIZ}$ für die I-Beurteilung des Zahlungsstroms zu verwenden ist, nämlich der positive NU-Zinsfaktor, ein beliebiger nichtpositiver interner Zinsfaktor oder der formale nichtreelle interne Zinsfaktor $-\infty$.

Bei den Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ ist für den Anwendungsbereich B_{MIZ} noch eine analytische Beschreibung und eine geometrische Darstellung möglich. Nachfolgend wird nur die grafische Darstellung angegeben. Für die Laufzeit $n = 1$ stimmen die beiden Beurteilungsmethoden (I- und B-Beurteilung) für alle Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ mit $X_0 \neq 0$ überein. Der in Abbildung 7.2 dargestellte Anwendungsbereich B_{MIZ} für $n = 1$ hat also noch eine einfache Struktur und ist durch die gesamte Ebene $\mathbb{R}^2$ abzüglich der X_1-Achse ($X_0 = 0$) gegeben:

$$B_{MIZ} = \mathbb{R}^2 \setminus H_{\mathbf{e}_1,0} .$$

Für die Laufzeit $n \geq 2$ hat der Anwendungsbereich B_{MIZ} infolge der Problematik der Nullstellenbestimmung für Polynome aber keine so einfache und übersichtliche geometrische Struktur mehr wie im Fall $n = 1$. Demzufolge liefert ab $n \geq 2$ die geometrischen Struktur des Anwendungsbereichs im Allgemeinen keine Entscheidungshilfe zur Prüfung, ob $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ in diesem Anwendungsbereich liegt. Zur Veranschaulichung dieser Problematik werden für die Laufzeit $n = 2$ der gesamte Anwendungsbereich B_{MIZ} und einige seiner Teilbereiche in den Abbildungen 7.3 und 7.4 geometrisch dargestellt. Dabei bezeichnet $B_{Inv,+}$, $B_{Inv,-}$, $B_{Fin,+}$, $B_{Fin,-}$ jeweils den Teilbereich der Investitionen bzw. Finanzierungen in $B_{MIZ,+}$ bzw. $B_{MIZ,-}$ und $N_{Inv,-}$, $N_{Inv,0}$ die Menge der NF-Investitionen mit einem negativen bzw. mit keinem reellen internen Zinsfaktor. Die analytische Beschreibung der verschiedenen Teilbereiche des Anwendungsbereichs mit Hilfe von nichtlinearen Ungleichungen, in denen der Wurzelausdruck $w(X_2,X_0) = 2\sqrt{X_0 X_2}$ auftritt, wird hier weggelassen.

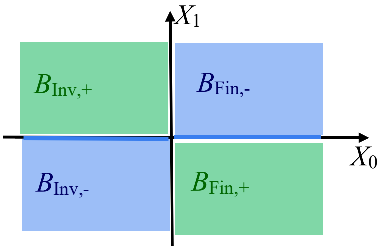


Abb. 7.2 Der Anwendungsbereich B_{MIZ} von MIZ für die Laufzeit $n = 1$ mit seinen Teilbereichen $B_{Inv,+}$, $B_{Fin,+}$, $B_{Inv,-}$ und $B_{Fin,-}$ für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren

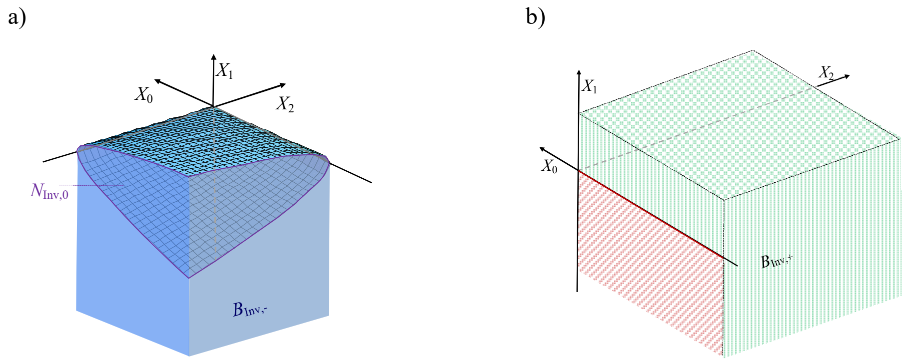


Abb. 7.3 Die Anwendungsbereiche $B_{\mathrm{Inv},-} = N_{\mathrm{Inv},-}$, $N_{\mathrm{Inv},0}$ und $B_{\mathrm{Inv},+}$ von MIZ für die Laufzeit $n = 2$ zur Beurteilung von Investitionen a) mit einem nichtpositiven Zinsfaktor, keinem internen Zinsfaktor bzw. b) einem positiven internen Zinsfaktor und allen positiven Kalkulationszinsfaktoren

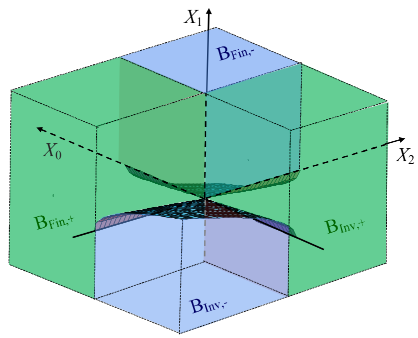


Abb. 7.4 Der gesamte Anwendungsbereich B_{MIZ} von MIZ für die Laufzeit $n = 2$ zur Beurteilung von Zahlungsströmen $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ ($X_0 \neq 0$) für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren

7.3 I-Beurteilung eines NF-Zahlungsstroms

Analog zur Verwendung eines positiven internen Zinsfaktors $q_1 = q_{int}(\mathbf{X})$ bei den NU-Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ soll jetzt auch für nichtpositive interne Zinsfaktoren des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ die Verwendbarkeit der Methode des internen Zinssatzes *und* deren Übereinstimmung (Konsistenz) mit der Kapitalwertmethode *für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren q* untersucht werden. Wegen der Möglichkeit, dass auch der spezielle interne Zinsfaktor $q_1 = 0$ auftritt und die Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X},q)$ für $q = 0$ nicht definiert ist, wird ein interner Zinsfaktor q_1 jetzt stets als Nullstelle der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ betrachtet.

Falls nun ein nichtpositiver interner Zinsfaktor $q_1 = q_{int}(\mathbf{X}) \leq 0$ existiert und zur Verwendung bei der Methode des internen Zinssatzes ausgewählt ist, gilt für ihn und alle positiven Kalkulationszinsfaktoren $q = q_K$ dieselbe Ungleichung

$$q_1 < q.$$

Eine Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) erhält somit für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren die gleiche I-Beurteilung:

$$\mathbf{X} \text{ ist I-unvorteilhaft} \qquad (\mathbf{X} \prec_{\mathrm{I},q} \mathbf{O}) \qquad \text{für } q > 0.$$

Die beiden Methoden MIZ und KWM liefern nun genau dann mit jedem Kalkulationszinsfaktor $q > 0$ für die Investition $\mathbf{X}$ jeweils die gleiche Beurteilung „unvorteilhaft", wenn $\mathbf{X}$ für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor auch dieselbe B-Beurteilung erhält:

$$\mathbf{X} \text{ ist B-unvorteilhaft} \qquad (\mathbf{X} \prec_{\mathrm{B},q} \mathbf{O}) \qquad \text{für } q > 0.$$

Dies bedeutet, dass die zur Investition $\mathbf{X}$ gehörige Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X},q)$ und die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q) = q^n B_n(\mathbf{X},q)$ für alle Kalkulationszinsfaktoren $q > 0$ negativ sind. Bei der nachfolgenden Bezeichnung (NFI) für diese Eigenschaft der Barwertfunktion steht NF für die Nullstellenfreiheit der Endwertfunktion auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ und I für Investition:

(NFI) Die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ der Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) ist auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ nullstellenfrei und besitzt somit die Vorzeicheneigenschaft

$$E_n(\mathbf{X},q) < 0 \quad \text{für alle } q > 0.$$

Die Investition $\mathbf{X}$ wird hier als **NF-Investition** bezeichnet. Falls dazu ein nichtpositiver interner Zinsfaktor von $\mathbf{X}$ existiert, so wird dieser als NF-Zinsfaktor von $\mathbf{X}$ bezeichnet.

Eine NF-Investition $\mathbf{X}$ ist notwendig auch eine Λ-nichtpositive Investition, für welche die Endwertfunktion auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ nichtpositiv ist und dort höchstens n reelle Nullstellen besitzt:

$$\mathbf{X} \in W_{-\Lambda}(\mathbf{O}) \setminus \{\mathbf{O}\} = -\, W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) \setminus \{\mathbf{O}\}.$$

Die SE-Halbordnung (simultane Endwert-Halbordnung) Λ wird auf der Autoren-Website www.pleier-r.de behandelt. Im Menü Finanzmathematik - Klassische Finanzmathematik findet man dazu eine pdf-Datei.

Für eine Finanzierung $\mathbf{X}$, die mit einem nichtpositiven internen Zinsfaktor $q_1 = q_{int}(\mathbf{X})$ beurteilt werden und für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren jeweils dieselbe I- und B-Beurteilung „vorteilhaft" aufweisen soll, ergibt sich eine analoge Bedingung:

(NFF) Die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ der Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$) ist auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ nullstellenfrei und besitzt somit die Vorzeicheneigenschaft

$$E_n(\mathbf{X},q) > 0 \quad \text{für alle } q > 0.$$

Die Finanzierung $\mathbf{X}$ wird dann als **NF-Finanzierung** bezeichnet. Falls dazu ein nichtpositiver interner Zinsfaktor von $\mathbf{X}$ existiert, so wird dieser als NF-Zinsfaktor von $\mathbf{X}$ bezeichnet.

Die beiden Bedingungen (NFI) und (NFF) lassen sich zu einer Bedingung (NF) der Vorzeichenverteilung der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ zusammenfassen, da für hinreichend große $q > 0$ die Endwertfunktion einer Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) negativ und die Endwertfunktion einer Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$) positiv ist:

(NF) Die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ ($X_0 \neq 0$) ist auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ nullstellenfrei. Der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ wird dann als **NF-Zahlungsstrom** bezeichnet. Dabei gilt

$$E_n(\mathbf{X},q) < 0 \text{ für alle } q > 0 \text{ im Falle } X_0 < 0,$$
$$E_n(\mathbf{X},q) > 0 \text{ für alle } q > 0 \text{ im Falle } X_0 > 0.$$

Falls dazu ein nichtpositiver interner Zinsfaktor von $\mathbf{X}$ existiert, so wird dieser als **NF-Zinsfaktor** von $\mathbf{X}$ bezeichnet.

Eine NF-Finanzierung $\mathbf{X}$ liegt notwendig im punktierten Λ-nichtnegativen Kegel:

$$\mathbf{X} \in W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) \setminus \{\mathbf{O}\}.$$

Die Beurteilung eines NF-Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mittels MIZ bei einem beliebigen NF-Zinsfaktor $q_1 = q_{int}(\mathbf{X})$ (≤ 0) liefert mit jedem beliebig festgelegten positiven Kalkulationszinsfaktor das gleiche Ergebnis. Das Ergebnis ist eindeutig festgelegt auf unvorteilhaft für eine Investition und auf vorteilhaft für eine Finanzierung. Im Gegensatz zu den NU-Zahlungsströmen ist aber bei den NF-Zahlungsströmen ab der Laufzeit $n \geq 2$ ein interner Zinsfaktor nicht notwendig existent und bei gesicherter Existenz nicht eindeutig festgelegt. Bei der Laufzeit $n = 1$ liegt ein NF-Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ ($X_0 \neq 0$) genau dann vor, wenn der einzige interne Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X}) = -X_1/X_0$ nichtpositiv ist ($X_0 \cdot X_1 \geq 0$). Für eine beliebige Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ wird unten noch bei den hinreichenden Bedingungen für (NF) gezeigt, dass ein VK-Zahlungsstrom mit nichtpositivem VK-Zinsfaktor auch ein NF-Zahlungsstrom ist.

Man kann nun bei speziellen NF-Zahlungsströmen sogar auf die Existenz eines internen Zinsfaktors in ganz $\mathbb{R}$ verzichten. Ein derartiger Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ hat dann die folgende Eigenschaft:

(NF_0) Die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) ist auf ganz $\mathbb{R}$ nullstellenfrei:

$$E_n(\mathbf{X},q) < 0 \text{ für alle } q \in \mathbb{R} \text{ im Falle } X_0 < 0,$$
$$E_n(\mathbf{X},q) > 0 \text{ für alle } q \in \mathbb{R} \text{ im Falle } X_0 > 0.$$

Der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ wird dann als **$\mathbf{NF_0}$-Zahlungsstrom** bezeichnet.

Die NF_0-Zahlungsströme

$$\mathbf{X} \in (H^{<}_{\mathbf{e}_1,0} \setminus D_{\text{Inv}}) \cup (H^{>}_{\mathbf{e}_1,0} \setminus D_{\text{Fin}})$$

sind spezielle NF-Zahlungsströme. Mit D_{Inv} bzw. D_{Fin} wird hier die Menge der Investitionen bzw. Finanzierungen $\mathbf{X}$ ($X_0 \neq 0$) bezeichnet, die mindestens einen internen Zinsfaktor besitzen. Wenn man eine NF_0-Investition $\mathbf{X}$ als I-unvorteilhaft ($\mathbf{X} \prec_{\text{I},q} \mathbf{O}$) und eine NF_0-Finanzierung $\mathbf{X}$ als I-vorteilhaft ($\mathbf{X} \succ_{\text{I},q} \mathbf{O}$) ansieht, so stimmen für $\mathbf{X}$ zu jedem Kalkulationszinsfaktor $q > 0$ die I- und die B-Beurteilung überein. Für einen NF_0-Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ kann nun rein formal zur Ermöglichung eines Vergleichs von internem Zinsfaktor und Kalkulationszinsfaktor ein nichtreeller interner Zinsfaktor (NF_0-Zinsfaktor) definiert werden durch $q_{int}(\mathbf{X}) = -\infty$. Damit gilt dann $q_{int}(\mathbf{X}) = -\infty < q$ für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren q.

Bei Verwendung eines *nichtpositiven* internen Zinsfaktors q_1 oder des formalen *nichtreellen* internen Zinsfaktors $q_1 = -\infty$ von **X** ist somit diese Vorzeichenverteilung (NF) charakteristisch für die Verwendbarkeit der Methode des internen Zinssatzes *und* die Übereinstimmung (Konsistenz) der Beurteilungen des Zahlungsstroms **X** mittels MIZ und KWM für *alle positiven Kalkulationszinsfaktoren q*.
Die oben angegebene Definition der Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung eines Zahlungsstroms **X** lässt sich somit über die NU-Zahlungsströme mit dem positiven internen Zinsfaktor hinaus auch noch auf die NF-Zahlungsströme erweitern, die keinen positiven internen Zinsfaktor und evtl. auch gar keinen internen Zinsfaktor besitzen.

Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung eines NF-Zahlungsstroms
Ein Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) mit der Eigenschaft (NF), also ohne positiven internen Zinsfaktor, besitzt eine zur B-Beurteilung (Beurteilung nach der KWM) konsistente und für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren q und alle NF-Zinsfaktoren $q_{int}(\mathbf{X})$ (≤ 0) bzw. den nichtreellen internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X}) = -\infty$ gleiche I-Beurteilung:

> Eine NF-Investition **X** ist I-unvorteilhaft ($\mathbf{X} \prec_{\mathrm{I},q} \mathbf{O}$) für jeden Kalkulationszinsfaktor $q > 0$.
>
> Eine NF-Finanzierung **X** ist I-vorteilhaft ($\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I},q} \mathbf{O}$) für jeden Kalkulationszinsfaktor $q > 0$.

Der gesamte Anwendungsbereich B_{MIZ} der Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit einem beliebigen reellen internen Zinsfaktor oder gar keinen internen Zinsfaktor, für den für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor jeweils die I- und B-Beurteilung übereinstimmt, wird also durch die NU- und NF-Zahlungsströme gegeben. Eine grafische Darstellung von B_{MIZ} für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ ist in den Abbildungen 7.2 – 7.4 von Abschnitt 7.2 angegeben.

Hinreichende Bedingungen für (NF)
In Abschnitt 7.1.3 wurde gezeigt, dass ein interner Zinsfaktor, der ein positiver VK-Zinsfaktor ist, auch ein NU-Zinsfaktor ist. Eine analoge Aussage wird nun auch für einen nichtpositiven VK-Zinsfaktor gezeigt:

Ein nichtpositiver VK-Zinsfaktor ist auch ein NF-Zinsfaktor, also ein nichtpositiver interner Zinsfaktor q_1 des Zahlungsstroms **X** ($X_0 \neq 0$), dessen Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ nullstellenfrei ist.

Insgesamt ergibt sich, dass ein VK-Zinsfaktor eines Zahlungsstroms notwendig entweder ein (positiver) NU-Zinsfaktor oder ein (nichtpositiver) NF-Zinsfaktor ist. Weiter folgt daraus:

Ein positiver VK-Zinsfaktor ist der einzige VK-Zinsfaktor des Zahlungsstroms.

Ein positiver VK-Zinsfaktor schließt nämlich als NU-Zinsfaktor weitere positive interne Zinsfaktoren und damit insbesondere weitere positive VK-Zinsfaktoren aus. Außerdem kann kein nichtpositiver VK-

Zinsfaktor auftreten, da sonst kein positiver interner Zinsfaktor und insbesondere kein positiver VK-Zinsfaktor existieren könnte.
Ohne Angabe des Beweises sei hier noch angemerkt, dass dagegen die Anzahl der nichtpositiven VK-Zinsfaktoren alle Werte von 0 bis n mit Ausnahme von n - 1 annehmen kann.

Beweis für die Eigenschaft (NF) bei Existenz eines nichtpositiven VK-Zinsfaktors: Ist o. E. **X** eine Investition ($X_0 < 0$; analoge Betrachtung für eine Finanzierung), so folgt aus der Existenz eines Verrechnungskontozinsfaktors $q_1 \leq 0$ wegen $a_0 = X_0 < 0$ die Nichtpositivität der Koeffizienten $a_j = E_j(\mathbf{X},q_1)$ ($j = 0,\ldots,n-1$) des Quotientenpolynoms

$$P_{n-1}(q) = E_n(q)/(q - q_1) = a_0q^{n-1} + a_1q^{n-2} + \ldots + a_{n-2}q + a_{n-1},$$

dann mit der Negativität des Koeffizienten $a_0 = X_0$ für das Quotientenpolynom die Ungleichung

$$P_{n-1}(q) \leq a_0q^{n-1} < 0 \qquad \text{für alle } q > 0$$

und daraus für die Endwertfunktion $E_n(q) = (q - q_1)P_{n-1}(q)$ wegen $q > 0 \geq q_1$ und $q - q_1 > 0$ die Vorzeichenverteilung (NF)

$$E_n(q) < 0 \qquad \text{für alle } q > 0.$$

Ein VK-Zahlungsstrom **X** mit nichtpositivem VK-Zinsfaktor ist somit auch ein NF-Zahlungsstrom.

□

Aus der Existenz eines nichtpositiven VK-Zinsfaktors q_1 der Investition **X** folgt außerdem die Nichtpositivität der Zahlungsstromkomponenten X_j, sodass der Zahlungsstrom **X** ($X_0 < 0$) keinen Vorzeichenwechsel aufweist und somit im nichtpositiven Orthanten liegt:

$$X_j = E_j(\mathbf{X},q_1) - E_{j-1}(\mathbf{X},q_1)q_1 \leq 0 \quad \text{für } j = 1,\ldots,n.$$

Aus diesen Koeffizientenbedingungen

$$X_0 < 0,\ X_j \leq 0\ (j = 1,\ldots,n)$$

ergibt sich auch noch einmal die Negativität der Endwertfunktion

$$E_n(q) = X_0q^n + X_1q^{n-1} + \ldots + X_n$$

auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$.
Diese Koeffizientenbedingungen sind notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines VK-Zinsfaktors q_1 auf der nichtpositiven Halbachse $]-\infty,0]$. Dies zeigen die beiden folgenden einfachen Beispiele: Die quadratische Funktion

$$E_2(q) = -q^2 - 1 = -(q - I)(q + I) \qquad (I = \sqrt{-1} \in \mathbb{C})$$

besitzt nichtpositive Koeffizienten X_j, aber keine reelle Nullstelle. Die kubische Funktion

$$E_3(q) = -q^3 - \tfrac{1}{4}q - \tfrac{5}{4} = -(q + 1)(q^2 - q - \tfrac{5}{4})$$

$$= -(q + 1)(q - \tfrac{1}{2} - I)(q - \tfrac{1}{2} + I)$$

besitzt nichtpositive Koeffizienten und die reelle Nullstelle $q_1 = -1$, die aber kein Verrechnungskontozinsfaktor ist, da das Quotientenpolynom

$$P_2(q) = E_3(q)/(q + 1) = -q^2 + q + \tfrac{5}{4}$$

die Koeffizientenfolge mit Vorzeichenwechsel $-1, +1, +\tfrac{5}{4}$ besitzt.

Es können aber andere hinreichende Bedingungen für die Existenz eines nichtpositiven VK-Zinsfaktors $q_1 \in \mathbb{R}$ (hier ohne Beweis) angegeben werden. Beweise hierzu findet man in einer noch unveröffentlichten Arbeit des Verfassers über die Tilgungsrechnung.

i) Falls bei beliebigem $n \in \mathbb{N}$ die Koeffizienten X_j der Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ alle nichtpositiv sind und alle n Nullstellen reell sind, so liegen diese Nullstellen auf der nichtpositiven Halbachse und sind alle Verrechnungskontozinsfaktoren.
ii) Falls $q_1 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle der Endwertfunktion ist und für die weiteren n-1 gemäß ihrer Vielfachheit aufgeführten komplexen Nullstellen $q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$ jeweils der Realteil Re q_j nichtpositiv ist,

$$\text{Re } q_j \leq 0 \quad \text{für } j = 2,\ldots,n,$$

so ist q_1 ein Verrechnungskontozinsfaktor.

Für den Beweis der letzten Aussage wird eine Charakterisierung einer Nullstelle $q_1 \in \mathbb{R}$ der Endwertfunktion als Verrechnungskontozinsfaktor durch n-1 Ungleichungen für die weiteren Nullstellen $q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{C}$ verwendet:

$$\begin{aligned} E_j(q_1) &= X_0(-1)^j e_j(q_2,\ldots,q_n) \\ &= X_0 \cdot (-1)^j \sum_{2 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_j \le n} q_{k_1} q_{k_2} \cdot \ldots \cdot q_{k_j} \\ &\le 0 \text{ bei } X_0 < 0 \ (\ge 0 \text{ bei } X_0 > 0) \qquad (j = 1,\ldots,n\text{-}1) \end{aligned}$$

bzw. für beliebiges $X_0 \neq 0$

$$(-1)^j \, e_j(q_2,\ldots,q_n) = (-1)^j \sum_{2 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_j \le n} q_{k_1} q_{k_2} \cdot \ldots \cdot q_{k_j} \ \ge 0 \qquad (j = 1,\ldots,n\text{-}1)$$

mit den elementarsymmetrischen Funktionen $e_j(q_2,\ldots q_n)$ der n-1 Variablen $q_2,\ldots,q_n$.

Anmerkung zu Zahlungsströmen mit negativem Verrechnungskontozinssatz

Bei der Verbuchung eines Zahlungsstroms auf einem Verrechnungskonto lässt sich auch ein *negativer* Zinssatz $i \in \mathbb{R}$ des Kontos sinnvoll interpretieren. Die Zinsen können dann nur nicht wie bei einem positiven Zinssatz als kapitalproportionaler Preis für die zeitweise Überlassung des Kapitals angesehen werden, sondern sind als eine anderweitig begründete Buchungsgröße zu deuten. Bei Belastung eines Anlagekontos durch den Betrag $|Y_j|$ der negativen Habenzinsen $Y_j = iC_{j-1}$ kann dies beispielsweise als eine Gebühr für die Aufbewahrung des Kapitals C_{j-1}, als Abgabe, Steuer, etc. bezeichnet werden, bei Gutschrift des Betrags $|Z_j|$ der negativen Sollzinsen $Z_j = iR_{j-1} = -iC_{j-1}$ auf einem Kreditkonto ebenfalls als eine Gebühr für die Kapitalaufbewahrung durch den Kreditnehmer, als Zuwendung, Zuschuss, Unterstützung oder Ähnliches. In einer noch unveröffentlichten Arbeit des Verfassers über die Tilgungsrechnung werden dazu etliche Beispiele angegeben.

Bei einer **Anlage mit negativem Habenzinssatz** i erfolgt im Falle $-1 < i < 0$ ($q = 1 + i$ mit $0 < q < 1$) im Sinne einer kapitalproportionalen Aufbewahrungsgebühr ein teilweiser Kapitalabzug, im Falle $i = -1$ ($q = 0$) ein vollständiger Kapitalabzug und im Falle $i < -1$ ($q < 0$) darüber hinaus noch ein weiterer Abzug durch den Kapitalnehmer.
Hinweise auf die Tatsache, dass Anlagen mit negativem Zinssatz tatsächlich möglich sind, findet man in der Literatur beispielsweise schon beim US-amerikanischen Ökonomen Irving Fisher (1867–1947) (1932): Auf Seite 35 seines Buches bringt er das Beispiel der Anlage in einer verderblichen Handelsware wie Stachelbeeren oder Pfirsichen und der Geldanlage in der Zeit eines Aufruhrs oder einer Invasion, in der das Geld verloren oder gestohlen werden kann. Auf Seite 182 erwähnt er, dass in Kriegs- und Revolutionszeiten die Kapitalisten ihr Kapital in Geldform aufbewahren, dabei auf einen Zinsgewinn verzichten und sogar für die sichere Aufbewahrung in neutralen Ländern etwas zahlen. Auf Seite 315 verweist er auf die Zeit in Europa während des ersten Weltkrieges, wo gelegentlich ein negativer Zinssatz für die sichere Kapitalaufbewahrung akzeptiert wurde. Auf Seite 37 und 340 erwähnt er die Inflation in Deutschland im September 1923 mit einem Realzinssatz von minus 99,9%. In seinem Beispiel auf Seite 56 gibt der Besitzer eines Erdbeerbeetes in der Erntezeit zwei Kisten Erdbeeren her gegen das Anrecht auf eine einzige Kiste im nachfolgenden Winter. Auf Seite 159 findet man das Beispiel der Schiffbrüchigen auf einer einsamen unfruchtbaren Insel, von denen jeder einen Vorrat von verderblichen Feigen besitzt. Weitere Betrachtungen zur Möglichkeit von negativen Zinssätzen sind auf den Seiten 206, 207, 233f, 254f und 339f.
Als ein Beispiel aus unserem täglichen Leben kann die Zahlung einer Sicherungs- oder Aufbewahrungsgebühr für ein wertvolles Gut als ein Anlagegeschäft mit einem negativen Habenzinssatz interpretiert werden. Dies ist z. B. die Garderobegebühr für die Verwahrung eines Mantels im Theater, die Parkplatzgebühr für das Abstellen eines Fahrzeuges, die Schließfachgebühr, usw. Weitere Beispiele für Anlagen mit negativem Zinssatz sind die Inflation, also der Anstieg des Preisniveaus und das damit verbundene Sinken der Kaufkraft des Geldes, die Vermögensteuerabgabe, die betriebswirtschaftliche und steuerrechtliche Abschreibung als Wertverlust bei der betriebswirtschaftlichen Entwicklung des Buchwertes eines Wirtschaftsgutes, das bestandsproportionale Abfallen des Bestands beim kontinuierlichen Zerfall eines radioaktiven Stoffes (wie Uran, Radium, etc.) oder beim Abbau gewisser natürli-

cher Rohstoffe und das sogenannte umlaufgesicherte Geld (rostende Banknote, Reformgeld, Freigeld, Neutralgeld, Schwundgeld, alterndes Geld) nach der Idee des Sozialreformers Silvio Gesell (1862–1930). Einen geschichtlichen Grundriss der NWO-Bewegung Silvio Gesells findet man bei Bartsch (1994). Als Folge der Zinspolitik der Europäischen Zentralbank werden im Oktober 2014 Unternehmen in Deutschland für hohe Einlagen negative Zinsen als Verwahrentgelt („Strafzinsen") berechnet. Im November 2014 berechnet die Direktbank Deutsche Skatbank auch Privatkunden auf Tagesgeldkonten ab einer Einlage von 500 000 Euro einen Minuszins von 0,25 Prozent, wenn die Gesamteinlagen des Kunden drei Millionen Euro überschreiten.

Bei einem **Kredit mit negativem Sollzinssatz** i ist der Zins $Y_j := iC_{j-1}$ zusätzlich zur Überlassung des Kapitals noch vom Kapitalgeber (Kreditgeber, Gläubiger) an den Kapitalnehmer (Kreditnehmer, Schuldner) im Sinne einer kapitalproportionalen Gebühr für die zeitweise Übernahme und Aufbewahrung des Kapitals zu entrichten. Der Zins wird auf dem Kreditkonto gutgeschrieben und trägt damit zur Tilgung bei. Der Zins Y_j stellt hier eine Zuwendung des Kreditgebers an den Kreditnehmer und damit eine Beteiligung des Kreditgebers an der Tilgung (Restschuldminderung) dar. Im Falle $-1 < i < 0$ gewährt der Kreditgeber im Rahmen der Zinsverrechnung (Zinskapitalisierung) zu den Zeitpunkten $j = 1,\ldots,n$ einen teilweisen Schuldnachlass im Sinne einer Kapitalaufbewahrungsgebühr. Im Falle $i \leq -1$ gewährt der Kreditgeber zusätzlich zu dem vollständigen Schuldnachlass noch eine weitere Gutschrift auf das Kreditkonto im Sinne einer Kapitalübernahmegebühr.
Beispiele hierfür können gegeben werden in Form eines zinslosen Kredits mit jährlichem teilweisen und restschuldproportionalen Schuldnachlass, den z. B. ein Vater seinem Sohne zur Existenzgründung geben kann, eines zins- und rückzahlungsfreien Kredits mit jährlichem vollständigen Schuldnachlass und zusätzlichen restschuldproportionalen Zuwendungen, den eine Hilfsorganisation für ein Projekt zur Verfügung stellen kann, einer laufenden Zuwendung als rückzahlungsfreier Kredit mit mehreren negativen Kreditzinsfaktoren wie z.B. einer speziellen Taschengeldzahlung eines Vaters an seine Kinder, einer Kombination von Kredit und Anlage zu einem Gewinnentnahmestrom als Kredit mit negativem Zinsfaktor und des Existenzgründungszuschusses der Agentur für Arbeit in der Bundesrepublik Deutschland als Kredit mit zwei negativen Zinssätzen.

Anmerkung zur alleinigen Verwendung von positiven Kalkulationszinsfaktoren
Insbesondere bei der Verwendung eines nichtpositiven internen Zinsfaktors $q_1 = q_{int}(\mathbf{X})$ könnte man versucht sein, für die Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mittels der Methode des internen Zinssatzes auch einen nichtpositiven Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ zuzulassen. Bei Verwendung eines negativen Kalkulationszinsfaktors q gelangt man aber schon bei der Laufzeit $n = 1$ zu einem Widerspruch zwischen der Beurteilung nach der MIZ und der Beurteilung nach der KWM: Für $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ mit $X_0 < 0$ folgt aus

$$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I},q} \mathbf{O} \text{ bzw. } q < q_1 = -X_1/X_0$$

nämlich

$$E_1(\mathbf{X},q) = X_0 q + X_1 > 0 \text{ bzw. } \mathbf{X} \succ_{\mathrm{E},q} \mathbf{O}$$

und wegen $q < 0$ dann

$$B_1(\mathbf{X},q) = E_1(\mathbf{X},q)/q < 0 \text{ bzw. } \mathbf{X} \prec_{\mathrm{B},q} \mathbf{O},$$

also zwar der Einklang von MIZ und EWM, aber der Widerspruch zwischen MIZ und KWM. Bei Verwendung des Kalkulationszinsfaktors $q = 0$ ist die KWM nicht definiert. Daher werden beim Vergleich der Methode des internen Zinssatzes mit der Kapitalwertmethode nur positive Kalkulationszinsfaktoren betrachtet.

7.4 Weitere Beurteilungsmethoden mittels eines einzelnen internen Zinssatzes

In der Literatur, wie beispielsweise bei Blohm und Lüder (1995), S. 90ff., und Götze (2008), S. 97f., wird für eine sinnvolle Anwendung der MIZ meist nur eine hinrei-

chende Bedingung für die Übereinstimmung der MIZ mit der KWM angegeben, nämlich die Einschränkung auf sogenannte „isoliert durchführbare Investitionen“[18], also auf Investitionen mit einem positiven Verrechnungskontozinsfaktor. Oder es wird wie bei Altrogge (1996), S. 313–317, die ökonomische Interpretationsmöglichkeit des internen Zinsfaktors q_{int} als Zinsfaktor der fiktiven „Verzinsung nichtnegativer Kapitalbindungen“ $\tilde{C}_j = - E_j(\mathbf{X},q_{int})$ gefordert, was ebenfalls auf einen internen Zinsfaktor mit der Eigenschaft eines Verrechnungskontozinsfaktor führt. Diese in der Literatur betrachteten VK-Zahlungsströme mit positivem Verrechnungskontozinsfaktor sind in der Menge der NU-Zahlungsströme von Abschnitt 7.2 enthalten. Ein interner Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ als positiver Verrechnungskontozinsfaktor tritt neben der fiktiven Kontoverrechnung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ auf dem fiktiven Ersatzkonto von Altrogge (1996), S. 313, 317, auch im nachfolgenden Abschnitt 7.6 in dem Spezialfall der ökonomischen Interpretation des internen Zinsfaktors auf, bei dem für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ eine reale Verrechnung auf einem neu angelegten Konto mit dem festen Kontozinsfaktor $q = q_{int}(\mathbf{X})$ möglich ist.
Zum Anwendungsbereich der MIZ ist noch anzumerken, dass neben den VK-Zahlungsströmen mit positivem VK-Zinsfaktor, die ja nach Abschnitt 7.2 spezielle NU-Zahlungsströme sind, auch die VK-Zahlungsströme mit nichtpositivem VK-Zinsfaktor, die nach Abschnitt 7.3 spezielle NF-Zahlungsströme sind, zum Anwendungsbereich gehören.

Inspiriert durch die Situation der I-Beurteilung von speziellen Zahlungsströmen in den Abschnitten 7.1, 7.2 und 7.3 sollen jetzt für eine mögliche Verallgemeinerung der I-Beurteilung mit einem einzigen internen Zinsfaktor noch beispielhaft zwei weitere Varianten von I-Beurteilungen definiert werden, die IB-konsistent sind, bei denen also die I-Beurteilung konsistent zur B-Beurteilung ist. Die Vorgehensweise zur Untersuchung dieser I-Beurteilungen wird nur kurz skizziert, da auch diese nur einen eingeschränkten Anwendungsbereich haben und Spezialfälle der im nachfolgenden Abschnitt 7.5 behandelten universell anwendbaren IB-Beurteilung sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit erfolgt die Darstellung auch nur für die Investitionen $\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}}$, da Analoges für die Finanzierungen $\mathbf{X} \in D_{\text{Fin}}$ gilt.

Grundsätzlich soll für eine I-Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ ($X_0 \neq 0$) ein Vergleich von mindestens einem internen Zinsfaktor $q_1 = q_{int}(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$ mit dem vorgegebenen Kalkulationszinsfaktor $q = q_K > 0$ durchgeführt werden und die I-Beurteilung hinsichtlich schwacher oder echter I-Vorteilhaftigkeit in dem gleichen Sinne wie im Spezialfall der NU-Zahlungsströme erfolgen und dabei mit entgegengesetzten Zinsfaktorungleichungen für Investitionen und Finanzierungen. Beispielsweise wird für eine I-vorteilhafte Investition $\mathbf{X}$ ein interner Zinsfaktor q_1 mit $q_1 > q$ benötigt und für eine I-vorteilhafte Finanzierung ein interner Zinsfaktor $q_1 < q$.

[18] In Abschnitt 7.1.3 erfolgt die Erläuterung der Bezeichnung „isoliert durchführbare Investition“ als eine VK-Investition, also als eine Investition mit einem internen Zinsfaktor q_1, dessen Horner-Schema-Vektor $\mathbf{E}(q_1)$ nichtpositiv ist.

Im Unterschied zur oben in Abschnitt 7.2 behandelten I-Beurteilung der NU-Zahlungsströme ist hier aber im allgemeinen Fall ab der Laufzeit $n \geq 2$ der interne Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ nicht eindeutig festgelegt. Für jeden einzelnen internen Zinsfaktor $q_1 = q_{int}(\mathbf{X})$ von **X** ist hier zwar bei festem Kalkulationszinsfaktor q genau eine der Aussagen $q_1 > q$, $q_1 = q$, $q_1 < q$ gültig, beim Auftreten von verschiedenen internen Zinsfaktoren des Zahlungsstroms **X** mit verschiedener Lagebeziehung zum Kalkulationszinsfaktor q resultieren aber auch verschiedene strenge I-Beurteilungen. Demzufolge ist dann die Trichotomie (Dreiteilung in disjunkte Bereiche) der I-Beurteilung nicht mehr gegeben, wenn bei der strengen I-Beurteilung nur gefordert wird, dass für einen beliebigen internen Zinsfaktor die betreffende Zinsfaktorungleichung gültig ist und dabei mehrere oder sogar alle internen Zinsfaktoren zum Vergleich mit dem Kalkulationszinsfaktor zugelassen werden.
Als Zahlenbeispiel dient hierfür die Investition $\mathbf{X} = (-1,4,-3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ mit der Endwertfunktion

$$E_2(\mathbf{X},q) = -(q-1)(q-3) = -q^2 + 4q - 3$$

und den internen Zinsfaktoren $q_1 = 3$ und $q_2 = 1$. Bei Verwendung des Kalkulationszinsfaktors $q = q_K = 2$ ist $E_2(\mathbf{X},q_K) = 1 > 0$ und somit **X** B-vorteilhaft. Bei Wahl des größeren internen Zinsfaktors $q_1 = 3$ ($> q_K$) für die I-Beurteilung wäre die Investition **X** I-vorteilhaft, bei Wahl des kleineren internen Zinsfaktors $q_2 = 1$ ($< q_K$) wäre **X** I-unvorteilhaft und somit die strenge I-Beurteilung widersprüchlich bei der Auswahl verschiedener interner Zinsfaktoren. Eine widerspruchsfreie Definition und die Trichotomie der I-Beurteilung kann daher nur durch eine engere Definition der echten I-Vorteilhaftigkeit und der echten I-Unvorteilhaftigkeit gesichert werden.

Eine I-Beurteilung ist so zu definieren, dass die strengen I-Beurteilungen und die I-Neutralität nicht gleichzeitig auftreten, also deren Trichotomie gewährleistet ist. Nach Festlegung der trichotomischen Definition der I-Beurteilung ist dann deren Anwendungsbereich zu bestimmen, auf dem die I-Beurteilung IB-konsistent, also konsistent (widerspruchsfrei) zur B-Beurteilung ist. Dazu wird die I-Beurteilung und die B-Beurteilung mittels binärer (zweistelliger) Relationen beschrieben und dann mit den daraus gebildeten Durchschnittsrelationen (Kombinationsrelationen) der Anwendungsbereich der I-Beurteilung bestimmt. Die Definition des Begriffs Relation und weiterer zugehöriger Bezeichnungen findet man beispielsweise bei Gellert et al. (1990), S. 484f., bei Naas und Schmid, Bd. II (1961), S. 486, im Lexikon der Mathematik, Bd. 4 (2002), S. 387f, und im Duden (1985), S.539. Demnach ist eine zweistellige (binäre) Relation R zwischen Elementen $x \in A$ und $y \in B$ eine Teilmenge der Produktmenge $A \times B = \{(x,y) : x \in A,\ y \in B\}$. Hier bei der Beurteilung von Investitionen $\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}}$ erhält man Teilmengen von $D_{\mathrm{Inv}} \times O$, $O = \{\mathbf{O}\}$. Weiter ist dann zu untersuchen, wie für einen Zahlungsstrom **X** die Zugehörigkeit zum Anwendungsbereich ohne unmittelbaren Rückgriff auf die Kapitalwertmethode zu prüfen ist und welcher der internen Zinsfaktoren $q_{int}(\mathbf{X})$ von **X** ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor ist. Es folgen nun zwei Beispiele für einen Verallgemeinerungsversuch zur I-Beurteilung.

Beispiel 7.2 I-Beurteilung mit festem Kalkulationszinsfaktor und maximalem und minimalem internen Zinsfaktor

Werden bei der schwachen I-Vorteilhaftigkeit und schwachen I-Unvorteilhaftigkeit alle internen Zinsfaktoren q_X von **X** zum Vergleich mit dem Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ zugelassen, so erhält man die umfassendste Definition der schwachen I-Beurteilungen und I-Neutralität mit einem einzigen internen Zinsfaktor und die engste Definition der strengen I-Beurteilungen mit allen internen Zinsfaktoren. Beispielhaft wird nachfolgend nur die Definition der schwachen I-Vorteilhaftigkeit, der I-Neutralität und der strengen I-Vorteilhaftigkeit für eine *Investition*

$$\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : X_0 < 0, \exists\, q_1 \in \mathbb{R} \text{ mit } E_n(\mathbf{X},q_1) = \mathbf{A}(q_1)^\mathsf{T}\mathbf{X} = 0\}$$
$$= \bigcup_{q_1 \in \mathbb{R}} H_{\mathbf{A}(q_1),0} \cap H^{<}_{\mathbf{e}_1,0} \qquad (\mathbf{A}(q) = (q^n,\ldots,q,1)^\mathsf{T})$$

mit mindestens einem internen Zinsfaktor angegeben:[19]

$\mathbf{X} \trianglerighteq_{\text{I,Inv},q} \mathbf{O}$ (**X** ist schwach I-vorteilhaft bzw. mindestens so I-vorteilhaft wie der Nullvektor **O** oder die Nulllinie $H_{\mathbf{P}(q),0}$)
$:\Leftrightarrow$ $\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}}$ besitzt einen internen Zinsfaktor q_X mit $q_X \geq q$
$\Leftrightarrow$ $q_{\max}(\mathbf{X}) \geq q$,

$\mathbf{X} \simeq_{\text{I,Inv},q} \mathbf{O}$ (**X** ist I-neutral bzw. genauso I-vorteilhaft wie **O** oder die Nulllinie $H_{\mathbf{P}(q),0}$)
$:\Leftrightarrow$ $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\text{I,Inv},q} \mathbf{O} \wedge \mathbf{X} \trianglelefteq_{\text{I,Inv},q} \mathbf{O}$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}}$ besitzt interne Zinsfaktoren q_X und q_X' mit $q_X' \leq q \leq q_X$
$\Leftrightarrow$ $q_{\min}(\mathbf{X}) \leq q \leq q_{\max}(\mathbf{X})$,

$\mathbf{X} \vartriangleright_{\text{I,Inv},q} \mathbf{O}$ (**X** ist (echt) I-vorteilhaft bzw. I-vorteilhafter als **O** oder die Nulllinie $H_{\mathbf{P}(q),0}$)
$:\Leftrightarrow$ $\mathbf{X} \trianglerighteq_{\text{I,Inv},q} \mathbf{O} \wedge \mathbf{X} \ntrianglelefteq_{\text{I,Inv},q} \mathbf{O}$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}}$ besitzt einen internen Zinsfaktor q_X mit $q_X \geq q$ und keinen mit $q_X' \leq q$
$\Leftrightarrow$ Für alle internen Zinsfaktoren q_X von **X** gilt $q_X > q$
$\Leftrightarrow$ $q_{\min}(\mathbf{X}) > q$.

Der zu den drei Relationen $\vartriangleright_{\text{I,Inv,B},q}$, $\simeq_{\text{I,Inv,B},q}$ und $\vartriangleleft_{\text{I,Inv,B},q}$ der I-Beurteilung gehörige Anwendungsbereich mit Beachtung der Ergebniskonsistenz von MIZ und KWM ergibt sich dann als Teilmenge von $D_{\text{Inv}} \times O$ als die Vereinigung(srelation)

$$\vartriangleright_{\text{I,Inv,B},q} \cup \simeq_{\text{I,Inv,B},q} \cup \vartriangleleft_{\text{I,Inv,B},q}$$

der drei Durchschnittsrelationen (Kombinationsrelationen)

$$\vartriangleright_{\text{I,Inv,B},q} := \vartriangleright_{\text{I,Inv},q} \cap \succ_{\text{B},q},$$
$$\simeq_{\text{I,Inv,B},q} := \simeq_{\text{I,Inv},q} \cap \sim_{\text{B},q},$$
$$\vartriangleleft_{\text{I,Inv,B},q} := \vartriangleleft_{\text{I,Inv},q} \cap \prec_{\text{B},q}.$$

Will man den Anwendungsbereich als Teilmenge $B_{\text{Inv},q}$ von D_{Inv} angeben, so erhält man diesen als die Vereinigung

$$B_{\text{Inv},q} = W_{\vartriangleright_{\text{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) \cup \text{Ntr}_{\simeq_{\text{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) \cup W_{\vartriangleleft_{\text{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O})$$

der zu **O** gehörigen Echtbessermenge

$$W_{\vartriangleright_{\text{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}} : \mathbf{X} \vartriangleright_{\text{I,Inv,B},q} \mathbf{O}\}$$
$$= \{\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}} : q_{\min}(\mathbf{X}) > q,\ B_n(\mathbf{X},q) > 0\}$$
$$= \{\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}} : q_{\min}(\mathbf{X}) > q\} \text{ bei ungeradem } n \text{ bzw.}$$
$$W_{\vartriangleright_{\text{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) = \emptyset \text{ bei geradem } n,$$

Echtschlechtermenge

$$W_{\vartriangleleft_{\text{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}} : \mathbf{X} \vartriangleleft_{\text{I,Inv,B},q} \mathbf{O}\}$$
$$= \{\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}} : q_{\max}(\mathbf{X}) < q,\ B_n(\mathbf{X},q) < 0\}$$
$$= \{\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}} : q_{\max}(\mathbf{X}) < q\}$$

[19] Dabei ist $q_{\min}(\mathbf{X})$ der kleinste und $q_{\max}(\mathbf{X})$ der größte interne Zinsfaktor von **X**.

und Neutralitätsklasse

$$\begin{aligned} \mathrm{Ntr}_{\simeq_{\mathrm{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) &= \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{\min}(\mathbf{X}) \le q \le q_{\max}(\mathbf{X}),\ B_n(\mathbf{X},q) = 0\} \\ &= \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : \exists \text{ interner Zinsfaktor } q_{\mathrm{X}} \text{ von } \mathbf{X} \text{ mit } q_{\mathrm{X}} = q\} \\ &= \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : B_n(\mathbf{X},q) = 0\} \\ &= D_{\mathrm{Inv}} \cap H_{\mathbf{P}(q),0} = H^{<}_{\mathbf{e}_1,0} \cap H_{\mathbf{P}(q),0} =: H_{q,\mathrm{Inv}}. \end{aligned}$$

Analog kann man den Anwendungsbereich $B_{\mathrm{Fin},q}$ dieser I-Beurteilung für die Finanzierungen $\mathbf{X} \in H^{>}_{\mathbf{e}_1,0}$ mit mindestens einem internen Zinsfaktor beschreiben. Insgesamt erhält man den Anwendungsbereich

$$B_{\mathrm{MIZ},q} = B_{\mathrm{Inv},q} \cup B_{\mathrm{Fin},q}.$$

Als Besonderheit dieser strengen I-Beurteilung ist anzumerken, dass bei den Investitionen die Echtbessermenge bei geradem n leer ist: Bei geradem n ist nämlich die Gesamtvielfachheit $(n - 2k)$ der internen Zinsfaktoren von $\mathbf{X}$ ebenfalls gerade (k = Anzahl der Paare konjugiert komplexer Nullstellen). Für eine Investition $\mathbf{X}$ der Echtbessermenge gilt die Zinsfaktorbedingung $q_{\min}(\mathbf{X}) > q$, sodass die spezielle Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ $(q_K = q)$ der internen Zinsfaktoren im Intervall $]q,\infty[$ gleich der Gesamtvielfachheit $n - 2k$ aller internen Zinsfaktoren und somit gerade ist. Demnach müsste für eine Investition $\mathbf{X}$ in dieser Menge gemäß der Kurvendiskussion der Barwert $B_n(\mathbf{X},q) < 0$ sein im Widerspruch zur Barwertbedingung $B_n(\mathbf{X},q) > 0$ der Echtbessermenge. Eine nichtleere Echtbessermenge kann daher nur bei ungeradem n auftreten, da für deren Investitionen $\mathbf{X}$ aus der Zinsfaktorbedingung $q_{\min}(\mathbf{X}) > q$ zunächst $m_{>q_K} = n - 2k$ ungerade und dann auch die Barwertbedingung $B_n(\mathbf{X},q) > 0$ folgt. Letztere kann somit in der Mengenbeschreibung weggelassen werden.
Bei der Echtschlechtermenge der Investitionen dagegen folgt (unabhängig vom n) aus der Zinsfaktorbedingung $q_{\max}(\mathbf{X}) < q$ zunächst $m_{>q_K} = 0$ und dann auch die Barwertbedingung $B_n(\mathbf{X},q) < 0$. Die Echtschlechtermenge der Investitionen kann daher allein durch ihre Zinsfaktorbedingung beschrieben werden.

Analog kann bei den Finanzierungen die Echtbessermenge allein durch die Zinsfaktorbedingung $q_{\max}(\mathbf{X}) < q$ beschrieben werden. Dagegen ist deren Echtschlechtermenge bei geradem n leer und bei ungeradem n allein durch ihre Zinsfaktorbedingung $q_{\min}(\mathbf{X}) > q$ charakterisiert.

△

Beispiel 7.3 I-Beurteilung mit festem Kalkulationszinsfaktor und einer Interner Zinsfaktor-Funktion

Die mittels einer auf D_{Inv} festgelegten Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ definierten I-Beurteilung gehört zu den I-Beurteilungen, die jeweils mittels eines einzigen internen Zinsfaktors erfolgen. Sie wird beispielhaft für die schwache I-Vorteilhaftigkeit, die I-Indifferenz und die strenge I-Vorteilhaftigkeit einer Investition $\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}}$ angegeben.

$$\begin{array}{llll} \mathbf{X} \text{ ist schwach I-vorteilhaft} & :\Leftrightarrow \mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{I,Inv},q} \mathbf{O} & \Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) \ge q_{int}(\mathbf{O}) = q, \\ \mathbf{X} \text{ ist I-indifferent} & :\Leftrightarrow \mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,Inv},q} \mathbf{O} & \Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) = q_{int}(\mathbf{O}) = q, \\ \mathbf{X} \text{ ist (echt) I-vorteilhaft} & :\Leftrightarrow \mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,Inv},q} \mathbf{O} & \Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) > q_{int}(\mathbf{O}) = q, \end{array}$$

Den Anwendungsbereich als Teilmenge $B_{\mathrm{Inv},q,qint}$ von D_{Inv} erhält man als die Vereinigung

$$B_{\mathrm{Inv},q,qint} = W_{\succ_{\mathrm{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) \cup \mathrm{Ind}_{\sim_{\mathrm{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) \cup W_{\prec_{\mathrm{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O})$$

der zu $\mathbf{O}$ gehörigen Echtbessermenge

$$W_{\succ_{\mathrm{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{int}(\mathbf{X}) > q,\ B_n(\mathbf{X},q) > 0\},$$

der Indifferenzklasse

$$\mathrm{Ind}_{\sim_{\mathrm{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{int}(\mathbf{X}) = q,\ (B_n(\mathbf{X},q) = 0)\} \subseteq H_{q,\mathrm{Inv}}$$

und der Echtschlechtermenge

$$W_{\prec_{\mathrm{I,Inv,B},q}}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{int}(\mathbf{X}) < q,\ B_n(\mathbf{X},q) < 0\}.$$

Analog erhält man für diese I-Beurteilung auf D_{Fin} den Anwendungsbereich $B_{\text{Fin},q,qint}$ und insgesamt auf $D_{\text{Inv}} \cup D_{\text{Fin}}$ den Anwendungsbereich

$$B_{\text{MIZ},q,qint} = B_{\text{Inv},q,qint} \cup B_{\text{Fin},q,qint}.$$

Bei Verwendung dieser I-Beurteilung mittels einer Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ sind ab der Laufzeit $n \geq 2$ die folgenden beiden Fragen zu klären. Erstens ist zu entscheiden, wie die Interner Zinsfaktor-Funktion zweckmäßig definiert werden soll. Um einen größtmöglichen Anwendungsbereich zu erhalten, ist die Funktion IB-konsistent festzulegen. Zweitens ist nach der erfolgten Festlegung der Interner Zinsfaktor-Funktion für jeden zu beurteilenden Zahlungsstrom **X** zu prüfen, ob er im Anwendungsbereich liegt, ob also sein Funktionswert $q_{int}(\mathbf{X})$ ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor ist, und wie **X** damit beurteilt wird. △

Die Einschränkung des Anwendungsbereichs in den Beispielen

In den drei Teilbereichen (Echtbessermenge, Neutralitätsklasse, Echtschlechtermenge) des Anwendungsbereichs der I-Beurteilung in den beiden angegebenen Beispielen ist jeweils die B-Beurteilung $B_n(\mathbf{X},q) > (=, <) \ 0$ zu überprüfen. Da diese gleichbedeutend zur IB-Beurteilung des Zahlungsstroms **X** von Abschnitt 7.5 ist, stellt die in den Teilbereichen zusätzlich auftretende Zinsfaktorbedingung für internen Zinsfaktor und Kalkulationszinsfaktor eine Einschränkung des Anwendungsbereichs dar. Nachfolgend werden noch grafische Darstellungen dieser eingeschränkten Anwendungsbereiche für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ angegeben.

Die Einschränkung des Anwendungsbereichs von Beispiel 7.2 auf eine echte Teilmenge $B_{\text{Inv},q}$ von D_{Inv} zeigt sich beispielsweise bei einer speziellen NU-Investition **X**, die neben ihrem einzigen positiven internen Zinsfaktor q_{X} (ungerader Ordnung) auch noch einen nichtpositiven internen Zinsfaktor q_{X}'aufweist. Im Fall $q_{\text{X}} > q$ ist **X** IB-vorteilhaft gemäß der Definition in den Abschnitten 7.5 und 7.2 und damit B-vorteilhaft, aber nicht I-vorteilhaft gemäß der hier im Beispiel gegebenen Definition: Es ist nämlich $q_{\min}(\mathbf{X}) = q_{\text{X}}' \leq 0 < q$, somit $q_{\min}(\mathbf{X}) \not> q$, $\mathbf{X} \not\succ_{\text{I,Inv},q} \mathbf{O}$ und $\mathbf{X} \notin B_{\text{Inv},q}$.

Die Menge der Zahlungsströme außerhalb des Anwendungsbereichs von MIZ: Bei einer irgendwie definierten MIZ mit der Verwendung eines *einzelnen* internen Zinsfaktors können auch die Investitionen ohne (reellen) internen Zinsfaktor mit dem formal hinzugenommenen nichtreellen internen Zinsfaktor $q_{int} := -\infty$ für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor q_K als unvorteilhafte Investitionen mit im Anwendungsbereich erfasst werden ($q_{int} = -\infty < q_K$ und $m_{>q_K} = 0$, $B_n(\mathbf{X},q_K) < 0 \ \forall \ q_K > 0$). Die verbleibenden *nicht* im Anwendungsbereich der MIZ liegenden Investitionen **X** werden dann genau durch die folgenden drei Fälle beschrieben:

1) **X** besitzt q_K als internen Zinsfaktor ($B_n(\mathbf{X},q_K) = 0$) und noch den für die MIZ-Beurteilung (Vergleich von q_{int} mit q_K) ausgewählten internen Zinsfaktor $q_{int} \in \mathbb{R}$ mit $q_{int} \neq q_K$;
2) **X** mit $B_n(\mathbf{X},q_K) \neq 0$ und ungeradem $m_{>q_K}$ ($B_n(\mathbf{X},q_K) > 0$) besitzt den für die MIZ-Beurteilung ausgewählten internen Zinsfaktor $q_{int} \leq q_K$;
3) **X** mit $B_n(\mathbf{X},q_K) \neq 0$ und geradem $m_{>q_K} \geq 2$ ($B_n(\mathbf{X},q_K) < 0$) besitzt den für die MIZ-Beurteilung ausgewählten internen Zinsfaktor $q_{int} \geq q_K$.

Anwendungsbereiche der I-Beurteilungen der beiden Beispiele für die Laufzeiten *n* = 1 und *n* = 2

Für die Laufzeit $n = 1$ stimmen die Anwendungsbereiche $B_{\text{MIZ},q}$ und $B_{\text{MIZ},q,qint}$ der beiden Beispiele überein, da jeder Zahlungsstrom **X** ($X_0 \neq 0$) der Laufzeit $n = 1$ genau einen internen Zinsfaktor besitzt und somit die Interner Zinsfaktor-Funktion nur auf eine Weise festgelegt werden kann. Damit ist auch $q_{\max}(\mathbf{X}) = q_{\min}(\mathbf{X}) = q_{int}(\mathbf{X})$. Dieser in Abbildung 7.5 dargestellte Anwendungsbereich von MIZ hat für die Laufzeit $n = 1$ noch eine einfache Struktur und ist die gesamte Ebene $\mathbb{R}^2$ abzüglich der X_1-Achse ($X_0 = 0$):

$$B_{\text{MIZ},q} = \mathbb{R}^2 \setminus H_{\mathbf{e}_1,0} \, .$$

Für jede Investition bzw. Finanzierung der Laufzeit $n = 1$ ist die I-Beurteilung mittels des einzigen internen Zinsfaktors und des Kalkulationszinsfaktors konsistent zur B-Beurteilung.

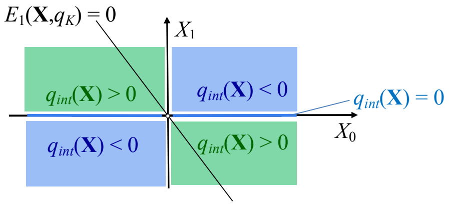


Abb. 7.5 Der Anwendungsbereich $B_{\text{MIZ},q} = B_{\text{MIZ},q,qint}$ von MIZ für die Laufzeit $n = 1$ zur Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ bei Verwendung eines festen Kalkulationszinsfaktors $q_K > 0$ und des internen Zinsfaktors $q_{int}(\mathbf{X})$

Für eine Laufzeit $n \geq 2$ hat der Anwendungsbereich $B_{\text{MIZ},q}$ für die I-Beurteilung eines Zahlungsstroms X mit festem Kalkulationszinsfaktor $q > 0$ keine so einfache und übersichtliche geometrische Struktur mehr wie im Fall $n = 1$. Dies resultiert aus dem Problem der Nullstellenbestimmung für Polynome. Wie schon in Abschnitt 7.1.1 erwähnt wurde, gibt es nämlich nach dem Satz von Abel ab einem Polynomgrad $n \geq 5$ für die Nullstellen eines Polynoms im allgemeinen Fall keine expliziten Lösungsformeln mit Wurzelausdrücken mehr. In der Praxis werden schon ab einem Polynomgrad $n \geq 3$ die Polynomnullstellen mit numerischen Iterationsmethoden bestimmt. Für den Anwendungsbereich ergibt sich aus der Endwert-Ungleichung und den Zinsfaktorungleichungen für die Laufzeiten $n = 2, 3, 4$ noch eine analytische Beschreibung mittels nichtlinearer Ungleichungen mit Wurzelausdrücken, die aber schon für $n = 2$ eine ziemlich komplizierte geometrische Struktur darstellt. Demzufolge ist ab $n \geq 2$ allein mittels der geometrischen Struktur des Anwendungsbereichs im Allgemeinen nicht mehr einfach entscheidbar, ob ein Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ in diesem Anwendungsbereich $B_{\text{MIZ},q}$ liegt.
Auch beim Anwendungsbereich $B_{\text{MIZ},q,qint}$ kann für eine Laufzeit $n \geq 2$ mittels der geometrischen Struktur des Anwendungsbereichs im Allgemeinen nicht entschieden werden, ob ein Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ in diesem Anwendungsbereich liegt. Zur Veranschaulichung dieser Problematik werden für die Laufzeit $n = 2$ die Anwendungsbereiche $B_{\text{Inv},q}$ und $B_{\text{Inv},q,qint}$ in Abbildung 7.6 geometrisch dargestellt. Die Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ wird dabei auf $q_{\max}(\mathbf{X})$ festgelegt. Die analytische Beschreibung der Teilbereiche der beiden Anwendungsbereiche kann mittels Ungleichungen erfolgen, in denen neben den linearen Funktionen $h_1(X_2,X_0) = - X_2/q_K - X_0 q_K$, $h_2(X_2,X_0) = - 2X_0 q_K$ auch der Wurzelausdruck $w(X_2,X_0) = 2\sqrt{X_0 X_2}$ auftritt. Sie wird hier aber weggelassen.

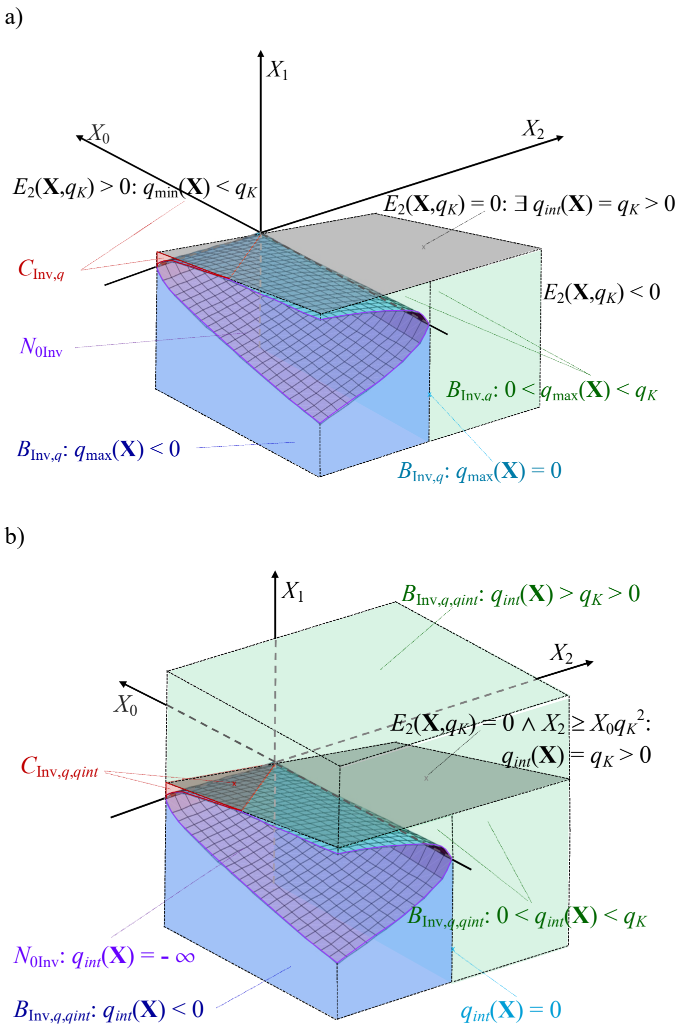


Abb. 7.6 Die Anwendungsbereiche $B_{\mathrm{Inv},q}$ und $B_{\mathrm{Inv},q,qint}$ von MIZ für die Laufzeit $n = 2$ unter Verwendung eines festen positiven Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$, aller internen Zinsfaktoren bzw. eines ausgewählten internen Zinsfaktors $q_{int}(\mathbf{X})$ für Beurteilung einer Investition $\mathbf{X}$ und die Komplemente $C_{\mathrm{Inv},q}$ bzw. $C_{\mathrm{Inv},q,qint}$ der Anwendungsbereiche

7.5 Universelle IB-Beurteilung eines beliebigen Zahlungsstroms

In den Abschnitten 7.1 und 7.2 wurden mit den regulären und NU-Zahlungsströmen spezielle Zahlungsströme mit der Methode des internen Zinssatzes beurteilt, die nur einen einzigen positiven internen Zinsfaktor besitzen. Bei einem regulären Zahlungsstrom ist beispielsweise schon am Vorzeichenwechsel der Zahlungsfolge zu erkennen, dass ein derartiger Zahlungsstrom vorliegt und somit nur ein einziger positiver interner Zinsfaktor vorliegt. Da dieser auch die einzige Vorzeichenwechselstelle der zugehörigen Endwertfunktion auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ ist, kann aus der Lage dieses internen Zinsfaktors zum Kalkulationszinsfaktor die IB-konsistente I-Beurteilung des Zahlungsstroms ermittelt werden. Unter einer IB-konsistenten Beurteilung wird hier verstanden, dass die Beurteilungsergebnisse der mittels eines internen Zinsfaktors bzw. mehrerer interner Zinsfaktoren erfolgten I-Beurteilung und der mittels des Barwerts (Kapitalwerts) durchgeführten B-Beurteilung konsistent (widerspruchsfrei, übereinstimmend) sind.

Es sei ausdrücklich angemerkt, dass ein **Anwendungsbereich** einer auf irgendeine spezielle Weise definierten Variante der MIZ hier nur unter dem Gesichtspunkt der Ergebniskonsistenz (IB-Konsistenz, IE-Konsistenz) der Beurteilungen mittels MIZ und KWM (bzw. BWM oder EWM) bestimmt wird und nicht hinsichtlich der ökonomischen Interpretierbarkeit der Methode oder sogar des internen Zinssatzes selbst. Getrennt davon erfolgt im späteren Abschnitt 7.6 die Untersuchung, unter welchen zusätzlichen Prämissen an den Kapitalmarkt auch eine ökonomische Interpretation der Methode MIZ möglich ist, d. h. wann für einen I-vorteilhaften Zahlungsstrom nach der Glattstellung mittels eines geeigneten Kapitalmarktgeschäfts tatsächlich der Kapitalwert oder allgemeiner der m-te Zeitwert als Margenzahlung entnommen werden kann. Außerdem wird in Abschnitt 7.7 noch untersucht, unter welchen Prämissen der interne Zinsfaktor selbst ökonomisch als Zinsfaktor einer realen Verzinsung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ interpretiert werden kann.

Im Gegensatz zu einem unmittelbar als solchen erkennbaren regulären Zahlungsstrom muss bei einem allgemeineren NU-Zahlungsstrom erst überprüft werden, ob ein derartiger Zahlungsstrom vorliegt. Es sind dazu alle positiven internen Zinsfaktoren zu bestimmen. Falls tatsächlich nur ein einziger positiver vorliegt, muss dieser noch eine ungerade Nullstellenordnung aufweisen und somit auch eine Vorzeichenwechselstelle der Endwertfunktion sein. Erst dann liegt ein NU-Zahlungsstrom vor und kann aus der Lage dieses internen Zinsfaktors zum Kalkulationszinsfaktor die Beurteilung des Zahlungsstrom bestimmt werden. Bei der Verallgemeinerung der I-Beurteilung vom regulären Zahlungsstrom zum NU-Zahlungsstrom muss also schon die Vielfachheit der positiven Nullstellen der Endwertfunktion des Zahlungsstroms mitberücksichtigt werden. Auf diesem Wege soll nun eine weitere Verallgemeinerung der Methode des internen Zinssatzes auf beliebige Zahlungsströme des $\mathbb{R}^{n+1}$ erfolgen.

Falls nun mehrere positive interne Zinsfaktoren des zu beurteilenden Zahlungsstroms existieren, so können bei den im vorigen Abschnitt 7.4 beispielhaft angegebenen speziellen I-Beurteilungsmethoden verschiedene Probleme auftreten, die in Abschnitt 7.8 bei der Kritik dieser Methode auch noch in Zahlenbeispielen aufgezeigt werden. Um diese Probleme zu vermeiden, ist bei diesen speziellen I-Beurteilungsmethoden nämlich zuerst exakt eine trichotomische I-Beurteilung zu definieren, dann dazu der Anwendungsbereich zu bestimmen, auf dem die I-Beurteilung konsistent zur B-Beurteilung (Beurteilung nach der Barwert- oder Endwert-Me-

thode) ist, für einen zu beurteilenden Zahlungsstrom die Zugehörigkeit zum Anwendungsbereich zu prüfen und eventuell noch ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor zu bestimmen.
In Verallgemeinerung auch dieser speziellen I-Beurteilungsmethoden und mit Vermeidung der dabei auftretenden Probleme oder Einschränkungen des Anwendungsbereichs gelingt es nun auch für einen beliebigen Zahlungsstrom mit mehreren positiven internen Zinsfaktoren eine IB-konsistente I-Beurteilung anzugeben. Dazu ist aber der Blick von einem einzelnen internen Zinsfaktor weg auf die Gesamtheit der internen Zinsfaktoren zu richten. Es soll nun der größtmögliche Anwendungsbereich einer I-Beurteilung bestimmt werden, auf dem mittels der internen Zinsfaktoren q_{X} des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ das Vorzeichen des Endwerts $E_n(\mathbf{X},q_K)$ des Zahlungsstroms zum Kalkulationszinsfaktor $q_K > 0$ und somit seine E- bzw. B-Beurteilung bestimmt werden kann. Die dabei angegebene Charakterisierung der B-Beurteilung mittels der internen Zinsfaktoren kann dann auch als eine IB-konsistente I-Beurteilung angesehen werden. Sie wird hier als die **IB-Beurteilung** oder als die **Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren** (Abk.: MVIZ) bezeichnet.

Die IB-Beurteilung als die Charakterisierung der B-Beurteilung mittels der internen Zinsfaktoren

Als Erstes wird nun untersucht, wie aus der Lage der internen Zinsfaktoren q_{X} der Investition $\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}}$[20] das Vorzeichen des Endwerts $E_n(\mathbf{X},q_K)$ und damit die E- bzw. B-Beurteilung von $\mathbf{X}$ ermittelt werden kann. Dass der Funktionswert $E_n(\mathbf{X},q_K)$ selbst nicht aus den reellen Nullstellen q_{X} der Funktion $E_n(\mathbf{X},r)$ ermittelt werden kann, ergibt sich daraus, dass jedes Vielfache $\lambda \cdot E_n(\mathbf{X},r) = E_n(\lambda \cdot \mathbf{X},r)$ ($\lambda \neq 0$) dieser Funktion dieselben Nullstellen besitzt, aber im Fall $E_n(\mathbf{X},q_K) \neq 0$ für verschiedene $\lambda \neq 0$ auch verschiedene Endwerte $\lambda \cdot E_n(\mathbf{X},q_K)$ an der Stelle $q = q_K$.

Anmerkung zum eingeschränkten Anwendungsbereich des I-Vergleichs mittels der internen Zinsfaktoren beider Zahlungsströme
Hinsichtlich des Vergleichs von zwei Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ mit der Eigenschaft $E_n(\mathbf{X},q_K)$, $E_n(\mathbf{Y},q_K) \neq 0$ soll hier schon einmal angemerkt werden, dass auch das Vorzeichen von deren Endwertdifferenz

$$E_n(\mathbf{X},q_K) - E_n(\mathbf{Y},q_K) = E_n(\mathbf{D},q_K)$$

im Allgemeinen nicht durch die Gesamtheit der reellen Nullstellen q_{X} und q_{Y} der Funktionen $E_n(\mathbf{X},r)$ und $E_n(\mathbf{Y},r)$ bestimmt werden kann: Zunächst ist festzustellen, dass die Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{X}' = \lambda\mathbf{X}$ für jedes $\lambda \neq 0$ dieselben internen Zinsfaktoren besitzen. Ein beliebig mit den internen Zinsfaktoren q_{X} und q_{Y} von $\mathbf{X}'$ und $\mathbf{Y}$ definierter I-Vergleich würde also für jedes $\lambda \neq 0$ dasselbe Ergebnis liefern. Im Gegensatz dazu können aber bei der Endwertdifferenz

$$E_n(\lambda\mathbf{X},q_K) - E_n(\mathbf{Y},q_K) = E_n(\mathbf{X},q_K)[\lambda - E_n(\mathbf{Y},q_K)/E_n(\mathbf{X},q_K)]$$

der Zahlungsströme $\mathbf{X}' = \lambda\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ durch passende Wahl von λ verschiedene Vorzeichen und somit verschiedene Ergebnisse des E-Vergleichs (Endwert-Vergleichs) erreicht werden. Man wählt dazu $\lambda > E_n(\mathbf{Y},q_K)/E_n(\mathbf{X},q_K) =: \varepsilon$, $\lambda = \varepsilon$ oder $\lambda < \varepsilon$. Für jeden beliebig definierten I-Vergleich nach der Methode (IV) von Abschnitt 7.9, bei dem interne Zinsfaktoren q_{X} und q_{Y} von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ verglichen werden, gibt es also stets Zahlungsstrompaare, für die der I-Vergleich nicht konsistent zum E-Vergleich ist. Der Anwendungsbereich (Konsistenzbereich zur Endwertmethode) eines jeden IV-Vergleichs ist also auf eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ eingeschränkt. Wie eben begründet wurde, findet man sogar zu jedem Zah-

[20] D_{Inv} bzw. D_{Fin} ist die Menge der Investitionen $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 < 0$) bzw. Finanzierungen $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 > 0$), die mindestens einen internen Zinsfaktor besitzen.

lungsstrompaar (**X**,**Y**) mit **X**, **Y** $\notin H_{\mathbf{P}(q_K),0}$ auch Zahlungsströme **X**‘ $\in$ lin **X**, **Y**‘ $\in$ lin **Y**, deren I-Vergleich nicht konsistent zum E-Vergleich ist. Dass es aber nichtsdestotrotz auch Klassen von Zahlungsstrompaaren mit einem konsistenten IV-Vergleich gibt, wird mit den Beispielen 7.7, 7.9 und 7.10 in Abschnitt 7.9.2 gezeigt.
Bei allen in Abschnitt 7.12 erwähnten Varianten des I-Vergleichs ist bei der Überprüfung der Zugehörigkeit des Zahlungsstrompaars (**X**,**Y**) zum Anwendungsbereich das Vorzeichen von $E_n(\mathbf{D},q_K)$ zu bestimmen. Dieses kann also nach obiger Überlegung im Allgemeinen nicht durch die Gesamtheit der Nullstellen q_X und q_Y ermittelt werden. Nachfolgend wird jedoch gezeigt, wie das Vorzeichen von $E_n(\mathbf{D},q_K)$ aus den Nullstellen q_D der Funktion $E_n(\mathbf{D},r)$ bestimmt werden kann. Auf dieser Tatsache beruht auch, dass die in Abschnitt 7.9.1 behandelte Vergleichsmethode (ID) mit den internen Zinsfaktoren q_D von **D** den allgemeinsten I-Vergleich beschreibt und gegenüber der Methode (IV) mit den internen Zinsfaktoren q_X und q_Y von **X** bzw. **Y** und ihrem eingeschränkten Anwendungsbereich vorzuziehen ist.

Genau dann, wenn $q_X = q_K$ ein interner Zinsfaktor von **X** ist, liegt der
Fall i) $\qquad E_n(\mathbf{X},q_K) = 0$
vor. Da für die Endwertfunktion der Investition **X** ($X_0 < 0$, $E_n(\mathbf{X},r) \to -\infty$ bei $r \to \infty$) die Vorzeichenverteilung

$$E_n(\mathbf{X},r) < 0 \text{ für } r > q_{\max}(\mathbf{X})$$

vorliegt ($q_{\max}$ ist der größte interne Zinsfaktor von **X**), tritt unter der Voraussetzung $E_n(\mathbf{X},q_K) \neq 0$ der
Fall ii) $\qquad E_n(\mathbf{X},q_K) > 0$
genau dann ein, wenn für die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},r)$ im Intervall $]q_K,\infty[$ die Anzahl $w_{>q_K}$ (≥ 0) der Vorzeichenwechselstellen (Nullstellen ungerader Ordnung) ungerade ist und damit auch die als Summe der Vielfachheiten definierte Gesamtvielfachheit (Gesamtordnung)

$$m_{>q_K} = m_{>q_K}(\mathbf{X}) \;\; (\geq 0)$$

der Nullstellen q_j im Intervall $]q_K,\infty[$ ungerade ist ($m_{>q_K}$ = Summe einer ungeraden Anzahl von ungeraden Ordnungen + Summe einer gewissen Anzahl von geraden Ordnungen).[21] Diese Gesamtvielfachheit der internen Zinsfaktoren, die auf der Zahlengeraden rechts von q_K liegen, wird hier auch kurz als die zu q_K gehörige **rechtsseitige Gesamtvielfachheit** bezeichnet.
Analog liegt unter der Voraussetzung $E_n(\mathbf{X},q_K) \neq 0$ der
Fall iii) $\qquad E_n(\mathbf{X},q_K) < 0$
genau dann vor, wenn die Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der Nullstellen im Intervall $]q_K,\infty[$ gerade und damit auch die Anzahl der Vorzeichenwechsel $w_{>q_K}$ in diesem Intervall gerade ist. Diese Aussagen der IB-Beurteilung als Charakterisierung der B-Beurteilung lassen sich auch mit der nach dem Gauß-d’Alembertschen Fundamentalsatz der Algebra für das Polynom $E_n(\mathbf{X},r)$ existierenden Produktdarstellung mit Linearfaktoren begründen. Damit erhält man eine Charakterisierung der E- bzw. B-Beurteilung der Investition $\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}}$ mittels der zum Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$

[21] Ein ausführlicherer Beweis mit der Produktdarstellung von $E_n(\mathbf{X},q)$ wird auf der Autoren-Website www.pleier-r.de beim Thema ‚Charakterisierung der Endwertmethode mittels der internen Zinsfaktoren‘ gegeben.

gehörigen rechtsseitigen Gesamtvielfachheit der internen Zinsfaktoren:

i) $\mathbf{X} \sim_{B,q} \mathbf{O} \Leftrightarrow q = q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X}$;

ii) $\mathbf{X} \succ_{B,q} \mathbf{O} \Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ ungerade;

iii) $\mathbf{X} \prec_{B,q} \mathbf{O} \Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ gerade.

In der nachfolgenden Abbildung 7.7 sind die beiden Fälle einer ungeraden und einer geraden Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ mit dem Graphen der Barwertfunktion dargestellt.

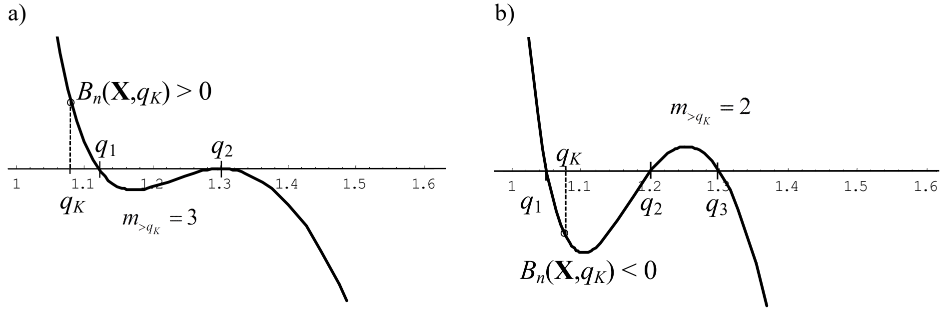


Abb. 7.7 Der Graph der Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X},q)$ einer a) vorteilhaften Investition $\mathbf{X}$ mit ungerader rechtsseitiger Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ und b) unvorteilhaften Investition $\mathbf{X}$ mit gerader rechtsseitiger Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$

Die Ausdehnung dieser Charakterisierung auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ wird unten noch bei der Behandlung des Anwendungsbereichs der IB-Beurteilung durchgeführt. Damit ist das bisher in der Literatur verbliebene Mysterium einer I-Beurteilung mittels interner Zinsfaktoren des Zahlungsstroms aufgeklärt. Die Problematik bestand bisher darin, dass die Methode des internen Zinssatzes im Gegensatz zu den anderen klassischen Methoden nur auf einer eingeschränkten Menge von Zahlungsströmen anwendbar war. In Abhängigkeit von der speziellen Definition der I-Beurteilung war erst der Anwendungsbereich zu bestimmen, in dem die I-Beurteilung ergebniskonsistent zur Kapitalwertmethode ist. Für einen zu beurteilenden Zahlungsstrom musste zuerst geprüft werden, ob er im Anwendungsbereich der Methode liegt. Weiter musste dann die Auswahl eines IB-konsistenten internen Zinsfaktors geklärt werden, mit dem die I-Beurteilung durchgeführt wird. Diese Probleme können nun dadurch gelöst werden, dass der traditionell auf einen einzelnen internen Zinsfaktor ausgerichtete Blick jetzt auf die Gesamtheit der Zinsfaktoren im Intervall $]q_K,\infty[$ gerichtet wird. Mit der Verallgemeinerung der Methode des internen Zinssatzes auf die IB-Beurteilung ist die I-Beurteilung wie die anderen klassischen Methoden nun auch IB-konsistent in ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ anwendbar. Die Auswahl eines IB-konsistenten internen Zinsfaktors, die nachfolgend noch behandelt wird, ist für die IB-Beurteilung aber gar nicht nötig. Die ökonomische Interpretation der IB-Beurteilung und eines IB-konsistenten internen Zinsfaktors q_X selbst wird in den Abschnitten 7.6 und 7.7 behandelt.

Existenz eines IB-konsistenten internen Zinsfaktors

Nach der Charakterisierung der B-Beurteilung durch interne Zinsfaktoren wird jetzt als Zweites untersucht, unter welchen Bedingungen für $\mathbf{X} \in D_{\text{Inv}}$ ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor existiert. Durch die Bestimmung der B-Beurteilung

i) $\operatorname{sgn} E_n(\mathbf{X},q_K) = 0 \vee$

ii) $\operatorname{sgn} E_n(\mathbf{X},q_K) > 0 \vee$

iii) $\operatorname{sgn} E_n(\mathbf{X},q_K) < 0$

mittels der Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren in $]q_K,\infty[$ ist auch die Lage von IB-konsistenten internen Zinsfaktoren q_X festgelegt:

$$q_X = q_K \text{ im Fall i)}, \ q_X > q_K \text{ im Fall ii)}, \ q_X < q_K \text{ im Fall iii)}.$$

Es ist also die Existenz eines IB-konsistenten internen Zinsfaktors in den drei Fällen i), ii) und iii) zu untersuchen.

Im Fall i) ist der Kalkulationszinsfaktor $q_X = q_K$ ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor.

Im Fall ii) ist $m_{>q_K}$ ungerade, also $m_{>q_K} \geq 1$, sodass ein IB-konsistenter q_X rechts von q_K existiert.

Im Fall iii) ($m_{>q_K}$ gerade) kann ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor nur links von q_K liegen. Da in diesem Fall q_K keine Nullstelle von $E_n(\mathbf{X},r)$ ist, ergibt sich zunächst für die Gesamtvielfachheit $m_{<q_K}$ der Nullstellen von $E_n(\mathbf{X},r)$ links von q_K der Ausdruck

$$m_{<q_K} = n - 2k - m_{>q_K},$$

wobei $k = k(\mathbf{X})$ (≥ 0) die Anzahl der Paare konjugiert komplexer Nullstellen des reellen Polynoms $E_n(\mathbf{X},r)$, $n - 2k$ die Gesamtvielfachheit aller reellen Nullstellen (interner Zinsfaktoren) und $m_{>q_K}$ die Gesamtvielfachheit der Nullstellen von $E_n(\mathbf{X},r)$ rechts von q_K ist. Hinsichtlich der Existenz eines IB-konsistenten internen Zinsfaktors ist eine Fallunterscheidung nötig:

α) Falls die Laufzeit n ungerade ist, ist im vorliegenden Fall iii) wegen geradem $m_{>q_K}$ auch $m_{<q_K}$ ungerade (≥ 1), sodass ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor q_X links von q_K existiert.

β) Falls n gerade ist, ist wegen geradem $m_{>q_K}$ auch $m_{<q_K}$ gerade, sodass $m_{<q_K} = 0$ auftreten kann und dann kein IB-konsistenter interner Zinsfaktor q_X links von q_K gewählt werden kann. Falls $m_{<q_K} \geq 2$ ist, kann ein IB-konsistenter Funktionswert q_X links von q_K gewählt werden. Im Sonderfall $m_{<q_K} = 0$ ($m_{>q_K} = n - 2k$ gerade), in dem alle internen Zinsfaktoren rechts von q_K liegen und deren Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ gerade ist, gibt es keinen (reellen) IB-konsistenten internen Zinsfaktor $q_X < q_K$. Es kann dann aber formal der nichtreelle interne Zinsfaktor $q_X = -\infty$ ($< q_K$) als IB-konsistenter interner Zinsfaktor verwendet werden.

Beispielsweise gilt dies für die Investition $\mathbf{X} = (-1,+4,-4)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$ mit der Endwertfunktion

$$E_2(\mathbf{X},r) = -r^2 + 4r - 4 = -(r-2)^2$$

und dem einzigen internen Zinsfaktor $q_X = 2$, wenn der Kalkulationszinsfaktor $q_K = 1$ gewählt wird. Es ist nämlich $E_2(\mathbf{X},r) < 0$ für alle $r \neq 2$ und insbesondere für $r = q_K$, sodass **X** B-unvorteilhaft ist. Weiter ist $k(\mathbf{X}) = 0$, $n - k(\mathbf{X}) = n = 2$ gerade, $m_{>q_K} = 2$, $m_{<q_K} = 0$ und es existiert kein interner Zinsfaktor $q_X < q_K$, also kein IB-konsistenter interner Zinsfaktor. Mit dem formalen nichtreellen internen Zinsfaktor $q_X = -\infty$ gilt die Ungleichung $q_X < q_K$, sodass **X** auch als I-unvorteilhaft und $q_X = -\infty$ als IB-konsistenter interner Zinsfaktor angesehen werden kann. △

Wenn zusätzlich im Sonderfall [n gerade $\wedge$ q_K kein interner Zinsfaktor $\wedge$ $m_{<q_K} = 0$] der nichtreelle interne Zinsfaktor $q_X = -\infty$ für die I-Beurteilung verwendet wird, so besitzt dann jede Investition **X** der gesamten Menge D_{Inv} einen IB-konsistenten internen Zinsfaktor $q_X \in [-\infty,\infty[$. Die damit auf ganz D_{Inv} mit einem der IB-konsistenten internen Zinsfaktoren q_X ($\geq -\infty$) und dem Kalkulationszinsfaktor q_K mögliche I-Beurteilung ($q_X = q_K \vee q_X > q_K \vee q_X < q_K$) ist definitionsgemäß konsistent zur B-Beurteilung. Sie wird hier als universelle IB-Beurteilung bezeichnet und unter Verwendung der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren im abgeschlossenen Intervall $[q_K,\infty[$ beschrieben. Tatsächlich wird aber zu dieser Charakterisierung der B-Beurteilung nur die Information benötigt, ob einer der internen Zinsfaktoren mit dem Kalkulationszinsfaktor q_K übereinstimmt oder ob die Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren im offenen Intervall $]q_K,\infty[$ ungerade bzw. gerade ist. Eine Auswahl eines der IB-konsistenten internen Zinsfaktoren ist dabei gar nicht mehr notwendig.

Anwendungsbereich der IB-Beurteilung

Eine analoge Definition der IB-Beurteilung wird auch noch für die Finanzierungen $\mathbf{X} \in D_{\text{Fin}}$ angegeben, wobei bei den ohne die Indizes Inv und Fin geschriebenen Relationen stets zu beachten ist, ob eine Investition oder eine Finanzierung vorliegt. Die Definition der IB-Beurteilung einer Finanzierung **X** ergibt sich auch aus der IB-Beurteilung der Investition $\mathbf{Z} := -\mathbf{X}$, die eine zu **X** entgegengesetzte B-Beurteilung und die gleichen internen Zinsfaktoren wie **X** aufweist. Die IB-Beurteilung ist damit zunächst für alle Zahlungsströme **X** in der gesamten Menge

$$D_{\text{Inv}} \cup D_{\text{Fin}}$$

der Investitionen und Finanzierungen mit mindestens einem internen Zinsfaktor definiert. Damit umfasst der Anwendungsbereich der IB-Beurteilung auch die Anwendungsbereiche $B_{\text{MIZ},q}$ und $B_{\text{MIZ},q,qint}$ der oben in den Beispielen 7.2 und 7.3 von Abschnitt 7.4 betrachteten speziellen I-Beurteilungen. Nimmt man noch die in Abschnitt 7.3 behandelte Menge

$$(H^{<}_{\mathbf{e}_1,0} \setminus D_{\text{Inv}}) \cup (H^{>}_{\mathbf{e}_1,0} \setminus D_{\text{Fin}})$$

der NF_0-Zahlungsströme **X** (ohne reellen internen Zinsfaktor) mit dem nichtreellen IB-konsistenten internen Zinsfaktor $q_X = -\infty$ zum Anwendungsbereich der IB-Beurteilung hinzu, so erhält man als Anwendungsbereich einer I-Beurteilung schon die gesamte Menge

$$H^{<}_{\mathbf{e}_1,0} \cup H^{>}_{\mathbf{e}_1,0}$$

aller Investitionen und Finanzierungen. Wenn man noch die Investitionen und Finanzierungen allgemeiner als **lexikonegative bzw. lexikopositive Zahlungsströme** definiert, so steht die IB-Beurteilung für alle Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{O}\}$ zur Verfügung.

Für den Nullvektor $\mathbf{X} = \mathbf{O}$ schließlich ist die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{O},r)$ konstant und identisch Null, sodass jede reelle Zahl q_1 ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{O}$ ist. Da nun auch der Kalkulationszinsfaktor q_K ein interner Zinsfaktor q_{O} von $\mathbf{O}$ ist und der mit q_K gebildete Barwert $B_n(\mathbf{O},q_K)$ von $\mathbf{O}$ den Wert Null hat, kann auch für den Nullvektor $\mathbf{O}$ die IB-Beurteilung IB-konsistent auf ‚indifferent' festgelegt werden.
Damit ist dann die IB-Beurteilung wie die B-Beurteilung universell auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert und äquivalent zur B-Beurteilung und den anderen klassischen Beurteilungsmethoden (Endwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode) mit einem konstantem Kalkulationszinsfaktor. Sie kann daher auch als **universelle IB-Beurteilung** oder universelle IB-konsistente I-Beurteilung bezeichnet werden. Aufgrund der Ergebniskonsistenz von IB-Beurteilung und B-Beurteilung ist die IB-Beurteilung die allgemeinste Variante der I-Beurteilung und die Verallgemeinerung aller anderen spezieller definierten I-Beurteilungen mit einem eingeschränkten Anwendungsbereich.

Sieht man einmal von Rechenaufwand ab, so steht mit dieser universell anwendbaren IB-Beurteilung nun eine I-Beurteilung gleichberechtigt neben den anderen klassischen Beurteilungsmethoden. Darüber hinaus kommt in Abschnitt 7.13 die IB-Beurteilung beim I-Vergleich auch universell mit der Methode (ID), d. h. mit der Beurteilung des Differenzzahlungsstroms, zum Einsatz. Dieser I-Vergleich kann wie der B-Vergleich (Barwertvergleich) für beliebige Zahlungsströme $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ durchgeführt werden und ist nicht auf Paare von Investitionen bzw. Finanzierungen oder Paare mit gleicher Beurteilung der einzelnen Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ beschränkt. Er ist die Verallgemeinerung jedes anderen IB-konsistenten I-Vergleichs.

Definition der IB-Beurteilung einer Investition $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$:
Es sei $k = k(\mathbf{X})$ die Anzahl der Paare der konjugiert komplexen Nullstellen der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},r)$, also $n - 2k$ die Gesamtvielfachheit der internen Zinsfaktoren der Investition $\mathbf{X}$.

$\mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$ (**X** ist IB-indifferent)
:⇔ $q = q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X}$.
Nur $q_{\mathrm{X}} = q_K$ ist ein konsistenter interner Zinsfaktor.

$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$ (**X** ist (echt) IB-vorteilhaft)
:⇔ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ ungerade.
Jeder interne Zinsfaktor q_{X} von $\mathbf{X}$ mit $q_{\mathrm{X}} > q_K$ ist ein konsistenter interner Zinsfaktor.

$\mathbf{X} \prec_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$ (**X** ist (echt) IB-unvorteilhaft)
:⇔ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ gerade.
Es werden zwei Fälle unterschieden:
a) $m_{>q_K} < n - 2k$, also $m_{<q_K} = n - 2k - m_{>q_K} > 0$: Jeder in-

terne Zinsfaktor q_X von **X** mit $q_X < q_K$ ist ein konsistenter interner Zinsfaktor.

b) $m_{>q_K} = n - 2k$, also n gerade und $m_{<q_K} = n - 2k - m_{>q_K} = 0$: Nur der nichtreelle interne Zinsfaktor $q_X = -\infty$ $(< q_K)$ von **X** ist ein konsistenter interner Zinsfaktor.

Definition der IB-Beurteilung einer Finanzierung X $\in \mathbb{R}^{n+1}$:
Es sei $k = k(\mathbf{X})$ die Anzahl der Paare der konjugiert komplexen Nullstellen der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},r)$, also $n - 2k$ die Gesamtvielfachheit der internen Zinsfaktoren der Finanzierung **X**.

$\mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$ (**X** ist IB-indifferent)
:⇔ $q = q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von **X**.
Nur $q_X = q_K$ ist ein konsistenter interner Zinsfaktor;

$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$ (**X** ist (echt) IB-vorteilhaft)
:⇔ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ gerade.

Es werden zwei Fälle unterschieden:

a) $m_{>q_K} < n - 2k$, also $m_{<q_K} = n - 2k - m_{>q_K} > 0$: Jeder interne Zinsfaktor q_X von **X** mit $q_X < q_K$ ist ein konsistenter interner Zinsfaktor.

b) $m_{>q_K} = n - 2k$, also n gerade und $m_{<q_K} = n - 2k - m_{>q_K} = 0$: Nur der nichtreelle interne Zinsfaktor $q_X = -\infty$ $(< q_K)$ von **X** ist ein konsistenter interner Zinsfaktor.

$\mathbf{X} \prec_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$ (**X** ist (echt) IB-unvorteilhaft)
:⇔ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ ungerade.
Jeder interne Zinsfaktor q_X von **X** mit $q_X > q_K$ ist ein konsistenter interner Zinsfaktor.

Da die IB-Beurteilung eine Charakterisierung der B- bzw. E-Beurteilung ist, stimmen die angegebenen IB-Relationen $\sim_{\mathrm{I,B},q}$, $\succ_{\mathrm{I,B},q}$ und $\prec_{\mathrm{I,B},q}$ mit den entsprechenden Endwert-Relationen $\sim_{\mathrm{E},q}$, $\succ_{\mathrm{E},q}$ und $\prec_{\mathrm{E},q}$ überein.

Der hier für die I-Beurteilung verwendbare IB-konsistente interne Zinsfaktor q_X kann dabei ein beliebiger interner Zinsfaktor unter den IB-konsistenten sein. Dies verdeutlicht auch die untergeordnete Rolle des für die I-Beurteilung ausgewählten internen Zinsfaktors q_X gegenüber dem für die B-Beurteilung zu bestimmenden Vorzeichen sgn $E_n(\mathbf{X},q_K)$ des Endwerts an der Stelle q_K. Von Bedeutung ist in den Fällen ii) und iii) nicht der Wert eines einzelnen konsistenten internen Zinsfaktors q_X, sondern nur die Gesamtvielfachheit aller konsistenten internen Zinsfaktoren im offenen Intervall $]q_K,\infty[$ bzw. $]-\infty,q_K[$. Die IB-Beurteilung ist daher im allgemeinen Fall nicht eine „Methode *des* internen Zinssatzes“, sondern genauer die „**Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren**“ (Abk.: MVIZ).

Ein ausgewählter konsistenter interner Zinsfaktor q_X kann dabei auch eine Nullstelle von gerader Vielfachheit sein. Insbesondere wird hier also nicht benötigt und genügt es auch nicht, dass der zur I-Beurteilung der Investition **X** verwendete interne Zinsfaktor q_X eine einfache Nullstelle mit negativer Ableitung $E_n'(\mathbf{X},q_X)$ der Endwertfunktion und somit ein sogenannter relevanter interner Zinsfaktor ist. Für diesen wäre nur in einer Umgebung U von q_X gesichert, dass

$$E_n(\mathbf{X},r) > 0 \text{ für } r < q_X \text{ und } E_n(\mathbf{X},r) < 0 \text{ für } r > q_X$$

gilt und somit das Vorzeichen des Endwerts $E_n(\mathbf{X},r)$ auch mittels der Lage des Kalkulationszinsfaktors r bzw. aus dem Vorzeichen sgn $(q_X - r)$ bestimmt werden kann. Damit wäre nur bei der Wahl eines Kalkulationszinsfaktors r aus dieser Umgebung U die IB-Konsistenz des internen Zinsfaktors q_X gegeben. Zur Bestimmung des Vorzeichens der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},r)$ an der Stelle $r = q_K$, die im Allgemeinen aber außerhalb dieser Umgebung U liegt, genügt nicht die lokale Betrachtung für einen einzelnen internen Zinsfaktor. Im allgemeinen Fall wird dazu eine globale Betrachtung benötigt, nämlich die Berücksichtigung aller Nullstellen der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},r)$ inklusive ihrer Vielfachheiten rechts des Kalkulationszinsfaktors q_K. Damit ist auch geklärt, warum der Versuch bei Cannaday et al. (1986) mit einem relevanten internen Zinsfaktor einen für die I-Beurteilung „brauchbaren" internen Zinsfaktor zu finden, nicht zum Ziel führt. Anzumerken ist hierzu auch noch, dass für die IB-konsistente I-Beurteilung eines Zahlungsstroms **X** nur die Abhängigkeit des Funktionswerts $E_n(\mathbf{X},q)$ von der Lage des Kalkulationszinsfaktors q_K zu den internen Zinsfaktoren von **X** von Interesse ist und nicht die Art der Abhängigkeit der lokalen Zinsfaktorfunktion $\Phi_j(X_j) = \tilde{q}(X_0,..,X_j,..,X_n)$ von den Zahlungsstromkomponenten X_j.

Rechenaufwand und Kondition der Bestimmung der internen Zinsfaktoren

Bei der für diese IB-Beurteilung im Allgemeinen nötigen iterativen numerischen Bestimmung der Nullstellen des Polynoms $E_n(\mathbf{X},r)$ wird von einem Softwaresystem, wie z. B. Mathematica von Wolfram Research, intern eine Vielzahl von Funktionswerten des Polynoms $E_n(\mathbf{X},r)$ berechnet. Unter dem Gesichtspunkt des **Rechenaufwands** wäre es somit sicherlich einfacher nur den Endwert $E_n(\mathbf{X},q)$ bzw. Kapitalwert $B_n(\mathbf{X},q)$ an der Stelle $q = q_K$ zu berechnen, also gleich die Kapitalwertmethode zu benutzen. Andererseits ist es für den Liebhaber der Methode des internen Zinssatzes mit der heute zur Verfügung stehenden Software, wie z. B. Mathematica von Wolfram Research, auf dem PC auch kein großer Aufwand sämtliche interne Zinsfaktoren des Zahlungsstroms **X** zu berechnen.

Allerdings ist bei der praktischen Anwendung der MIZ und MVIZ zu beachten, dass die Nullstellenbestimmung für ein Polynom $E_n(\mathbf{X},r) = X_0r^n + \ldots + X_n$ in der Standarddarstellung mit den Koeffizienten X_j $(j = 0,\ldots,n)$ **schlecht konditioniert** ist. Dabei können schon einfache Nullstellen schlecht konditioniert sein, während mehrfache Nullstellen stets schlecht konditioniert sind. Dies heißt, dass ein kleiner relativer Fehler in den als Ausgangsdaten vorgegebenen Koeffizienten X_j große relative Fehler in den Rechenresultaten für die Polynomnullstellen bewirkt. Dies kann bei einer speziellen Wahl des Kalkulationszinsfaktors q_K dann zu einer falschen Bestimmung der Gesamtvielfachheit der reellen Nullstellen im Intervall $]q_K,\infty[$ und zu einer falschen Beurteilung von **X** führen. Eine ausführlichere Betrachtung zur Empfindlichkeit der Polynomnullstellen in Abhängigkeit von den Polynomkoeffizienten findet man bei Stoer (1994), S. 333–335. Ein Zahlenbeispiel für die schlechte Kondition der internen Zinsfaktoren eines Zahlungsstroms wird auf der Webseite des Autors im Thema ‚Charakterisierung der Endwertmethode mittels interner Zinsfaktoren' angegeben.

Da die IB-Beurteilung universell auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ anwendbar ist, können damit auch alle speziellen Klassen von Zahlungsströmen beurteilt werden. In den nachfolgend angegebenen Spezialfällen wird auch gezeigt, dass die IB-Beurteilung tatsächlich eine Verallgemeinerung der I-Beurteilungen ist, die für spezielle Zahlungsstromklassen entwickelt wurden. Dabei erfolgt die I-Beurteilung speziell mit dem *einzigen* positiven internen Zinsfaktor für die NG-Zahlungsströme (Definition folgt unten in Spezialfall 4) und NU-Zahlungsströme, die VK-Zahlungsströme mit positivem VK-Zinsfaktor, die regulären Zahlungsströme und die Normalzahlungsströme und die I-Beurteilung mit dem formalen internen Zinsfaktor $q_{int} = -\infty$ für die NF- und NF_0-Zahlungsströme mit keinem positiven internen Zinsfaktor.

Spezialfälle der IB-Beurteilung:

1) Der Fall $m_{>q_K} = 0$: Falls der Kalkulationszinsfaktor q_K kein interner Zinsfaktor des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und die Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren im Intervall $]q_K,\infty[$ gleich Null ist, also alle internen Zinsfaktoren auf der Zahlengeraden links von q_K liegen, ist **X** entweder eine IB-unvorteilhafte Investition oder eine IB-vorteilhafte Finanzierung. Falls noch $\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} \cup D_{\mathrm{Fin}}$ ist und somit **X** mindestens einen internen Zinsfaktor besitzt, ist in diesem Fall $m_{<q_K} > 0$ und es existiert mindestens ein (reeller) IB-konsistenter interner Zinsfaktor $q_{\mathrm{X}} < q_K$. Zu diesem Spezialfall $m_{>q_K} = 0$ gehören beispielsweise die I-unvorteilhaften Investitionen und die I-vorteilhaften Finanzierungen gemäß der mit allen internen Zinsfaktoren definierten Relationen $\lhd_{\mathrm{I,Inv,B},q}$ und $\rhd_{\mathrm{I,Fin,B},q}$ des obigen Beispiels 7.2 von Abschnitt 7.4, die in Abschnitt 7.3 beschriebenen NF-Zahlungsströme ($E_n(\mathbf{X},r) \neq 0$ in $]0,\infty[$) und insbesondere die NF_0-Zahlungsströme ($\mathbf{X} \notin D_{\mathrm{Inv}} \cup D_{\mathrm{Fin}}$, $n = 2k$ gerade).
2) Der Fall $m_{>q_K} = n - 2k$, wobei $k = k(\mathbf{X})$ die Anzahl der Paare der konjugiert komplexen Nullstellen der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},r)$ ist: In diesem Fall ist die Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren im Intervall $]q_K,\infty[$ gleich der Gesamtvielfachheit der internen Zinsfaktoren insgesamt und somit maximal. Alle internen Zinsfaktoren von **X** liegen also auf der Zahlengeraden rechts von q_K, sodass bei $m_{>q_K} > 0$ die Zinsfaktorbedingung $q_{\min}(\mathbf{X}) > q_K$ erfüllt ist. Zu diesem Fall gehören beispielsweise bei ungeradem n die IB-vorteilhaften Investitionen und die IB-unvorteilhaften Finanzierungen des obigen Beispiels 7.2.
3) Falls **X** ein NU-Zahlungsstrom (Definition in Abschnitt 7.2) ist, genügt es für die IB-Beurteilung nur den einzigen positiven internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ zu betrach-

ten, der eine Nullstelle der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},r)$ mit ungerader Ordnung ist (bzw. mit der Ordnung 1 bei einem regulären Zahlungsstrom): Im Falle $q_X = q_K$ ist **X** IB-indifferent. Im Falle $q_X > q_K$ ist $m_{>q_K}$ gleich der Ordnung von q_X und somit ungerade, also **X** entweder eine IB-vorteilhafte Investition oder eine IB-unvorteilhafte Finanzierung. Im Falle $0 < q_X < q_K$ ist $m_{>q_K} = 0$ und nach obigem Spezialfall 1) **X** entweder eine IB-unvorteilhafte Investition oder eine IB-vorteilhafte Finanzierung.
Zu den NU-Zahlungsströmen gehören auch die VK-Zahlungsströme (Definition in Abschnitt 7.1.3) mit einem positiven VK-Zinsfaktor, der die Nullstellenordnung 1 besitzt. Speziell die VK-Investitionen mit positivem VK-Zinsfaktor, die in der Literatur wie z. B. bei Blohm und Lüder (1995), S. 90ff., und Götze (2008), S. 97f., als sog. „isoliert durchführbare Investitionen" bezeichnet werden (Plausibilisierung in Abschnitt 7.1.3), wurden bisher als Anwendungsbereich der MIZ-Beurteilung angegeben. Zu den VK-Zahlungsströmen mit positivem VK-Zinsfaktor gehören insbesondere auch die regulären Zahlungsströme und die Normalzahlungsströme.

4) Es sei nun **X** ein NG-Zahlungsstrom, d. h. ein Zahlungsstrom mit einem einzigen positiven internen Zinsfaktor q_X, der darüber hinaus als Nullstelle der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},r)$ von gerader Ordnung m (≥ 2) ist. Im Falle $q_X = q_K$ ist **X** IB-indifferent. Im Falle $q_X > q_K$ ist $m_{>q_K} = m$ und im Falle $0 < q_X < q_K$ ist $m_{>q_K} = 0$. In den beiden letzten Fällen ist also $m_{>q_K}$ gerade und daher gemäß der obigen Definition der IB-Beurteilung **X** eine IB-unvorteilhafte Investition oder eine IB-vorteilhafte Finanzierung. Im Falle $q_X \neq q_K$ ist sowohl für die IB-unvorteilhafte Investition als auch für die IB-vorteilhafte Finanzierung der interne Zinsfaktor q_X genau dann IB-konsistent, wenn $0 < q_X < q_K$ gilt. Im Falle $q_X > q_K$ ist dagegen q_X nicht IB-konsistent und nur der formal hinzugenommene nichtreelle interne Zinsfaktor $-\infty$ IB-konsistent.

7.6 Ökonomische Interpretation der Methode für die Beurteilung eines Zahlungsstroms

Die ökonomische Interpretation der Methode des internen Zinssatzes kann mit Hilfe der ökonomischen Interpretation der speziellen Zeitwertmethode von Abschnitt 6.3.7.3 unter bestimmten Voraussetzungen angegeben werden. Die damit verbundene implizite Prämisse (RSmq) wird unten noch explizit angegeben. Für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und jeden Kalkulationszinsfaktor $q = q_K > 0$ kann mit der universell anwendbaren IB-Beurteilung von Abschnitt 7.5 bestimmt werden, welches Vorzeichen der Kapitalwert $B_n(\mathbf{X},q_K)$ bzw. der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q_K) = q_K{}^m \cdot B_n(\mathbf{X},q_K)$ besitzt und wie der Zahlungsstrom **X** nach der B-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{B,q}$ bzw. der Z-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{Z,q}$ zu beurteilen ist. Soll die IB-konsistente I-Beurteilung des

Zahlungsstroms **X** spezieller nur mittels eines einzigen internen Zinsfaktors von **X** erfolgen und soll dies für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor möglich sein, so erhält man als eine weitere implizite Prämisse dieser ökonomischen Interpretation die Einschränkung auf die Zahlungsströme mit der Eigenschaft (BMIZ) (siehe Abschnitt 7.2), also auf die NU- und NF-Zahlungsströme.

Da die IB-Beurteilung mit der Z-Beurteilung, d. h. der Beurteilung nach der Zeitwertmethode, übereinstimmt, liefert bei Gültigkeit der in Abschnitt 6.3.7.3 angegebenen **impliziten Prämisse** (RSmq) die ökonomische Interpretation der Zeitwertmethode auch eine ökonomische Interpretation der I-Beurteilung des Zahlungsstroms.

(RSmq) Bei festem Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ und festem Vergleichszeitpunkt $m \in \{0,\ldots,n\}$ steht *für den festen Zahlungsstrom* **X** auf dem für den Beurteiler zugänglichen Kapitalmarkt tatsächlich das Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1}$$

zur Glattstellung des Zahlungsstroms **X** auf den m-ten Zeitwert

$$Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{m-j}\ ,\ q = q_K,$$

zur Verfügung.

Fordert man die Voraussetzung (RSmq) *für alle Zahlungsströme* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, so ergibt dies nach Abschnitt 6.3.7 die sehr starke Voraussetzung, dass dem Entscheider auf dem Kapitalmarkt die sehr spezielle vollkommene zulässige Supplementmenge

$$C_{M^n} = H_{\mathbf{P}(q),0}$$

mit dem speziellen Preisvektor $\mathbf{P}(q) = (1,1/q,\ldots,1/q^n)^{\mathsf{T}}$ zur Verfügung steht. Der Kapitalmarkt enthält dann auch die Supplemente $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ für alle Vergleichszeitpunkte $m \in \{0,\ldots,n\}$ und die in Abschnitt 6.3.7 beispielhaft angegebenen speziellen Kapitalmarktgeschäfte $\mathbf{P}^j$ $(j = 1,\ldots,m)$, $\mathbf{M}^j$ $(j = m+1,\ldots,n)$, $\mathbf{T}^j$, $\mathbf{D}^j$, $\mathbf{K}^j$ und $\mathbf{R}^j$ $(j = 1,\ldots,n)$.

Dass in der Praxis tatsächlich für den Entscheider eine konkrete finanzielle Situation vorhanden sein kann, in der zumindest *Zahlungsströme einer gewissen Menge G* auf ihren m-ten Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ glattgestellt werden können, wird in Beispiel 6.2 in Abschnitt 6.3.7.3 mit einem sogenannten Verrechnungskonto dargestellt. Beispielsweise kann dort ein Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in G(n,q,\mathbf{C})$ durch Verrechnung auf dem Konto mit dem Kontozinsfaktor als Kalkulationszinsfaktor q auf seinen Endwert $E_n(\mathbf{X},q)$ aufgezinst werden und der Endwert als Marge entnommen werden. Für diesen Zahlungsstrom **X** ist also die Voraussetzung (RSnq) über die reale Existenz des Supplements $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ erfüllt. In Teil 4) dieses Beispiels wird aber in der abschließenden Anmerkung erwähnt, dass für einen Beurteiler die Mengen $G(m,q,\mathbf{C})$ der verrechenbaren und glattstellbaren Zahlungsströme für verschiedene Vergleichszeitpunkte m verschieden sein können. Daher kann hier der Fall auftreten, dass zu einem Zeitpunkt m der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q_K)$ als Marge entnommen werden kann, aber zu einem anderen Zeitpunkt $m' \neq m$ der zugehörige Zeitwert $Z_{m',n}(\mathbf{X},q_K)$ nicht als Margenentnahme realisiert werden kann.

Bei Vorliegen der Voraussetzung (RSmq) und eventuell, falls nur ein *einziger* interner Zinsfaktor des Zahlungsstroms für jeden beliebigen positiven Kalkulationszinsfaktor zur I-Beurteilung verwendbar sein soll, noch der Voraussetzung (BMIZ) für den Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) erhält man die folgende **ökonomische Interpretation der Methode** des internen Zinssatzes zur Beurteilung des Zahlungsstroms **X**. Die I-Beurteilung kann dabei allgemein mit der IB-Beurteilung oder eventuell speziell mit der Methode für die NU- und NF-Zahlungsströme erfolgen.

Für den Zahlungsstrom **X** ist für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ die I-Beurteilung gleichbedeutend zur Z-Beurteilung und zur R-Beurteilung:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \succ_{\mathrm{I},q} \mathbf{O} \quad &\Leftrightarrow \mathbf{X} \succ_{\mathrm{Z},q} \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \mathbf{X} \rhd_{\mathrm{R}LV} \mathbf{O}, \\ \mathbf{X} \sim_{\mathrm{I},q} \mathbf{O} \quad &\Leftrightarrow \mathbf{X} \sim_{\mathrm{Z},q} \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \mathbf{X} \sim_{\mathrm{R}LV} \mathbf{O}, \\ \mathbf{X} \prec_{\mathrm{I},q} \mathbf{O} \quad &\Leftrightarrow \mathbf{X} \prec_{\mathrm{Z},q} \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \mathbf{X} \lhd_{\mathrm{R}LV} \mathbf{O}. \end{aligned}$$

Mit dem tatsächlich für den Beurteiler auf dem Kapitalmarkt zur Verfügung stehenden Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1}$$

kann bei einem I-vorteilhaften (bzw. I-indifferenten bzw. I-unvorteilhaften) Zahlungsstrom **X** der Zeitwert $Z_{m,n}(\mathbf{X},q_K) > 0$ (bzw. $= 0$ bzw. < 0) zum Zeitpunkt $t = m$ als Margenentnahme $\nu(\mathbf{X})$ einer Glattstellung von **X** realisiert werden kann: Durch Kombination von **X** und dem Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ erhält man den zum Zeitwert gehörigen Margenzahlungsstrom

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{m+1},$$

also zum Zeitpunkt $t = m$ die Zahlung $Z_{m,n}(\mathbf{X},q)$.

7.7 Ökonomische Interpretation des internen Zinssatzes

7.7.1 Interner Zinsfaktor als Zinsfaktor einer realen Verzinsung des Zahlungsstroms

Zur Gewährleistung einer ökonomischen Interpretierbarkeit des internen Zinssatzes selbst wird als Erstes die Voraussetzung (RSnq), die **implizite Prämisse** der ökonomischen Interpretierbarkeit der Endwertmethode, an den Kapitalmarkt gefordert:

(RSnq) Für die Glattstellung des Zahlungsstroms **X** auf den Endwert

$$E_n(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j}, \; q = q_K,$$

zum Endzeitpunkt $t = n$ steht auf dem für den Beurteiler tatsächlich zugänglichen Kapitalmarkt das Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + E_n(\mathbf{X},q)\cdot\mathbf{e}_{n+1}$$

zur Verfügung.

Unter der Voraussetzung (RSnq) der realen Existenz des Supplements

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(\mathbf{X}) &= (-X_0,\ldots,-X_{n-1},X_0q^n + \ldots + X_{n-1}q)^{\mathsf{T}} \\ &= (-X_0,\ldots,-X_{n-1},-X_n + E_n(\mathbf{X},q))^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

$$= - \mathbf{X} + E_n(\mathbf{X},q)\mathbf{e}_{n+1},$$

auf dem für den Entscheider zugänglichen Kapitalmarkt kann der reale Margenzahlungsstroms als Kombinationszahlungsstrom

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X},q)\mathbf{e}_{n+1}$$

gebildet werden. Die reale Existenz des Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ bedeutet somit, dass jede der Zahlungen X_j ($j = 0,\dots,n$-1) mittels des Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ zum Zinsfaktor q auf den Zeitpunkt $t = n$ transponiert bzw. aufgezinst werden kann. Die ökonomische Interpretation des Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ als ein Zinsfaktor einer Verzinsung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ wurde in Abschnitt 6.3.7.4 schon dargestellt.

Als Zweites soll nun neben der Voraussetzung (RSnq), also der speziellen Voraussetzung (RSmq) für den Vergleichszeitpunkt $m = n$ zur Realisierung des Endwerts $E_n(\mathbf{X},q)$ als Margenentnahme $v(\mathbf{X})$ einer Glattstellung von $\mathbf{X}$, noch der Sonderfall mit der starken Voraussetzung vorliegen, dass der ausgewählte interne Zinsfaktor q_{int} des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ gleich dem Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ ist:

(IK) $q_{int} = q_K$ (> 0).

Unter der zusätzlichen Voraussetzung (IK) $q_{int} = q_K$, dass also der interne Zinsfaktor auch als ein auf dem Kapitalmarkt realisierbarer Kalkulationszinsfaktor auftritt, also gemäß (RSnq) das zugehörige Supplement

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = - \mathbf{X} + E_n(\mathbf{X},q_{int}) = - \mathbf{X}$$

auf dem Kapitalmarkt zur Verfügung steht, können alle Zahlungen X_j ($j = 0,\dots,n$) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mittels des internen Zinsfaktors q_{int} auf den Vergleichszeitpunkt $t = n$ aufgezinst werden. In diesem Spezialfall tritt also der interne Zinsfaktors q_{int} als Zinsfaktor einer realen Verzinsung der Zahlungsstromkomponenten X_j auf, deren Gesamtergebnis zum Zeitpunkt $t = n$ der Endwert $E_n(\mathbf{X},q_{int}) = 0$ ist. Damit hat man also eine ökonomische Interpretation des internen Zinsfaktors q_{int} des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ als Zinsfaktor der Verzinsung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ bei der Bildung des Margenzahlungsstroms

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{O}.$$

Die Voraussetzungen (RSnq) und (IK) entsprechen daher der in der Literatur vielzitierten „Wiederanlageprämisse" für den internen Zinsfaktor. Diese Prämisse fordert hier, dass bei einer Investition $\mathbf{X}$ zur Transposition der Zahlungen X_j auf den Endzeitpunkt $t = n$ nicht nur die Auszahlungen $X_j < 0$ zum Zinsfaktor $q_K = q_{int}$ finanziert werden können, sondern auch die Rückflüsse $X_j > 0$ zum gleichen Zinsfaktor $q_K = q_{int}$ angelegt werden können. Der interne Zinsfaktor $q_{int} = q_K$ dient dabei also sowohl als Kreditzinsfaktor als auch als Anlagezinsfaktor.

Anzumerken ist noch, dass hier bei der ökonomischen Interpretation des internen Zinssatzes im Gegensatz zur ökonomischen Interpretation der zugehörigen Methode (siehe Abschnitt 7.6) die Voraussetzung (BMIZ) nicht benötigt wird, die dort für eine gewünschte I-Beurteilung mit einem einzelnen internen Zinsfaktor angeführt wird. Bei Vorliegen des Sonderfalles (IK) $q_{int} = q_K$ ist nämlich der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ ja schon mit dem einzelnen internen Zinsfaktor q_{int} IB-konsistent beurteilt, und zwar als indifferenter Zahlungsstrom.

Anmerkung zur alternativen Voraussetzung (RSmq)
Bei Verwendung eines Vergleichszeitpunkts m, $0 \leq m \leq n$, und der Voraussetzung (RSmq) statt (RSnq) ist nach Abschnitt 6.3.7.4 der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ auch der Zinsfaktor der realen Verzinsung (Aufzinsung) des modifizierten Zahlungsstroms $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - Z_{m,n}(\mathbf{X},q)\mathbf{e}_{m+1}$ auf den Zeitpunkt $t = n$. Wegen der zusätzlichen Voraussetzung (IK) $q_K = q_{int}$ ist hier

$$Z_{m,n}(\mathbf{X},q) = q^{m-n}E_n(\mathbf{X},q) = 0$$

und daher $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$. Demnach ist $q_K = q_{int}$ auch unter der Voraussetzung (RSmq) der Zinsfaktor einer realen Verzinsung von $\mathbf{X}$ auf den Zeitpunkt $t = n$. Nach Abschnitt 6.3.7 stimmt aber das mit (RSmq) vorausgesetzte reale Supplement $\mathbf{S}$‘($\mathbf{X}$) überein mit dem Supplement $\mathbf{S}$“($\bar{\mathbf{X}}$) = $\mathbf{S}$“($\mathbf{X}$), welches die Glattstellung von $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$ auf dessen Endwert $E_n(\bar{\mathbf{X}},q) = 0$ ($m' = n$) ermöglicht. Somit ist die Aussage über $\mathbf{X}$ zur Voraussetzung (RSmq) hier identisch mit der Aussage zur Voraussetzung (RSnq) und man erhält mit der Verwendung von (RSmq) keine weitere Aussage.

7.7.2 Interner Zinsfaktor als Kontozinsfaktor und als Zinsfaktor einer Verzinsung des Zahlungsstroms

In der konkreten Situation des Beispiels 6.2 von Abschnitt 6.3.7.3 soll nun unter der zusätzlichen Voraussetzung (IK) der interne Zinsfaktor $q_{int} = q_K = q$ auch als konstanter Kontozinsfaktor eines bereits vorhandenen Verrechnungskontos mit vorgegebenen Kontoständen C_j auftreten. In dieser damit schon sehr speziellen Situation erhält man unter den Bedingungen zur Verrechenbarkeit des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mit Kontoständen ohne Vorzeichenwechsel für jeden Vergleichszeitpunkt $t = m$ wegen

$$Z_{m,n}(\mathbf{X},q_{int}) = q_{int}{}^{m-n}E_n(\mathbf{X},q_{int}) = 0$$

die Margenentnahme $v(\mathbf{X}) = Z_{m,n}(\mathbf{X},q_{int})$ vom Wert Null. In diesem speziellen Fall ergeben sich für alle Vergleichszeitpunkte m für die Sicherung der Nichtnegativität der Kontostände $\bar{C}_j(\mathbf{X})$ auf einem Anlagekonto (bzw. der Nichtpositivität der Kontostände auf einem Kreditkonto) und damit für die Sicherung der Voraussetzung (RSmq) wegen $Z_{m,n}(\mathbf{X},q_{int}) = 0$ auch identische (von m unabhängige) Vorzeichenbedingungen (VCm):

(VC) $\qquad \bar{C}_j(\mathbf{X}) = C_j + E_j(\mathbf{X},q_{int}) \geq 0 \ (\leq 0) \quad$ für $j = 0,\ldots,n$-1.

Dies ist genau die Bedingung (VCn), die man auch in Abschnitt 6.3.7.4 bei der allgemeineren Darstellung des Beispiels mit dem Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ speziell für den Vergleichszeitpunkt $t = n$ erhalten hat. Nach den Überlegungen in Abschnitt 6.3.7.4 mit einem beliebigen Kontozinsfaktor $q = q_K$ ist dann hier der interne Zinsfaktor q_{int} der Zinsfaktor einer realen Verzinsung der Zahlungsstromkomponenten X_j des auf das Konto gebuchten Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ mit dem Endwert $E_n(\mathbf{X},q_{int}) = 0$.

Falls man nun den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ statt auf ein Konto mit vorgegebener Kontostandsentwicklung C_j auf ein **neu angelegtes Konto** ($C_j = 0$ für $j = 0,\ldots,n$) mit dem festen Kontozinsfaktor $q = q_K = q_{int}$ (> 0) bucht (gutschreibt), so kommt wegen $\bar{C}_0 = X_0$ für eine Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) nur ein Kreditkonto in Frage und für eine Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$) nur ein Anlagekonto. In diesem Spezialfall erhält man zur Sicherung der Nichtpositivität (bzw. Nichtnegativität) der Kontostände $\bar{C}_j(\mathbf{X})$ und damit für die Sicherung der Voraussetzung (RSmq) bzw. (RSnq) für eine Investition (bzw. Finanzierung) **X** die strengeren Vorzeichenbedingungen

(VO) $\bar{C}_j(\mathbf{X}) = E_j(\mathbf{X},q_{int}) \leq 0 \ (\geq 0)$ für $j = 0,\ldots,n$-1

Die hier angegebenen strengeren Vorzeichenbedingungen für die ökonomische Interpretation des internen Zinsfaktors q_{int} als Zinsfaktor der Verzinsung der Zahlungsstromkomponenten X_j, welche zum Zeitpunkt $t = n$ den Endwert $E_n(\mathbf{X},q_{int}) = 0$ liefert, bedeuten, dass der interne Zinsfaktor q_{int} ein sogenannter Verrechnungskontozinsfaktor (VK-Zinsfaktor gemäß der Definition in Abschnitt 7.1.3) des Zahlungsstroms **X** ist. In Abschnitt 7.1 und 7.2 wurde bewiesen, dass ein positiver VK-Zinsfaktor auch ein NU-Zinsfaktor ist, also auch die Voraussetzung (BMIZ) erfüllt ist, und somit die Beurteilungen des Zahlungsstroms **X** nach den Methoden MIZ und KWM übereinstimmen. Als positiver VK-Zinsfaktor und NU-Zinsfaktor ist q_{int} der einzige positive interne Zinsfaktor des Zahlungsstroms **X**.
Bei Altrogge (1996), S. 313, 317, der die Investition **X** *zu Lasten* eines sogenannten fiktiven Ersatzkontos bucht, findet man die entsprechende Bedingung

$$\tilde{C}_j = - E_j(\mathbf{X},q_{int}) \geq 0 \qquad \text{für } j = 0,\ldots,n\text{-}1$$

für die „nichtnegative Kapitalbindung" (Kapitalfestlegung) $\tilde{C}_j$ des Zahlungsstroms **X** auf dem Ersatzkonto und für die sinnvolle Interpretierbarkeit des internen Zinsfaktors als Zinsfaktor der Verzinsung nichtnegativer Kapitalbindungen.

Wie durch die Situation des Beispiels 6.2 für den Spezialfall $q_K = q_{int}$ gezeigt wurde, ist eine ökonomische Interpretation des internen Zinsfaktors als Kontozinsfaktor und damit als Zinsfaktor einer Verzinsung bei der *Beurteilung* eines Zahlungsstroms in einer speziellen finanziellen Situation des Entscheiders durchaus denkbar. Die damit einhergehende Beurteilung des Zahlungsstroms ergibt einen indifferenten Zahlungsstrom.

7.7.3 Zusammenhang zwischen internem Zinsfaktor als Kontozinsfaktor und Äquivalenzprinzip

Abschließend wird jetzt noch zu einem fest vorgegebenen Zahlungsstrom **X** unter der Voraussetzung (IK) $q_{int} = q_{int}(\mathbf{X}) = q_K$, die zum Diskontierungsvektor $\mathbf{P}(q_{int}) = \mathbf{P}(q_K) = (1,1/q_K,\ldots,1/q_K{}^n)^\mathsf{T}$ und zur Barwert-Funktion

$$\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto B_n(\mathbf{Z},q_{int}) = \mathbf{P}(q_{int})^\mathsf{T}\mathbf{Z} \in \mathbb{R}$$

gehörige spezielle Barwert-Äquivalenzrelation (Barwert-Indifferenzrelation) $\sim_B$ ($= \sim_Z = \sim_E$) im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet. Bezüglich dieser Äquivalenzrelation $\sim_B$ ist wegen $B_n(\mathbf{X},q_{int}) = 0$ der vorgegebene Zahlungsstrom **X** äquivalent zur Unterlassungsalternative $\mathbf{O} = (0,\ldots,0)^\mathsf{T}$:

$$\mathbf{X} \sim_B \mathbf{O}.$$

Zerlegt man nun **X** in seinen nichtpositiven Anteil - **L** und seinen nichtnegativen Anteil **G**,

$$\mathbf{X} = -\,\mathbf{L} + \mathbf{G} \text{ mit } \mathbf{L} \geq \mathbf{O},\ \mathbf{G} \geq \mathbf{O},$$

so gilt

$$0 = B_n(\mathbf{X},q_{int}) = -\, B_n(\mathbf{L},q_{int}) + B_n(\mathbf{G},q_{int})$$

und es ist somit die im Zahlungsstrom durch den Beurteiler aufzubringende Leistung **L** äquivalent zur erhaltenen Gegenleistung **G**:

$$\mathbf{L} \sim_B \mathbf{G}.$$

Hinsichtlich der mit dem Barwert zum internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ gemessenen Gleichwertigkeit $\sim_B$ sind also der Leistungsanteil **L** und der Gegenleistungsanteil **G** von **X** gleichwertig.

Insbesondere tritt auch auf dem Konto des Beispiels 6.2 von Abschnitt 6.3.7.3 unter der Voraussetzung von (IK) und der zum Vergleichszeitpunkt $t = n$ gehörigen Vorzeichenbedingungen (VC) (von Abschnitt 7.7.2) bei der Verrechnung des Zahlungsstroms **X** mit dem internen Zinsfaktor q_{int} als Kontozinsfaktor q_K das **Äquivalenzprinzip** in seinem eigentlichen Sinne auf (Duden (2003), S. 132), nämlich in dem Grundsatz der Gleichwertigkeit von Leistung und Gegenleistung. Für das durch den Zahlungsstrom **X** gegebene Geldgeschäft zwischen Bankkunden und Bank werden die Leistungen $L_j = -\, X_j$ (der Indizes j mit $X_j \leq 0$) des ersten Geschäftspartners (des Bankkunden) mit den entsprechenden Gegenleistungen $G_j = X_j$ (der Indizes j mit $X_j \geq 0$) des zweiten Geschäftspartners (der Bank) verglichen. Die Gleichwertigkeit wird dabei durch die Geschäftspartner über die Gleichheit der als Vergleichswerte fungierenden Barwerte der Zahlungsströme **L** und **G** vereinbart (Köhler 1992, S. 130). Nach der Verbuchung des Zahlungsstroms **X** auf dem Konto mit dem Zinsfaktor q_{int} ist zum Endzeitpunkt $t = n$ der Kontostand $E_n(\mathbf{X},q_{int}) = 0$, also das Konto wieder ausgeglichen.

7.8 Kritik und Verallgemeinerung der Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung

7.8.1 Kritik der Varianten mit einem einzigen internen Zinsfaktor

Die nachfolgende Kritik befasst sich mit den in den Abschnitten 7.2, 7.3 und 7.4 erwähnten speziellen Methoden des internen Zinssatzes, bei denen ein einziger interner Zinsfaktor für die I-Beurteilung verwendet wird und für die es nur eingeschränkte Anwendungsbereiche gibt. Auch bei dem stark eingeschränkten Anwendungsbereich $B_{\mathrm{MIZ},q}$ des Beispiels 7.2, bei dem die strenge I-Beurteilung mit allen internen Zinsfaktoren erfolgt, war der Ausgangspunkt der Definition die schwache I-Beurteilung mit nur einem beliebigen einzigen internen Zinsfaktor. Durch Zahlenbeispiele wird nun illustriert, dass diese I-Beurteilungen für jede Laufzeit $n \geq 1$ nicht wie die anderen klassischen Methoden (Endwert-, Kapitalwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode) universell im $\mathbb{R}^{n+1}$ einsetzbar sind, sondern jeweils auf einen eingeschränkten Anwendungsbereich begrenzt sind. Weiter wird gezeigt, dass diese Varianten der I-Beurteilung außerhalb ihrer Anwendungsbereiche B_{MIZ}, $B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$ und $B_{\mathrm{MIZ},q}$ im Allgemeinen unbrauchbar sind und dass innerhalb ihres Anwendungsbereichs noch zu beachten ist, dass auch nur der zugewiesene IB-konsistente interne Zinsfaktor zu nehmen ist.

Zunächst wird gezeigt, dass es für jede Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, die keinen internen Zinsfaktor besitzen und auf die somit die Methode des internen Zinssatzes mit einem reellen internen Zinssatz nicht anwendbar ist.

Beispiel 7.4 Zahlungsströme ohne internen Zinsfaktor

1) Ein Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (0,\ldots,0,X_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}, X_n \neq 0,$$

auf der X_n-Achse außerhalb des Nullpunkts $\mathbf{O}$ besitzt eine Endwertfunktion

$$E_n(\mathbf{X},q) = X_n,$$

die konstant und gleich $X_n \neq 0$ ist. Daher hat $\mathbf{X}$ keinen internen Zinsfaktor. Ein derartiger Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ ist also nicht mit der Methode des internen Zinssatzes (MIZ) beurteilbar. Er ist aber mit der Kapitalwertmethode (KWM) beurteilbar und wegen $B_n(X,q) = X_n/q^n$ ($q > 0$) B-vorteilhaft im Falle $X_n > 0$ und B-unvorteilhaft im Falle $X_n < 0$. Im Fall $X_n > 0$ ist $\mathbf{X}$ lexikopositiv und damit eine verallgemeinerte Finanzierung, im Fall $X_n < 0$ ist $\mathbf{X}$ lexikonegativ und eine verallgemeinerte Investition.

2) Die in Abbildung 7.8 dargestellte Endwertfunktion

$$E_2(\mathbf{X},q) \quad = - q^2 - 1$$

der Investition $\mathbf{X} = (-1,0,-1)^T \in \mathbb{R}^3$ und damit auch die zugehörige Barwert-Funktion $B_2(\mathbf{X},q) = E_2(\mathbf{X},q)/q^2$ ($q \neq 0$) sind für alle reellen Zinsfaktoren $q \neq 0$ und insbesondere für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren $q = q_K$ negativ. Demnach ist der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ nach der Kapitalwertmethode für jeden Kalkulationszinsfaktor $q > 0$ B-unvorteilhaft. Da aber die Endwertfunktion keine reelle Nullstelle und somit der Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ keinen internen Zinsfaktor besitzt, ist die Methode des internen Zinssatzes mit einem endlichen internen Zinsfaktor nicht anwendbar. Nur mit der formalen Hinzunahme des internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X}) \;= - \infty$ für die NF_0–Investition $\mathbf{X}$ kann die Investition auch als I-beurteilbar und I-unvorteilhaft angesehen werden. △

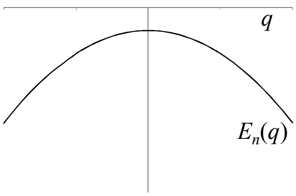


Abb. 7.8 Der Graph einer Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ ohne Nullstelle

Des Weiteren werden nun Beispiele für Zahlungsströme $\mathbf{X}$ angegeben, für welche die Methode des internen Zinssatzes zwar anwendbar ist, aber im Widerspruch zur akzeptierten Kapitalwertmethode steht. Die angegebenen Zahlungsströme liegen somit außerhalb des Anwendungsbereichs der betrachteten Variante der I-Beurteilung. In der Literatur findet man entsprechende Beispiele bei Caprano und Gierl (1992), S. 88–90, Kruschwitz (1998), S. 88–92, und Tietze (1999), S. 234–236. Für diese Beispiele ist eine Laufzeit $n \geq 2$ zu wählen, da für die Laufzeit $n = 1$ die Methode des internen Zinssatzes zur Beurteilung eines einzelnen Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ ($X_0 \neq 0$) stets der Kapitalwertmethode entspricht.

Beweis der Konsistenz von MIZ und KWM für $n = 1$: Für einen Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ mit $X_0 \neq 0$ und o. E. $X_0 > 0$ ($\mathbf{X}$ ist eine Finanzierung) gilt mit einem positiven Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ und dem zugehörigen Diskontierungsvektor $\mathbf{P} = \mathbf{P}(q) = (1,1/q)^\mathsf{T}$ nämlich

$$B_1(\mathbf{X},q) = \mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{X} = X_0 + X_1/q > 0 \text{ (bzw. } < 0)$$

genau dann, wenn $q > - X_1/X_0 = q_{int}$ (bzw. $q < q_{int}$) ist, also der einzige interne Zinsfaktor q_{int} der Finanzierung $\mathbf{X}$ kleiner (bzw. größer) als der Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ ist. Demnach ist die Finanzierung $\mathbf{X}$ genau dann B-vorteilhaft (bzw. B-unvorteilhaft), wenn sie I-vorteilhaft (bzw. I-unvorteilhaft) ist. Eine analoge Begründung erfolgt für eine Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$). Diese Aussage für die Laufzeit $n = 1$ wurde auch schon in Abschnitt 7.4 angegeben. □

Für einen Zahlungsstrom $\mathbf{X}$, der mindestens einen internen Zinsfaktor besitzt und nicht im Anwendungsbereich B_{MIZ} liegt, gibt es mindestens einen internen Zinsfaktor q_X und einen positiven Kalkulationszinsfaktor q_K, sodass die I-Beurteilung bei Verwendung dieses einen internen Zinsfaktors widersprüchlich zur B-Beurteilung ist. Es werden jetzt Beispiele für drei Typen von derartigen Zahlungsströmen

$$\mathbf{X} \in D \setminus B_{\text{MIZ}} \qquad\qquad (D = \bigcup_{q_1 \in \mathbb{R}} H_{\mathbf{A}(q_1),0}\,)$$

angegeben, für welche die Methode des internen Zinssatzes und die Kapitalwertmethode widersprüchliche Beurteilungsergebnisse liefern. Es sind dies die Zahlungsströme, für die

1) ein einziger positiver interner Zinsfaktor oder mehrere positive interne Zinsfaktoren jeweils mit gerader Nullstellenordnung auftreten,
2) mehrere positive interne Zinsfaktoren existieren, von denen mindestens zwei eine ungerade Nullstellenordnung besitzen oder
3) ein nichtpositiver interner Zinsfaktor existiert und ein positiver interner Zinsfaktor auftritt, der eine gerade Nullstellenordnung besitzt.

Beispiel 7.5 Zahlungsströme ohne die Eigenschaft (BMIZ) mit widersprüchlichen Ergebnissen der Methoden MIZ und KWM

a) Für die in Abbildung 7.9 a) dargestellte Endwertfunktion

$$E_2(\mathbf{X},q) \;\; = q^2 - 2q + 1 = (q - 1)^2$$

der Finanzierung $\mathbf{X} = (1,-2,1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ ist die Stelle

$$q_{int} = q_1 = 1$$

die einzige (positive) Nullstelle. Für die I-Beurteilung steht also nur dieser einzige interne Zinsfaktor zur Verfügung. Da die Nullstelle q_1 die gerade Ordnung (Vielfachheit) $m = 2$ besitzt und somit keine Vorzeichenwechselstelle ist, liegen für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ die Eigenschaften (NU) und (NF) nicht vor. Der Zahlungsstrom liegt nicht im Anwendungsbereich B_{MIZ}. Für alle reellen Zinsfaktoren $q \neq q_{int}$ und insbesondere für alle positiven Kalkulationszinsfaktoren $q \neq q_{int}$ ist die Endwertfunktion positiv. Da hier also $B_2(\mathbf{X},q) = E_2(\mathbf{X},q)/q^2 > 0$ insbesondere für alle Kalkulationszinsfaktoren $q < q_{int}$ gilt und somit $\mathbf{X}$ nach der Kapitalwertmethode vorteilhaft ist, erhält man einen Widerspruch zur Beurteilung der Finanzierung $\mathbf{X}$ mittels der Methode des internen Zinssatzes, nach welcher die Finanzierung $\mathbf{X}$ für diese Kalkulationszinsfaktoren q als I-unvorteilhaft angesehen wird.

b) Die in Abbildung 7.9 b) dargestellte Endwertfunktion

$$E_2(\mathbf{X},q) \;\; = q^2 - 2{,}1 \cdot q + 1{,}1 = (q - 1)(q - 1{,}1)$$

der Finanzierung $\mathbf{X} = (1;-2{,}1;1{,}1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ besitzt die beiden positiven und einfachen Nullstellen

$$q_1 = 1{,}1 \text{ und } q_2 = 1.$$

Sie besitzt daher nicht die Eigenschaft (NU) der Vorzeichenverteilung und ist positiv in den Intervallen $]-\infty;1[$ und $]1,1;\infty[$ und negativ im Intervall $]1;1,1[$. Nach der Kapitalwertmethode ist der Zahlungsstrom **X** vorteilhaft für die Kalkulationszinsfaktoren q_K mit $0 < q_K < q_2$. Nach der Methode des internen Zinssatzes ist die Finanzierung **X** unvorteilhaft für $q_K < q_{int}$. Dabei ist hier der interne Zinsfaktor q_{int} des Zahlungsstroms **X** nicht eindeutig festgelegt. Sowohl bei der Wahl des internen Zinsfaktors $q_{int} = q_1$ als auch bei der Wahl von $q_{int} = q_2$ erhält man jedoch bei Verwendung eines Kalkulationszinsfaktors $q_K < q_2$ einen Widerspruch bei der Beurteilung nach den beiden Verfahren.

c) Die in Abbildung 7.9 c) dargestellte Endwertfunktion

$$E_3(\mathbf{X},q) \quad = (q+1)(q-1)^2 = q^3 - q^2 - q + 1$$

der Finanzierung $\mathbf{X} = (1,-1,-1,1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ besitzt die negative Nullstelle $q_3 = -1$ und die doppelte positive Nullstelle $q_{1,2} = 1$. Die Finanzierung **X** genügt mit dem zweifachen positiven internen Zinsfaktor q_1 nicht der Vorzeichenbedingung (NU) und mit dem negativen internen Zinsfaktors $q_{int} = q_3 = -1$ nicht der Vorzeichenbedingung (NFF) $E_3(\mathbf{X},q) > 0$ für $q > 0$. Daher liegt **X** nicht im Anwendungsbereich B_{MIZ} der Methode des internen Zinssatzes. Bei der Wahl des internen Zinsfaktor $q_3 = -1$ und des Kalkulationszinsfaktors $q_K = 1$ für die I-Beurteilung ist die Finanzierung **X** I-vorteilhaft und B-indifferent, also nicht B-vorteilhaft. Der Zahlungsstrom **X** erhält somit widersprüchliche Beurteilungen nach MIZ und KWM. Bei der Wahl des des internen Zinsfaktor $q_1 = +1$ und des Kalkulationszinsfaktors $q_K = 0{,}5$ ist die Finanzierung **X** I-unvorteilhaft und B-vorteilhaft, also ebenfalls widersprüchlich beurteilt. △

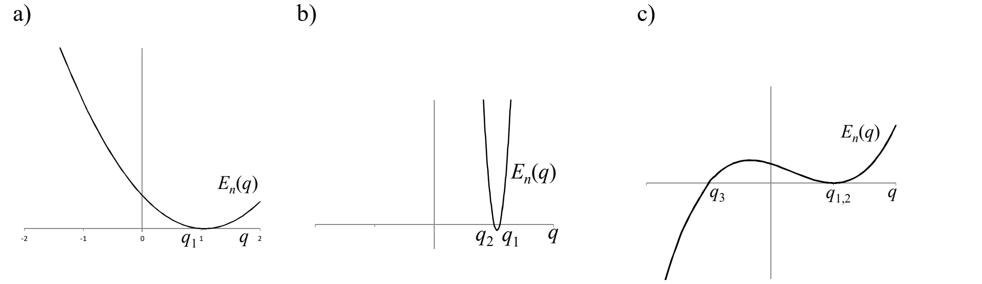


Abb. 7.9 Der Graph der Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ für die drei Beispiele:
a) $E_n(q)$ mit einer zweifachen positiven Nullstelle,
b) $E_n(q)$ mit zwei einfachen positiven Nullstellen und
c) $E_n(q)$ mit einer positiven Nullstelle gerader Ordnung und einer negativen Nullstelle

Es folgt nun noch ein weiteres Zahlenbeispiel für einen Zahlungsstrom $\mathbf{X}^0$, der bei fest vorgegebenem Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ und festgelegter Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ außerhalb der Anwendungsbereiche $B_{\mathrm{MIZ},q}$ und $B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$ der Beispiele 7.2 und 7.3 von Abschnitt 7.4 liegt und für den die zum jeweiligen Anwendungsbereich gehörige I-Beurteilung widersprüchlich (inkonsistent) zur B-Beurteilung ist. Außerdem kann ein Zahlungsstrom **X**, der zwar in diesen Anwendungsbereichen liegt, dennoch inkonsistente I-Beurteilungen aufweisen, wenn die Parameter q_K und $q_{int}(\mathbf{X})$ anders als bei der Festlegung des Anwendungsbereichs gewählt werden.

Beispiel 7.6 Zahlungsströme außerhalb bzw. innerhalb der Anwendungsbereiche $B_{\mathrm{MIZ},q}$ und $B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$ mit widersprüchlichen I- und B-Beurteilungen

1) Die Investition $\mathbf{X}^0 = (-1,4,-3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ mit der Endwertfunktion

$$E_2(\mathbf{X}^0,r) = -(r-1)(r-3) = -r^2 + 4r - 3$$

und den internen Zinsfaktoren $q_1 = 3$ und $q_2 = 1$ liegt nicht in den Anwendungsbereichen $B_{\mathrm{MIZ},q}$ und $B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$, wenn der Kalkulationszinsfaktors $q = q_K = 2$ und eine Interner Zinsfaktor-Funktion mit dem Funktionswert $q_{int}(\mathbf{X}^0) = q_2 = 1$ gewählt wird:
Die Investition $\mathbf{X}^0$ ist nämlich wegen $E_2(\mathbf{X}^0,q_K) = 1 > 0$ B-vorteilhaft, aber wegen $q_2 < q_K < q_1$ gemäß der zu $B_{\mathrm{MIZ},q}$ gehörigen I-Beurteilung I-neutral, also $\mathbf{X}^0 \notin B_{\mathrm{MIZ},q}$. Wegen $q_{int}(\mathbf{X}^0) = q_2 < q_K$ ist die Investition $\mathbf{X}^0$ gemäß der zu $B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$ gehörigen I-Beurteilung I-unvorteilhaft, aber B-vorteilhaft und somit $\mathbf{X}^0 \notin B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$.

2) Die oben angegebene Investition $\mathbf{X}^0 = (-1,4,-3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$ liegt in den Anwendungsbereichen $B_{\mathrm{MIZ},q}$ und $B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$, wenn der Kalkulationszinsfaktors $q = q_K = q_2 = 1$ und eine Interner Zinsfaktor-Funktion mit dem Funktionswert $q_{int}(\mathbf{X}^0) = q_2 = 1$ gewählt wird: Der Zahlungsstrom $\mathbf{X}^0$ liegt wegen $B_2(\mathbf{X}^0,q_K) = 0$ und $q_K = q_2 \in [q_{\min}(\mathbf{X}^0),q_{\max}(\mathbf{X}^0)]$ in $B_{\mathrm{MIZ},q}$ und wegen $q_{int}(\mathbf{X}^0) = q_K$ in $B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$. In beiden Anwendungsbereichen wird $\mathbf{X}^0$ als IB-indifferent beurteilt. Bei Abweichung von der jeweiligen Definition der I-Beurteilung kann aber für den Zahlungsstrom $\mathbf{X}^0$ auch eine IB-inkonsistente I-Beurteilung angegeben werden. Wählt man nämlich den internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X}^0) = q_1 = 3 > 1 = q_K$ für eine I-Beurteilung von $\mathbf{X}^0$, so erhält man eine I-Vorteilhaftigkeit im Widerspruch zur B-Indifferenz. △

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die Methode des internen Zinssatzes zur Beurteilung eines Zahlungsstroms in den zu den Anwendungsbereichen $B_{\mathrm{MIZ},q}$, $B_{\mathrm{MIZ},q,qint}$ und B_{MIZ} gehörigen Varianten nicht wie die anderen klassischen Methoden universell auf $\mathbb{R}^{n+1}$ einsetzbar ist. Will man dennoch auf einem eingeschränkten Anwendungsbereich Zahlungsströme mittels einer I-Beurteilung, also unter Verwendung eines Kalkulationszinsfaktors q_K und eines einzigen internen Zinsfaktors oder mehrerer interner Zinsfaktoren, als vorteilhaft, neutral oder unvorteilhaft beurteilen, so sind dabei zur Vermeidung von Widersprüchen gewisse Regeln zu beachten:

1) Wie bei den anderen klassischen Methoden ist vom Entscheider zunächst ein positiver Kalkulationszinsfaktor q_K festzulegen.
2) Es ist dann eine trichotomische I-Beurteilung zu definieren, sodass für einen I-beurteilbaren Zahlungsstrom genau eine der Beurteilungen ‚vorteilhaft', ‚neutral' oder ‚unvorteilhaft' gültig ist.
3) Es ist ein Anwendungsbereich dieser I-Beurteilung zu bestimmen, auf dem die I-Beurteilung konsistent (widerspruchsfrei) zur B-Beurteilung ist. Hierbei ergibt sich, dass die strenge I-Beurteilung einer Finanzierung Ungleichungen für den Kalkulationszinsfaktor und den (die) internen Zinsfaktor(en) verwendet, die entgegengesetzt zu den entsprechenden Ungleichungen einer Investition sind.
4) Für einen zu beurteilenden Zahlungsstrom ist zu prüfen, ob er im Anwendungsbereich liegt und welche der drei Beurteilungen exakt nach der vorgegebenen Definition auf ihn zutrifft.
5) Falls nicht schon bei der Zugehörigkeitsprüfung ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor bestimmt wurde, so kann jetzt noch ein derartiger Zinsfaktor oder können alle IB-konsistenten internen Zinsfaktoren ermittelt werden.

Bei allen Varianten der I-Beurteilung zeigt es sich, dass bei der im allgemeinen Fall nötigen Bestimmung sämtlicher interner Zinsfaktoren ein viel höherer Rechenaufwand betrieben wird als bei der Kapitalwertmethode, bei der nur der Barwert $B_n(\mathbf{X},q_K)$ zum Kalkulationszinsfaktor q_K berechnet wird. Darüber hinaus sind bei der Variante mit der Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ noch zwei Fragen zu klären. Erstens ist zu entscheiden, wie die Interner Zinsfaktor-Funktion zweckmäßig definiert werden soll. Zweitens ist für den zu beurteilenden Zahlungsstrom zu prüfen, ob er im Anwendungsbereich der Methode liegt. Wenn hierfür der Kapitalwert $B_n(\mathbf{X},q_K)$ des Zahlungsstroms zum Kalkulationszinsfaktor berechnet wird, so ist die I-Beurteilung kein Ersatz mehr für die Kapitalwertmethode. Wenn man zur Bestimmung des Vorzeichens von $B_n(\mathbf{X},q_K)$ die universell anwendbare IB-Beurteilung mit der rechtsseitigen Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ verwendet, bedeutet beispielsweise die beim Anwendungsbereich $B_{\mathrm{Inv},q,qint}$ zusätzlich auftretende Zinsfaktorbedingung $q_{int}(\mathbf{X}) = (>, <)\ q_K$ eine unnötige Einschränkung des Anwendungsbereichs. Besser nimmt man dann gleich die universelle IB-Beurteilung mit dem umfassenderen Anwendungsbereich.

7.8.2 Verallgemeinerung der I-Beurteilung zur universellen IB-Beurteilung

Sieht man einmal vom höheren Rechenaufwand gegenüber der Kapitalwertmethode ab, so können alle oben angeführten Probleme vermieden werden, wenn man die in Abschnitt 7.5 behandelte universell anwendbare IB-Beurteilung mit der zum Kalkulationszinsfaktor q_K gehörigen rechtsseitigen Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren benutzt. Diese I-Beurteilung lässt sich nur in der speziellen Menge der NU-, NG- und NF-Zahlungsströme auf die Verwendung eines einzigen internen Zinsfaktors reduzieren. Im allgemeinen Fall ist statt eines einzelnen internen Zinsfaktors die Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ zu verwenden. Man kann dann statt von der „Methode des internen Zinssatzes“ genauer von der „Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren“ (MVIZ) sprechen. Diese IB-Beurteilung ist universell auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert und äquivalent zu den anderen klassischen Beurteilungsmethoden mit konstantem Kalkulationszinsfaktor. Außerdem wird im folgenden Abschnitt 7.9 noch begründet, dass auch beim Vergleich von Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ mit der Vergleichsmethode (ID) diese IB-Beurteilung zu bevorzugen ist. Man erhält damit nämlich für den I-Vergleich den universellen ID-Vergleich, welcher der allgemeinste I-Vergleich, die Verallgemeinerung jedes ID-Vergleichs mit anderen I-Beurteilungen, die Verallgemeinerung jedes IV-Vergleichs und gleichwertig zu den anderen klassischen Vergleichsmethoden ist.

Will man die Methoden MIZ und MVIZ tatsächlich für die Beurteilung von Zahlungsströmen praktisch anwenden, so ist zu beachten, dass im Gegensatz zur Berechnung des Polynomwerts $E_n(\mathbf{X},q_K)$ die Nullstellenbestimmung für ein Polynom $E_n(\mathbf{X},r) = X_0r^n + \ldots + X_n$ in der Standarddarstellung mit den Koeffizienten X_j

($j = 0,\ldots,n$) schlecht konditioniert ist. Dabei können schon einfache Nullstellen schlecht konditioniert sein, während mehrfache Nullstellen stets schlecht konditioniert sind. Dies heißt, dass ein kleiner relativer Fehler in den als Ausgangsdaten vorgegebenen Koeffizienten X_j große relative Fehler in den Rechenresultaten für die Polynomnullstellen bewirkt. Dies kann dann zu einer falschen Bestimmung der Gesamtvielfachheit der reellen Nullstellen im Intervall $]q_K,\infty[$ und zu einer falschen Beurteilung von **X** führen. Eine ausführlichere Betrachtung zur Empfindlichkeit der Polynomnullstellen in Abhängigkeit von den Polynomkoeffizienten findet man bei Stoer (1994), S. 333–335.

7.9 I-Vergleich von NU-Zahlungsströmen bei NU-Differenz

In einigen Büchern der Investitionsrechnung und Finanzmathematik wird auch auf die Verwendung der Methode des internen Zinssatzes (MIZ) für den *Vergleich* von alternativen Zahlungsströmen eingegangen. Es werden dabei zwei verschiedene Methoden des I-Vergleichs (MIZ-Vergleichs), d. h. des Vergleichs von Zahlungsströmen mittels interner Zinssätze, verwendet.
Bei der ersten I-Methode (IV) (I steht für interne Zinssätze, V für Vergleich) werden „die“ beiden internen Zinssätze $i_{int}(\mathbf{X})$ und $i_{int}(\mathbf{Y})$ der Zahlungsströme **X** und **Y** miteinander *verglichen*:

(IV) Ist $i_{int}(\mathbf{X}) \gtreqless i_{int}(\mathbf{Y})$?

Bei der zweiten I-Methode (ID) (I steht für internen Zinssatz, D für Differenzzahlungsstrom-Beurteilung) wird der Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} := \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ *beurteilt* durch den Vergleich „des“ internen Zinssatzes $i_{int}(\mathbf{D})$ von **D** mit einem Kalkulationszinssatz i_K:

(ID) Ist $i_{int}(\mathbf{D}) \gtreqless i_K$?

Diese I-Methoden werden hinsichtlich der **Konsistenz des Vergleichs** im Zusammenhang mit der E-Methode (EF) (E steht für Endwertmethode bzw. für die dazu äquivalente Barwertmethode oder Kapitalwertmethode, F für den festen Kalkulationszinsfaktor) betrachtet, bei der ein fest gewählter positiver Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ für den Endwertvergleich (E-Vergleich) der Zahlungsströme **X** und **Y** bzw. gleichbedeutend dazu für die Endwertbeurteilung des Differenzzahlungsstroms **D** verwendet wird:

(EF) Ist $E_n(\mathbf{X},q_K) \gtreqless E_n(\mathbf{Y},q_K)$ bzw. $E_n(\mathbf{D},q_K) \gtreqless 0$?

Es wird untersucht, ob für bestimmte Zahlungsstrompaare der gewählte I-Vergleich und der E-Vergleich übereinstimmende (widerspruchsfreie, konsistente) Vergleichsergebnisse liefern.

Da der E-Vergleich der Zahlungsströme **X** und **Y** gleichbedeutend ist zur E-Beurteilung von $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ und diese wiederum zu der in Abschnitt 7.5 behandelten universell anwendbaren IB-Beurteilung von **D** mittels der internen Zinsfaktoren von **D**, ist jetzt schon klar, dass weitere Bedingungen an die internen Zinsfaktoren von **D** oder an die internen Zinsfaktoren von **X** und **Y**, die über die IB-Beurteilung von **D** hinausgehen, zu einer Einschränkung des Anwendungsbereichs des I-Vergleichs führen. Der universell auf ganz $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ definierte I-Vergleich wird also durch die IB-Beurteilung des Differenzzahlungsstroms $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ gegeben. Er wird in Abschnitt 7.13 behandelt.

Aufgrund der vielfältigen Betrachtungen zur Entwicklung einer brauchbaren Methode des internen Zinssatzes für einen Vergleich von Zahlungsströmen werden diesbezügliche Untersuchungen aber auch hier doch noch etwas ausführlicher in den Abschnitten 7.9 bis 7.12 durchgeführt. Dabei werden spezielle Anwendungsbereiche von Varianten der Methoden (ID) und (IV) des I-Vergleichs angegeben, in denen diese ergebniskonsistent zur Endwertmethode (EF) sind. Die dabei noch auftretende Einschränkung des Anwendungsbereichs ergibt sich dadurch, dass von vornherein nur bestimmte Paare von Zahlungsströmen betrachtet werden oder dass die konsistente Anwendbarkeit der speziellen Methode mit einzelnen internen Zinsfaktoren nur auf einer Teilmenge möglich ist. Dabei wird auch im Sinne einer Plausibilisierung der Methoden (ID) und (IV) dargestellt, welche speziellen Zahlungsstrompaare den Anlass gegeben haben könnten, den betrachteten I-Vergleich anstelle des E-Vergleichs durchzuführen.

Zahlungsstrombeispiele zur Überprüfung der Konsistenz der Methoden (IV) und (EF) findet man in der Literatur bei Blohm und Lüder (1995), S. 97 $n = 3$, Kruschwitz (1998), S. 88f $n = 1$, und Götze (2008), S. 74, 98–103 $n = 5$. In allen diesen drei Beispielen wird der Fall dargestellt, dass der E-Vergleich (EF) zu einem bestimmten Kalkulationszinsfaktor q_K nicht konsistent zum I-Vergleich (IV) mit den internen Zinsfaktoren q_X und q_Y von **X** bzw. **Y** ist.
Beispiele von Zahlungsstrompaaren **X** und **Y** zur Konsistenz der Methoden (ID) und (EF), also mit Verwendung des internen Zinsfaktors q_D des Differenzzahlungsstroms **D**, geben Hax (1993), S. 41ff. ($n = 5$; $q = q_K = 1{,}10 < q_D = 1{,}22$; $q_X = 1{,}25 < q_Y = 1{,}30$; entspricht Fall 3 $\wedge$ i der Nichtkonsistenz der Methode (IV) im folgenden Abschnitt 7.9.2), Blohm und Lüder (1995), S. 97 ($n = 3$; $q_K = 1{,}05 < q_D = 1{,}14$; $q_X = 1{,}25 < q_Y = 1{,}34$; Fall 3 $\wedge$ i), S. 99 ($n = 5$; $q_K = 1{,}05 < q_D = 1{,}158$; $q_X = 1{,}13 > q_Y = 1{,}12$; Fall 3 $\wedge$ iii der Konsistenz der Methode (IV)), Tietze (1999), S. 233 ($n = 3$; $q_K = 1{,}10 < q_D = 1{,}14$; $q_X = 1{,}24 < q_Y = 1{,}31$; Fall 3 $\wedge$ i), Caprano und Wimmer (1999), S. 142 ($n = 2$; $q_K = 1{,}10 < q_D = 1{,}1428$; $q_X = 1{,}1701 < q_Y = 1{,}1774$; Fall 3 $\wedge$ i), und Götze (2008), S. 74, 104 ($n = 5$; $q_K = 1{,}08 < q_D = 1{,}08899$; $q_X = 1{,}1731 < q_Y = 1{,}2504$; Fall 3 $\wedge$ i). Bei diesen Beispielen für Zahlungsstrompaare ist der E-Vergleich (EF) zu einem bestimmten Kalkulationszinsfaktor q_K konsistent zum I-Vergleich (ID) und mit Ausnahme des Beispiels von Blohm und Lüder (1995), S. 99, nicht konsistent zum I-Vergleich (IV).

7.9.1 Konsistenz von (ID) und (EF)

Bei den in obiger Literatur angegebenen Zahlenbeispielen zur Methode (ID) wird für den I-Vergleich von Zahlungsströmen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ der im Allgemeinen nichtreale Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** verwendet. Dabei werden jeweils Normalinvestitionen **X** und **Y** betrachtet, für welche auch noch der Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** eine Normalinvestition bzw. bei Hax (1993) eine reguläre Investition ist. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten allgemeiner auch für NU-Investitionen **X** und **Y** (Definition siehe Abschnitt 7.2), deren Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** ebenfalls eine **NU-Investition** ist. Somit hat die zugehörige Barwertfunktion $B_n(\mathbf{D},q) = E_n(\mathbf{D},q)/q^n$ genau eine positive Nullstelle $q_D = q_{int}(\mathbf{D})$, die auch noch eine Vorzeichenwechselstelle ist. Geometrisch bedeutet dies, dass die Graphen der Barwertfunktionen $B_n(\mathbf{X},q)$ und $B_n(\mathbf{Y},q)$ über der positiven Halbachse $q > 0$ genau einen Schnittpunkt besitzen und zwar genau über der Stelle q_D. In Abbildung 7.10 sind die Graphen der Barwertfunktionen derartiger Zahlungsstrompaare (**X**,**Y**) dargestellt.

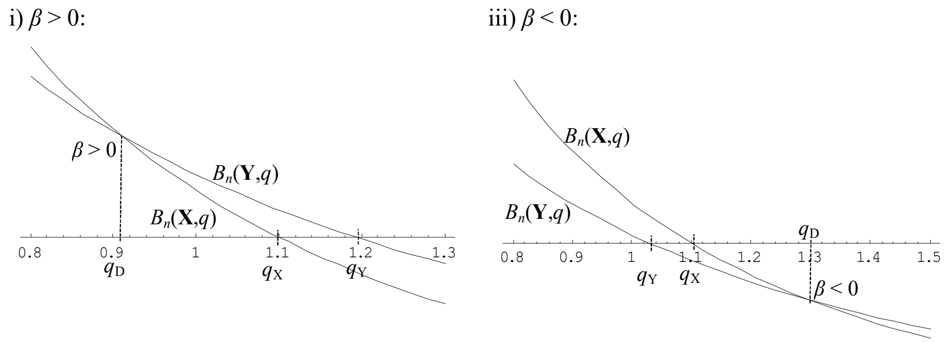


Abb. 7.10 Die Graphen der Barwertfunktionen $B_n(\mathbf{X},q)$ und $B_n(\mathbf{Y},q)$ der NU-Investitionen **X** und **Y** mit den internen Zinsfaktoren $q_X = q_{int}(\mathbf{X})$, $q_Y = q_{int}(\mathbf{Y})$ bei einer NU-Differenzinvestition **D** = **X** - **Y** mit dem internen Zinsfaktor $q_D = q_{int}(\mathbf{D})$ in den Fällen $\beta > 0$ und $\beta < 0$

In Abhängigkeit von der Lage des Kalkulationszinsfaktor $q = q_K \in \,]0,\infty[$ zum positiven internen Zinsfaktor q_D von **D** gelten die folgenden Ungleichungen bzw. Relationen für den **B-Vergleich** der (NU-)Zahlungsströme **X** und **Y** mit NU-Differenzzahlungsstrom **D** bzw. für die B-Beurteilung von **D**:

1) Für $q > q_D$: $B_n(\mathbf{X},q) - B_n(\mathbf{Y},q) = B_n(\mathbf{D},q) < 0$ bzw. $\mathbf{X} \prec_{B,q} \mathbf{Y}$,
2) für $q = q_D$: $B_n(\mathbf{X},q) - B_n(\mathbf{Y},q) = B_n(\mathbf{D},q) = 0$ bzw. $\mathbf{X} \sim_{B,q} \mathbf{Y}$,
3) für $0 < q < q_D$: $B_n(\mathbf{X},q) - B_n(\mathbf{Y},q) = B_n(\mathbf{D},q) > 0$ bzw. $\mathbf{X} \succ_{B,q} \mathbf{Y}$.

Für die betrachteten speziellen Paare (**X**,**Y**) von Zahlungsströmen steht mit dieser Fallunterscheidung für die Lagebeziehung von q und q_D auch ein **I-Vergleich** nach der Methode (ID), also nach der I-Beurteilung des NU-Zahlungsstroms **D** gemäß Abschnitt 7.2 mittels des internen Zinsfaktors q_D von **D** und des beliebig gewählten positiven Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$, zur Verfügung, der konsistent zur B-Beurteilung von **D** bzw. zum B-Vergleich (Barwertvergleich, Kapitalwertvergleich) der Zahlungsströme **X** und **Y** ist. Aus der Konsistenz der I-Beurteilung von **D** folgt hier die Konsistenz des I-Vergleichs von **X** und **Y**. Die IB-konsistente I-Beurteilung einer regulären Investition oder einer NU-Investition wurde ausführlich in den Abschnitten 7.1 und 7.2 behandelt. Im Gegensatz zur nachfolgenden Methode (IV) wird hier bei der Methode (ID) nur für den Zahlungsstrom **D** und nicht für die Zahlungsströme

X und **Y** verwendet, dass ein NU-Zahlungsstrom vorliegt. Somit wird für ein spezielles Paar (**X**,**Y**) von Zahlungsströmen **X** und **Y**, deren Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** eine NU-Investition ist, der **IB-konsistente I-Vergleich nach der Methode (ID)** mittels des positiven internen Zinsfaktors q_D der Differenzinvestition **D** und des beliebig gewählten Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ folgendermaßen beschrieben:

ID-Vergleich von Zahlungsströmen **X** und **Y** mit NU-Investition **D** = **X** - **Y**:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X} \succ_{\mathrm{ID},q} \mathbf{Y} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist ID-vorteilhafter als }\mathbf{Y}\text{)} &&:\Leftrightarrow \mathbf{D} \succ_\mathrm{I} \mathbf{O} &&\Leftrightarrow q_\mathrm{D} > q;\\
&\mathbf{X} \sim_{\mathrm{ID},q} \mathbf{Y} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist ID-indifferent zu }\mathbf{Y}\text{)} &&:\Leftrightarrow \mathbf{D} \sim_\mathrm{I} \mathbf{O} &&\Leftrightarrow q_\mathrm{D} = q;\\
&\mathbf{X} \prec_{\mathrm{ID},q} \mathbf{Y} \text{ (}\mathbf{X}\text{ ist ID-unvorteilhafter als }\mathbf{Y}\text{)} &&:\Leftrightarrow \mathbf{D} \prec_\mathrm{I} \mathbf{O} &&\Leftrightarrow q_\mathrm{D} < q.
\end{aligned}$$

Bei der Beurteilung des NU-Differenzzahlungsstroms **D** werden hier die Relationsbezeichnungen $\succ_\mathrm{I}$, $\sim_\mathrm{I}$ und $\prec_\mathrm{I}$ des Abschnitts 7.2 für NU-Zahlungsströme verwendet, wobei der Index I auf die Beurteilung mittels eines internen Zinssatzes bzw. internen Zinsfaktors hindeutet. Eine Verallgemeinerung dieses I-Vergleichs zur universell anwendbaren Methode (ID) für beliebige Zahlungsströme **X** und **Y** wird im Abschnitt 7.13 beschrieben.

7.9.2 Konsistenz von (IV) und (EF)

Für die hier betrachteten **NU-Investitionen X** und **Y** existiert jeweils ein einziger positiver interner Zinsfaktor q_X bzw. q_Y, der auch eine Vorzeichenwechselstelle der zugehörigen Barwertfunktion ist. Auf Grund der zusätzlichen Voraussetzung, dass auch der Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** eine NU-Investition ist, erhält man die oben in den Fällen 1), 2) und 3) angegebene Vorzeichenverteilung für die Barwertfunktion $B_n(\mathbf{D},q)$ bzw. die angegebenen Ungleichungen für die Barwertfunktionen $B_n(\mathbf{X},q)$ und $B_n(\mathbf{Y},q)$ in den Intervallen $]q_\mathrm{D},\infty[$ und $]0,q_\mathrm{D}[$. Wie in Abbildung 7.10 dargestellt ist, erhält man damit auch in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Funktionswertes

$$\beta := B_n(\mathbf{X},q_\mathrm{D}) = B_n(\mathbf{Y},q_\mathrm{D}) \gtreqless 0$$

(zum Schnittpunkt der Graphen) die vollständige Fallunterscheidung für die gegenseitige Lage der Nullstellen $q_\mathrm{X} = q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_\mathrm{Y} = q_{int}(\mathbf{Y})$ der Barwertfunktionen der NU-Investitionen **X** und **Y** und damit den **I-Vergleich** nach der Methode (IV) mit den internen Zinsfaktoren q_X und q_Y:

i) $\beta > 0$: $q_\mathrm{D} < q_\mathrm{X} < q_\mathrm{Y}$ $\Leftrightarrow$: $\mathbf{X} \prec_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ (**X** ist IV-unvorteilhafter als **Y**),
ii) $\beta = 0$: $q_\mathrm{D} = q_\mathrm{X} = q_\mathrm{Y}$ $\Leftrightarrow$: $\mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ (**X** ist IV-indifferent zu **Y**),
iii) $\beta < 0$: $q_\mathrm{Y} < q_\mathrm{X} < q_\mathrm{D}$ $\Leftrightarrow$: $\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ (**X** ist IV-vorteilhafter als **Y**).

Der I-Vergleich nach der Methode (IV), also der Vergleich der hier eindeutig bestimmten positiven internen Zinsfaktoren $q_\mathrm{X} = q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_\mathrm{Y} = q_{int}(\mathbf{Y})$ der betrachteten Zahlungsströme **X** und **Y**,

$$q_{int}(\mathbf{X}) \gtreqless q_{int}(\mathbf{Y}),$$

wird hier auch durch die drei möglichen Lagebeziehungen der beiden internen Zinsfaktoren q_X und q_Y zum internen Zinsfaktor q_D charakterisiert. Durch die Voraussetzung zungen an die Zahlungsströme **X**, **Y** und **D** ist hier zunächst der I-Vergleich nach der Methode (IV) eindeutig trichotomisch definiert. Es ist damit aber noch nichts über die Konsistenz dieses IV-Vergleichs zum B-Vergleich gesagt.

Der **B-Vergleich** von **X** und **Y** wurde oben durch die Fälle 1), 2) und 3) beschrieben. Demzufolge ist die **Konsistenz** (Widerspruchsfreiheit, Übereinstimmung) des IV-Vergleichs mit dem B-Vergleich für diese Zahlungsströme **X** und **Y** genau in den folgenden drei Fällen gegeben:

I) $\mathbf{X} \prec_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X} \prec_{\mathrm{B},q} \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ i) $q_\mathrm{D} < q_\mathrm{X} < q_\mathrm{Y}$ $\wedge$ 1) $q > q_\mathrm{D}$;
II) $\mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X} \sim_{\mathrm{B},q} \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ ii) $q_\mathrm{D} = q_\mathrm{X} = q_\mathrm{Y}$ $\wedge$ 2) $q = q_\mathrm{D}$;
III) $\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X} \succ_{\mathrm{B},q} \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ iii) $q_\mathrm{Y} < q_\mathrm{X} < q_\mathrm{D}$ $\wedge$ 3) $0 < q < q_\mathrm{D}$.

Ein Zahlungsstrompaar (**X**,**Y**) von NU-Investitionen **X** und **Y**, deren Differenzzahlungsstrom **D** eine NU-Investition ist, liegt also genau dann im **Anwendungsbereich** (Konsistenzbereich) des Vergleichs (IV), wenn zum fest vorgegebenen Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ für die internen Zinsfaktoren q_X von **X**, q_Y von **Y** und q_D von **D** = **X** - **Y** eine der drei Bedingungen I), II) oder III) erfüllt ist. Zur Zinsfaktorbedingung für q_D und $q = q_K$ ($q_\mathrm{D} < q$, $q_\mathrm{D} = q$, $q_\mathrm{D} > q$) für den B-Vergleich tritt hier noch die Lagebeziehung der internen Zinsfaktoren q_X und q_Y bezüglich des internen Zinsfaktors q_D für den IV-Vergleich hinzu (q_X und q_Y liegen beide rechts, in, links von q). Die Zinsfaktorbedingung q_D < (=, >) q ist dabei äquivalent zur Barwertbedingung $B_n(\mathbf{D},q)$ < (=, >) 0 bzw. zur Endwertbeurteilung $E_n(\mathbf{D},q)$ < (=, >) 0 und zum Endwertvergleich $E_n(\mathbf{X},q)$ < (=, >) $E_n(\mathbf{Y},q)$.
Damit wird für ein spezielles Paar (**X**,**Y**) von NU-Investitionen **X** und **Y**, deren Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** auch eine NU-Investition ist, der IB-konsistente I-Vergleich nach der Methode (IV) mittels der positiven internen Zinsfaktoren q_X, q_Y und q_D von **X**, **Y** und **D** und des beliebig gewählten Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ (> 0) folgendermaßen beschrieben:

Konsistenter IV-Vergleich von NU-Investitionen **X** und **Y** mit NU-Investition **D** = **X** - **Y**:

$\mathbf{X} \prec_{\mathrm{I,Inv,B},q} \mathbf{Y}$ (**X** ist KIV-unvorteilhafter als **Y**)
$:\Leftrightarrow q_\mathrm{X} < q_\mathrm{Y} \wedge q_\mathrm{D} < q.$
$\mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,Inv,B},q} \mathbf{Y}$ (**X** ist KIV-indifferent zu **Y**)
$:\Leftrightarrow q_\mathrm{X} = q_\mathrm{Y} \wedge q_\mathrm{D} = q;$
$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,Inv,B},q} \mathbf{Y}$ (**X** ist KIV-vorteilhafter als **Y**)
$:\Leftrightarrow q_\mathrm{X} > q_\mathrm{Y} \wedge q_\mathrm{D} > q;$

Aus dieser Beschreibung des Anwendungsbereichs (Konsistenzbereichs) der Methode (IV) für die betrachteten Zahlungsstrompaare folgt, dass für ein entsprechendes Zahlungsstrompaar (**X**,**Y**) die Konsistenz in Abhängigkeit von $\beta = \beta(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ nur für einen bestimmten Kalkulationszinsfaktor-Bereich vorliegt, nämlich im Fall i) $\beta > 0$ für $q > q_\mathrm{D}$, im Fall ii) $\beta = 0$ für $q = q_\mathrm{D}$ und im Fall iii) $\beta < 0$ für $0 < q < q_\mathrm{D}$. Dass es tatsächlich Zahlungsstrompaare (**X**,**Y**) im Anwendungsbereich gibt, zeigt beispielsweise das oben bereits erwähnte Zahlenbeispiel von Blohm und Lüder (1995), S. 99 ($n = 5$; $q = q_K = 1{,}05 < q_\mathrm{D} = 1{,}158$; $q_\mathrm{Y} = 1{,}12 < q_\mathrm{X} = 1{,}13$; Fall III = 3 $\wedge$ iii).

Umgekehrt liegt die Nichtkonsistenz vor im Fall i) $\beta > 0$ für $0 < q \leq q_D$, im Fall ii) $\beta = 0$ für $q \neq q_D$ und im Fall iii) $\beta < 0$ für $q \geq q_D$. Zu jedem derartigen Paar (**X**,**Y**) gibt es also auch Kalkulationszinsfaktoren $q = q_K$, für welche die Konsistenz nicht vorliegt, also der IV-Vergleich und der B-Vergleich von **X** und **Y** widersprüchliche Ergebnisse liefern und das Paar (**X**,**Y**) nicht im Anwendungsbereich der Methode (IV) liegt. In allen oben angeführten Beispielen der Literatur mit Ausnahme von Blohm und Lüder (1995), S. 99, wird nun jeweils gerade ein Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ im Bereich der Nichtkonsistenz verwendet. Weil nun für bestimmte Kalkulationszinsfaktoren die Nichtkonsistenz der beiden Vergleiche vorliegen kann und evtl. auch weil darüber hinaus die internen Zinsfaktoren $q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_{int}(\mathbf{Y})$ selbst im Allgemeinen nicht beide gleichzeitig ökonomisch interpretiert werden können (Begründung folgt in Abschnitt 7.14), wird in der Literatur die Methode (IV) mit ihrem Vergleich der internen Zinsfaktoren als unbrauchbar angesehen und abgelehnt und stattdessen für den oben dargestellten Spezialfall von Zahlungsstrompaaren (**X**,**Y**) die für jeden Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ IB-konsistente Methode (ID) mit dem positiven internen Zinsfaktor des Differenzzahlungsstroms empfohlen. In diesem Zusammenhang erwähnt Kruschwitz (1978), S. 96, (1998), S. 87, dass schon zu Beginn der 1970er Jahre in der Literatur der Investitionsrechnung (Haberstock und Dellmann 1971, S. 206) vorgeschlagen wurde, die Methode (IV) des internen Zinssatzes als Vergleichskriterium aus den Lehrbüchern der Investitionsrechnung zu streichen.

Nichtsdestotrotz werden in den nachfolgenden Abschnitten 7.10 und 7.11 noch spezielle Klassen von Zahlungsströmen (Kreditzahlungströme mit gleichem Restschuldenvektor und direkt vergleichbare reguläre Finanzierungen) dargestellt, für die der I-Vergleich nach der Methode (IV) konsistent zum E-Vergleich, ja sogar zum Vergleich mit der natürlichen Halbordnung ist. Außerdem wird im nachfolgenden Abschnitt 7.12 auch noch der Anwendungsbereich der Methode (IV) beispielhaft für zwei trichotomisch definierte Varianten untersucht und deren Konsistenzbereich hinsichtlich des E-Vergleichs, der SE-Halbordnung und der natürlichen Halbordnung beschrieben. Dabei wird gemäß der Tradition der bisherigen Literatur der Blick noch auf einen einzelnen internen Zinsfaktor des Zahlungsstroms gerichtet (im ersten Beispiel zumindest für den schwachen I-Vergleich $\trianglerighteq_{\mathrm{I,Inv}}$). Auch hierbei zeigt sich aber, dass bei der Methode (IV) grundsätzlich in den Teilbereichen (Echtbessermenge, Neutralitätsklasse, Echtschlechtermenge) des Anwendungsbereichs (Konsistenzbereichs) neben der Zinsfaktorbedingung für die internen Zinsfaktoren q_X und q_Y von **X** und **Y** auch die entsprechende Endwertbedingung für den Endwertvergleich von **X** und **Y** bzw. die Endwertbeurteilung von **D** auftritt:

$$E_n(\mathbf{D},q_K) \gtreqless 0.$$

In Abschnitt 7.5 wurde bereits in einer Anmerkung zum I-Vergleich begründet, dass diese Endwertbedingung im Allgemeinen nicht mittels der internen Zinsfaktoren von **X** und **Y** charakterisiert werden kann. Sie kann aber stets mittels der internen Zinsfaktoren von **D** charakterisiert werden und zwar mit der universell anwendbaren IB-Beurteilung von **D**. Daraus folgt, dass der Anwendungsbereich irgend einer speziell

definierten Variante der Methode (IV) stets nur eine Teilmenge des Anwendungsbereichs $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ des universellen ID-Vergleichs sein kann. Der in Abschnitt 7.13 behandelte universelle ID-Vergleich ist dabei diejenige Variante der Vergleichsmethode (ID), bei welcher der Differenzzahlungsstrom **D** mit der IB-Beurteilung bewertet wird. Die Einschränkung der Variante von (IV) wird also genau durch die verwendete Zinsfaktorbedingung für die Zinsfaktoren von **X** und **Y** beschrieben. Damit ist nun begründet, dass die universelle ID-Methode des I-Vergleichs für jede Variante der Methode (IV) eine Verallgemeinerung darstellt und daher dieser vorzuziehen ist. Die durch die Zinsfaktorbedingung resultierende Einschränkung der Varianten der Methode (IV) auf einen engeren Anwendungsbereich wird im Abschnitt 7.12 noch durch Grafiken illustriert (Abb. 7.12 – 7.15). Verwendet man bei der Methode (ID) statt der IB-Beurteilung aber eine andere speziellere I-Beurteilung mit einem einzelnen internen Zinsfaktor, so ergibt sich auch bei dieser Variante der Methode (ID) nur ein eingeschränkter Anwendungsbereich.
Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 7.5 zur I-Beurteilung eines einzelnen Zahlungsstroms ist damit auch das Mysterium eines I-Vergleichs mittels interner Zinsfaktoren der beiden Zahlungsströme geklärt. Die Problematik bestand bisher darin, dass ein I-Vergleich von Zahlungsströmen im Gegensatz zu den anderen klassischen Vergleichsmethoden nur auf einer eingeschränkten Menge von Zahlungsströmen anwendbar ist. In Abhängigkeit von der speziellen Definition des I-Vergleichs ist dabei erst der Anwendungsbereich zu bestimmen, in dem der I-Vergleich ergebniskonsistent zur Kapitalwertmethode ist. Für ein zu vergleichendes Zahlungsstrompaar muss zuerst geprüft werden, ob es im Anwendungsbereich der Variante liegt. Weiter muss dann die Auswahl eines Paars von IB-konsistenten internen Zinsfaktoren geklärt werden, mit dem der I-Vergleich durchgeführt wird. Diese Probleme werden nun dadurch gelöst, dass der Blick von den einzelnen internen Zinsfaktoren der Zahlungsströme **X**, **Y** und **D** weg auf die Gesamtheit der internen Zinsfaktoren von **D** im Intervall $]q_K,\infty[$ gerichtet wird. Mit der in Abschnitt 7.13 folgenden Verallgemeinerung des I-Vergleichs zum universell anwendbaren ID-Vergleich ist der I-Vergleich dann auch wie die anderen klassischen Methoden IB-konsistent in ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ anwendbar. Die Auswahl eines IB-konsistenten internen Zinsfaktors von **D** wird dabei gar nicht mehr benötigt. Die ökonomische Interpretation des universellen ID-Vergleichs und der internen Zinsfaktoren q_X, q_Y und q_D selbst wird im Abschnitt 7.14 behandelt.

7.10 I-Vergleich von Kreditzahlungsströmen mit gleichem Restschuldenvektor

Zur Plausibilität des IV-Vergleichs, d. h. des I-Vergleichs nach Methode (IV), können jetzt zwei Klassen von Zahlungsstrompaaren angegeben werden, für die der I-Vergleich nicht nur zum E-Vergleich konsistent ist, sondern sogar zum strengeren Vergleich mittels der natürlichen Halbordnung.

Die Inspiration zur Anwendung des I-Vergleichs von Zahlungsströmen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (X_0, $Y_0 \neq 0$) nach der Methode (IV) entspringt vermutlich den folgenden praktischen Erfahrungen mit besonderen Zahlungsströmen im Kreditwesen.

1) Bei gewissen Zahlungsströmen im Kreditwesen erhöhen sich mit einem höheren Kreditzinsfaktor auch die Absolutbeträge der Rückzahlungen des Kreditnehmers an die Bank als Kreditgeber bzw. verkleinern sich die vorzeichenversehenen Zahlungen X_j des Kreditzahlungsstroms $\mathbf{X}$ aus der Sicht des Kreditnehmers.
2) Umgekehrt bewirken bei bestimmten Kreditzahlungsströmen höhere Gebühren bzw. höhere Rückzahlungsbeträge für den Kreditnehmer niedrigere vorzeichenversehene Zahlungen im Kreditzahlungsstrom und einen höheren Effektivzinsfaktor (internen Zinsfaktor) des Kreditzahlungsstroms.
3) Aus den ersten beiden Erfahrungen ergibt sich, dass ein Paar ($\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$) dieser speziellen Kreditzahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ genau dann direkt vergleichbar ist, wenn die entsprechende (richtige!) Ungleichung für deren Kreditzinsfaktoren $q_{\mathrm{X}} = q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_{\mathrm{Y}} = q_{int}(\mathbf{Y})$ gilt: Beispielsweise gilt für diese Finanzierungen die Zahlungsstromungleichung $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ genau dann, wenn die richtige Zinsfaktorungleichung $q_{\mathrm{X}} \geq q_{\mathrm{Y}}$ gültig ist.

Die letzte Annahme unterstellt, dass die jeweils betrachteten und zu vergleichenden Kreditzahlungsströme nicht nur über die Kreditzinsfaktoren, sondern auch direkt und dabei mit der richtigen Zahlungsstromungleichung verglichen werden können. Ein derartiges Paar ($\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$) von Kreditzahlungsströmen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ liegt somit notwendig im Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I},N}$ des IV-Vergleichs, in dem der I-Vergleich und der Vergleich mittels der natürlichen Halbordnung $N = \leq$ übereinstimmende Ergebnisse bringen. Bei einem direkt möglichen Vergleich der Zahlungsströme wird man sich in der Praxis wohl kaum mehr die Mühe machen, noch deren interne Zinsfaktoren zu berechnen und zu vergleichen. Aber dennoch ist der Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I},N}$ von theoretischem Interesse, da er auch im Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I,E},q}$ des IV-Vergleichs liegt, in dem dieser konsistent zur Endwertmethode ist.
Für jede beliebige Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ gibt es spezielle Klassen von Zahlungsströmen, die in diesem Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I},N}$ vorkommen. Nachfolgend kann nämlich die Gültigkeit der obigen Aussage 3) für gewisse Spezialfälle auch mathematisch begründet werden.

Im einem ersten Spezialfall werden Kreditzahlungsströme mit gleichem nichtnegativen Restschuldenvektor behandelt. Diese Zahlungsströme besitzen einen (positiven oder nichtpositiven) VK-Zinsfaktor, sie müssen aber nicht notwendig reguläre Finanzierungen (mit einem positiven Kreditzinsfaktor) sein. Durch ein Beispiel für Kreditzahlungsströme mit verschiedenen Restschuldenvektoren wird aber gezeigt, dass die obigen Annahmen 1), 2) und 3) für Paare von Kreditzahlungsströmen (mit VK-Zinsfaktor und damit nichtnegativem Restschuldenvektor) im Allgemeinen nicht gültig sind.

Im einem zweiten Spezialfall werden im darauffolgenden Abschnitt 7.11 direkt vergleichbare reguläre Finanzierungen betrachtet, die zwar einen positiven VK-Zinsfaktor besitzen, aber nicht den gleichen Restschuldenvektor aufweisen müssen. Die hierbei hergeleiteten Resultate werden in einem mathematischen Satz zusammengefasst, der die streng monotone Abhängigkeit des Effektivzinssatzes einer regulären Finanzierung von Gebühren bzw. von Tilgungszuschüssen beschreibt.

In beiden Spezialfällen wird zum I-Vergleich der VK-Zinsfaktor der Zahlungsströme verwendet, sodass hierbei implizit eine Interner Zinsfaktor-Funktion verwendet wird. Wie schon in Abschnitt 7.3 bei den hinreichenden Bedingungen für (NF) erwähnt wurde, ist dabei ein positiver VK-Zinsfaktor des Zahlungsstroms **X** eindeutig bestimmt, dagegen ein nichtpositiver VK-Zinsfaktor nicht eindeutig bestimmt.

Analoge Aussagen gelten auch für Investitionen. Der aus der Sicht des Kreditnehmers betrachtete Kreditzahlungsstrom ist nämlich aus der Sicht der Bank ein Anlagezahlungsstrom, eine Finanzinvestition. So gilt die Aussage 3) auch für Anlagezahlungsströme **X** mit gleichem nichtnegativen Kontostandsvektor (bei der Buchung von **X** zu Lasten des Kontos) und für direkt vergleichbare reguläre Investitionen. Dabei kann es sich um Finanzinvestitionen oder um reale Investitionen handeln. Eine reale Investition mit nichtpositivem Horner-Schema-Vektor lässt sich auch als eine Finanzinvestition interpretieren, wenn der Zahlungsstrom fiktiv zu Lasten eines Verrechnungskontos gebucht und mit dem internen Zinsfaktor verzinst wird. Bei den hier betrachteten Investitionen soll der fiktive Kontostand auf dem Verrechnungskonto bzw. das „in der Investition gebundene Kapital" im Zeitintervall $[0,n\text{-}1]$ keinen Vorzeichenwechsel aufweisen. Die zu den obigen Aussagen 1), 2) und 3) analogen Erfahrungen mit speziellen Anlagezahlungsströmen könnten demnach ebenso zur Verwendung des I-Vergleichs motiviert haben.

Beispiel 7.7 Direkt vergleichbare Kreditzahlungsströme mit gleichem Restschuldenvektor

Ein Kreditzahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit Endschuld $R_n = 0$ ist eine Finanzierung ($X_0 > 0$) und ein (in Abschnitt 7.1.3 definierter) Verrechnungskontozahlungsstrom (VK-Zahlungsstrom), also eine Finanzierung mit einem internen Zinsfaktor $q_1 = q_{int}(\mathbf{X})$ mit den Eigenschaften eines Verrechnungskontozinsfaktors (VK-Zinsfaktors), hier auch Kreditzinsfaktor oder Darlehenszinsfaktor genannt. Dies bedeutet, dass der zu **X** und q_1 gehörige Horner-Schema-Vektor

$$\mathbf{E}(q_1) = (E_0(q_1), E_1(q_1), \ldots, E_n(q_1))^{\mathsf{T}}$$

nichtnegativ ist, also keinen Vorzeichenwechsel aufweist. Für die Horner-Schema-Werte $E_j(q_1) = E_j(\mathbf{X},q_1)$ ($j = 0,\ldots,n$) gilt also

$$E_0(q_1) = X_0 > 0,$$

$$E_j(q_1) = E_{j\text{-}1}(q_1)\cdot q_1 + X_j = \sum_{k=0}^{j} X_k q_1^{\,j-k} \geq 0 \quad \text{für } j = 1,\ldots,n\text{-}1,$$

$$E_n(q_1) = 0.$$

Da die Zahlungen X_j des Kreditzahlungsstroms **X** *zu Lasten* des Kreditkonto des Kreditnehmers bei der Bank gebucht werden, gelten für die Restschulden R_j des Kreditnehmers und die Kontostände C_j des Kreditkontos die folgenden Ungleichungen:

$$C_j = -R_j = -E_j(q_1) \leq 0 \quad \text{für } j = 0,\ldots,n.$$

Mit dem Kreditzinssatz $i_1 = q_1 - 1$, der zur nichtnegativen Restschuld $R_{j\text{-}1}$ berechneten Zinszahlung

$$Z_j := R_{j\text{-}1} i_1$$

und der Kontostandsänderung (Tilgungsrate)

$$\begin{aligned} T_j &:= \Delta C_j = C_j - C_{j\text{-}1} \\ &= R_{j\text{-}1} - R_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= E_{j-1}(q_1) - E_j(q_1)\\&= E_{j-1}(q_1) - E_{j-1}(q_1)\cdot q_1 - X_j\\&= - i_1\cdot R_{j-1} - X_j\\&= - Z_j - X_j\end{aligned}$$

($T_0 = C_0 = - X_0$, $C_{-1} = 0$) erhält man für den auf das Kreditkonto eingezahlten Zahlungsstrom $\mathbf{A} := - \mathbf{X}$, also den Annuitätenvektor, die additive Zerlegung in die Tilgungsraten T_j und die Zinszahlungen Z_j:

$$A_j = - X_j = T_j + Z_j.$$

Mit dem Tilgungsvektor $\mathbf{T} = (T_0,\ldots,T_n)^\mathsf{T}$, dem Restschuldenvektor

$$\mathbf{R} = (R_0,\ldots,R_{n-1},R_n)^\mathsf{T} = \mathbf{E}(q_1) \mathrel{\dot{>}} \mathbf{O}$$

und dem zeitlich verschobenen Restschuldenvektor

$$\tilde{\mathbf{R}} = (0,R_0,\ldots,R_{n-1})^\mathsf{T} \mathrel{\dot{>}} \mathbf{O}$$

($R_0 = X_0 > 0$) erhält man für den Annuitätenvektor $\mathbf{A} := - \mathbf{X}$ die additive Zerlegung in Tilgungsvektor und Zinsenvektor:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = - \mathbf{X} &= \mathbf{T} + \mathbf{Z}\\&= \mathbf{T} + i_1\tilde{\mathbf{R}}\ .\end{aligned}$$

Eine Festlegung des Tilgungsvektors durch Kreditgeber und Kreditnehmer ist gleichbedeutend zur Vereinbarung des Restschuldenvektors: Bei vorgegebenen Tilgungsraten berechnen sich nämlich die Restschulden eindeutig rekursiv zu

$$R_0 = - T_0 = X_0, \qquad R_j = R_{j-1} - T_j \qquad \text{für } j = 1,\ldots,n;$$

umgekehrt berechnen sich bei vorgegebenen Restschulden die Tilgungsraten zu

$$T_0 = - R_0 = - X_0, \qquad T_j = R_{j-1} - R_j \qquad \text{für } j = 1,\ldots,n.$$

Betrachtet man nun nur Kreditzahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ mit den Kreditzinsfaktoren $q_{int}(\mathbf{X}) = q_\mathrm{X} = 1 + i_\mathrm{X}$ und $q_{int}(\mathbf{Y}) = q_\mathrm{Y} = 1 + i_\mathrm{Y}$ (gemäß der Definition in Abschnitt 7.1.3), dem gleichen vorgegebenen Restschuldenvektor $\mathbf{R}$ und damit auch mit dem gleichen Tilgungsvektor

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R},$$

so ist deren Differenzzahlungsstrom

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{X} - \mathbf{Y} = - \mathbf{T} - i_\mathrm{X}\tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{T} + i_\mathrm{Y}\tilde{\mathbf{R}}\\&= - (i_\mathrm{X} - i_\mathrm{Y})\,\tilde{\mathbf{R}}\\&= - (q_\mathrm{X} - q_\mathrm{Y})\,\tilde{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

ein reelles Vielfaches des schwach positiven verschobenen Restschuldenvektors $\tilde{\mathbf{R}}$ ($\tilde{\mathbf{R}} \mathrel{\dot{>}} \mathbf{O}$). Diese Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ besitzen insbesondere wegen $D_0 = - (q_\mathrm{X} - q_\mathrm{Y})\,\tilde{R}_0 = 0$ auch die gleiche Kreditsumme:

$$X_0 = R_0 = Y_0 > 0.$$

Weiter lassen sich wegen $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ die Kreditzahlungsströme

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= - \mathbf{T} - i_\mathrm{X}\tilde{\mathbf{R}}\\&= \mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}} + (1 - q_\mathrm{X})\,\tilde{\mathbf{R}}\\&= \mathbf{R} - q_\mathrm{X}\tilde{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

auf der Geraden

$$G := G(\tilde{\mathbf{R}}) := - \mathbf{T} + \mathrm{lin}\ \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \mathrm{lin}\ \tilde{\mathbf{R}}$$

durch den Punkt $- \mathbf{T}$ bzw. $\mathbf{R}$ und mit dem nichtnegativen Richtungsvektor $\tilde{\mathbf{R}}$ alle untereinander direkt, d. h. mit der natürlichen Halbordnung $\geq$ des $\mathbb{R}^{n+1}$, vergleichen. Da ein derartiger Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ streng monoton fallend von diesem internen Zinsfaktor q_X abhängt, kann der Kreditzinsfaktor q_X auch als Vergleichsmaßstab fungieren:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \geq \mathbf{Y} \quad &\Leftrightarrow \mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} = - (q_\mathrm{X} - q_\mathrm{Y})\,\tilde{\mathbf{R}} \geq \mathbf{O}\\&\Leftrightarrow q_\mathrm{X} \leq q_\mathrm{Y}.\end{aligned}$$

Diese Kreditzahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ sind genau dann mittels der Halbordnung $\geq$ vergleich-

bar, wenn die dazugehörigen Kreditzinsfaktoren q_X und q_Y in umgekehrter Richtung vergleichbar sind. Hier kommt auch ein wichtiger Aspekt der Zinsrechnung als spezieller Prozentrechnung zum Einsatz, nach dem die mit verschiedenen Zinssätzen (Prozentsätzen) berechneten Zinsen (Prozentwerte) nur dann sinnvoll mittels der Zinssätze verglichen werden können, wenn sie sich auf dasselbe Kapital bzw. dieselbe Restschuld (als Grundwert) beziehen. Für diese Kreditzahlungsströme sind also die oben angegebenen Aussagen 1) und 2) und damit auch 3) richtig. Die Kreditzahlungsströme mit gleichem (schwach positiven) Restschuldenvektor sind sowohl I-vergleichbar als auch direkt vergleichbar. Für die Kreditzinssätze ist hierbei keine Einschränkung auf die im Bankenpraxisalltag üblichen Kreditzinssätze $i_1 \geq 0$ bzw. Kreditzinsfaktoren $q_1 \geq 1$ zu beachten.
Speziell die zu den nichtnegativen Kreditzinssätzen i_1 gehörigen Kreditzahlungsströme $\mathbf{X}$ liegen auf der Halbgeraden (dem Strahl)

$$-\mathbf{T} + \text{ray}\,(-\tilde{\mathbf{R}}),$$

die vom Punkt $-\mathbf{T}$ ausgeht und die nichtpositive Richtung $-\tilde{\mathbf{R}}$ besitzt.
Speziell die zu den nichtnegativen Kreditzinsfaktoren q_1 (also zu den Kreditzinssätzen $i_1 = q_1 - 1 \geq -1$) gehörigen Kreditzahlungsströme $\mathbf{X}$ mit gleichem nichtnegativen Restschuldenvektor, also insbesondere auch die regulären Finanzierungen mit einem gleichen Restschuldenvektor, liegen auf der Halbgeraden

$$\mathbf{R} + \text{ray}\,(-\tilde{\mathbf{R}}),$$

die vom nichtnegativen Punkt $\mathbf{R}$ ausgeht und die nichtpositive Richtung $-\tilde{\mathbf{R}}$ aufweist.
Im Falle $q_X \leq q_Y$ gilt nicht nur das direkte Vergleichsergebnis $\mathbf{X} \geq \mathbf{Y}$ bzw. $\mathbf{D} \geq \mathbf{O}$, sondern wegen $E_n(\mathbf{D},q) = q^n\mathbf{P}(q)^\mathsf{T}\mathbf{D} \geq 0$ ($\mathbf{P}(q) = (1,1/q,\ldots,1/q^n)^\mathsf{T}$) auch das Endwertvergleichsergebnis $\mathbf{X} \succcurlyeq_{E,q} \mathbf{Y}$ für jeden positiven Kalkulationszinsfaktor q.

Für die Laufzeit $n = 1$ liegen zwei Kreditzahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ genau dann auf einer derartigen Geraden $G(\tilde{\mathbf{R}})$, $\tilde{\mathbf{R}} = (0,R_0)^\mathsf{T} \gtrdot \mathbf{O}$, wenn sie nur die gleiche Kreditsumme aufweisen: $X_0 = R_0 = Y_0$.
Ab der Laufzeit $n = 2$ sind zwei Kreditzahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$, die zwar die gleiche Kreditsumme haben, aber nicht auf einer Geraden $G(\tilde{\mathbf{R}})$ mit fester Richtung $\tilde{\mathbf{R}}$ liegen, im Allgemeinen nicht mehr direkt vergleichbar. Demzufolge sind dann die oben erwähnte Aussage 1) und die Annahme 3) für das Paar der Zahlungsströme nicht mehr richtig. Dies wird durch das folgende Beispiel belegt. △

Beispiel 7.8 Nicht direkt vergleichbare Kreditzahlungsströme mit verschiedenen Restschuldenvektoren

Das Festdarlehen

$$\mathbf{X} = (100;0;-121)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$$

besitzt den Kreditzinsfaktor $q_X = 1{,}1$, den Restschuldenvektor $\mathbf{R}^X = (100;100;0)^\mathsf{T}$ und den Tilgungsvektor $\mathbf{T}^X = (-100;0;100)^\mathsf{T}$. Das Tilgungsdarlehen

$$\mathbf{Y} = (100;-70;-60)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$$

besitzt den Kreditzinsfaktor $q_Y = 1{,}2$, den Restschuldenvektor $\mathbf{R}^Y = (100;50;0)^\mathsf{T} \neq \mathbf{R}^X$ und den Tilgungsvektor $\mathbf{T}^X = (-100;50;50)^\mathsf{T}$. Der Differenzzahlungsstrom

$$\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} = (0;70;-61)^\mathsf{T}$$

ist gemäß der natürlichen Halbordnung $\geq$ nicht mit $\mathbf{O}$ vergleichbar. Somit sind diese regulären Finanzierungen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ nicht direkt miteinander vergleichbar, obwohl natürlich ihre Kreditzinsfaktoren q_X und q_Y vergleichbar sind. Daher ist für $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ die oben angegebene Aussage 1) nicht richtig. △

7.11 I-Vergleich von direkt vergleichbaren regulären Finanzierungen

Wie schon in Abschnitt 7.10 erwähnt wurde, wird nun ein zweiter Spezialfall angegeben, in dem die Annahme 3) von Abschnitt 7.10 richtig ist, also der direkte Vergleich (mittels der natürlichen Halbordnung) und der IV-Vergleich zum selben Ergebnis führen, nämlich die direkt vergleichbaren regulären Finanzierungen. Bei den regulären Finanzierungen muss die direkte Vergleichbarkeit mit vorausgesetzt werden und die zugehörige Zinsfaktorungleichung folgt dann daraus. Wie das obige Beispiel 7.8 zeigt, gibt es nämlich auch I-vergleichbare reguläre Finanzierungen, die nicht direkt vergleichbar sind. Spezielle direkt vergleichbare reguläre Finanzierungen sind z. B. reguläre Finanzierungen mit gleichem (schwach positiven) Restschuldenvektor, für welche die direkte Vergleichbarkeit schon gesichert ist und diese gleichbedeutend zum zugehörigen Zinsfaktorvergleich ist. Das Ergebnis für die direkt vergleichbaren regulären Finanzierungen wird noch in einem mathematischen Satz zusammengefasst. Ein analoger Satz kann auch für direkt vergleichbare reguläre Investitionen (Anlagen) mit Gebühren oder Sparzuschüssen (Boni) formuliert werden.
Damit wird für die in der Praxis verbreitete Ansicht, dass höhere Kreditgebühren bzw. höhere Rückzahlungen einen höheren Effektivzinsfaktor und umgekehrt Tilgungszuschüsse einen niedrigeren Effektivzinsfaktor bewirken, für den Fall von regulären Finanzierungen eine mathematische Begründung gegeben.

Satz 7.1 Streng monotone Abhängigkeit des Effektivzinssatzes einer regulären Finanzierung von Gebühren bzw. von Tilgungszuschüssen

1) Erhält man bei einer vorgegebenen regulären Finanzierung $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(Y_0 > 0)$ durch die Vereinbarung von zu allen Zeitpunkten $j = 0,\dots,n$ möglichen zusätzlichen Gebühren $G_j \geq 0$ wieder eine reguläre Finanzierung
$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D},\ \ \mathbf{D} = -\,\mathbf{G} \underset{\cdot}{<} \mathbf{O},$$
so erhöht sich der nominelle Kreditzinsfaktor (Nominalzinsfaktor, interne Zinsfaktor) $q_{int}(\mathbf{Y})$ des nominellen Zahlungsstroms $\mathbf{Y}$ auf den größeren Effektivzinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ des effektiven Zahlungsstroms $\mathbf{X}$.

2) Werden dagegen zur regulären Finanzierung $\mathbf{Y}$ noch zusätzlich Tilgungszuschüsse $B_j \geq 0$ vereinbart und ist auch der resultierende Zahlungsstrom
$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D},\ \ \mathbf{D} = +\,\mathbf{B} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O},$$
noch eine reguläre Finanzierung, so erniedrigt sich der Kreditzinsfaktor $q_{int}(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ auf den kleineren Effektivzinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$.
Die gleichzeitige Hinzunahme von Gebühren und Zuschüssen ist hier nicht zugelassen.

3) Insgesamt erhält man aus 1) und 2) für direkt vergleichbare reguläre Finanzierungen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})$ und ihre eindeutig bestimmten positiven internen Zins-

faktoren q_X und q_Y die Aussagen:

$$\mathbf{X} \mathrel{\dot{>}} \mathbf{Y} \Leftrightarrow q_X < q_Y,$$

$$\mathbf{X} \mathrel{\dot{<}} \mathbf{Y} \Leftrightarrow q_X > q_Y.$$

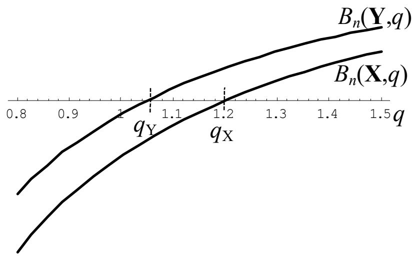


Abb. 7.11 Die Graphen der Barwertfunktionen $B_n(\mathbf{X},q)$ und $B_n(\mathbf{Y},q)$ der direkt vergleichbaren regulären Finanzierungen **X** und **Y** mit $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \mathrel{\dot{<}} \mathbf{O}$ und den internen Zinsfaktoren $q_X = q_{int}(\mathbf{X}) > q_Y = q_{int}(\mathbf{Y})$

Zwei **Beweise** für Satz 7.1 werden auf der Website www.pleier-r.de des Autors in der pdf-Datei zum Website-Thema „Ein streng monotoner Effektivzinssatz" angegeben. Ein erster kurzer und einfacher Beweis verwendet die Vorzeichenverteilung der Barwertfunktion einer regulären Finanzierung auf der positiven Halbachse. Mit diesem ersten Beweisweg lässt sich der Satz auch verallgemeinern auf **NU-Finanzierungen Z** ($Z_0 > 0$) bzw. **NU-Investitionen Z** ($Z_0 < 0$). Für eine NU-Finanzierung **Z** hat die Barwertfunktion $B_n(q) := B_n(\mathbf{Z},q)$ genau die im Beweis beschriebene Vorzeichenverteilung auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$: $B_n(q)$ besitzt also genau eine positive Nullstelle. Diese ist noch eine Vorzeichenwechselstelle bzw. eine **N**ullstelle von **u**ngerader Vielfachheit (Ordnung). Durch Beispiele kann gezeigt werden, dass die Aussage des Satzes für einen Zahlungsstrom, der nicht eine NU-Finanzierung oder eine NU-Investition ist, im Allgemeinen nicht gültig ist.
Ein zweiter aufwendigerer Beweis verwendet den Satz über implizite Funktionen, um die Existenz und strenge Monotonie der lokalen Interner Zinsfaktor-Funktion nachzuweisen. Weiter verwendet er, dass die Menge Φ der regulären Finanzierungen wegzusammenhängend ist und je zwei direkt vergleichbare Punkte **X** und **Y** dieser Menge Φ durch eine monoton steigende Kurve verbunden werden können. Der zweite Beweisweg liefert auch noch weitere Aussagen über die lokale Interner Zinsfaktor-Funktion.

7.12 I-Vergleich mittels minimalem und maximalem internen Zinsfaktor oder einer Interner Zinsfaktor-Funktion

Für zwei Varianten des IV-Vergleichs wird jetzt jeweils der Anwendungsbereich bestimmt, auf dem der IV-Vergleich IE-konsistent (IB-konsistent), d. h. konsistent zum E-Vergleich bzw. B-Vergleich, ist. Die beiden Varianten werden nur kurz skizziert, da der dabei beschriebene IV-Vergleich jeweils nur einen eingeschränkten Anwendungsbereich aufweist und nur ein Spezialfall des universell anwendbaren ID-Vergleichs ist. Eine Begründung für diese Einschränkung wurde auch schon in Abschnitt 7.9.2 angegeben.

Bei vorgegebenem Kalkulationszinsfaktor $q = q_K > 0$ ist für die Zahlungsströme $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, der Wert des Vorzeichens

$$\operatorname{sgn} E_n(\mathbf{D},q) = \operatorname{sgn} (E_n(\mathbf{X},q) - E_n(\mathbf{Y},q))$$

und damit der E-Vergleich (Vergleich nach der Endwertmethode bzw. nach der Barwertmethode oder KWM) von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ eindeutig festgelegt. Auf Grund der Trichotomie (Dreiteilung in disjunkte Bereiche) der Ordnung $\geq$ der reellen Zahlen gilt nämlich genau eine der Aussagen $E_n(\mathbf{D},q) > 0$, $E_n(\mathbf{D},q) = 0$, $E_n(\mathbf{D},q) < 0$. Daraus resultiert auch die Trichotomie der (totalen) E-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{E},q}$ bzw. des E-Vergleichs: Es gilt genau eine der drei Relationen $\mathbf{X} \succ_{\mathrm{E},q} \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \sim_{\mathrm{E},q} \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \prec_{\mathrm{E},q} \mathbf{Y}$.

Grundsätzlich soll für einen IV-Vergleich von Zahlungsströmen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (X_0, $Y_0 \neq 0$) ein Vergleich von mindestens einem internen Zinsfaktor $q_\mathrm{X} = q_{int}(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$ mit mindestens einem internen Zinsfaktor $q_\mathrm{Y} = q_{int}(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ durchgeführt werden. Für jedes Paar $(q_\mathrm{X},q_\mathrm{Y})$ von internen Zinsfaktoren q_X von $\mathbf{X}$ und q_Y von $\mathbf{Y}$ ist auf Grund der Trichotomie der Ordnung $\geq$ der reellen Zahlen genau eine der Aussagen $q_\mathrm{X} > q_\mathrm{Y}$, $q_\mathrm{X} = q_\mathrm{Y}$, $q_\mathrm{X} < q_\mathrm{Y}$ gültig. Für eine Laufzeit $n \geq 2$ können aber im allgemeinen Fall je Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ verschiedene interne Zinsfaktoren und verschiedene Lagebeziehungen der Paare $(q_\mathrm{X},q_\mathrm{Y})$ auftreten. Demzufolge ist dann die Trichotomie des I-Vergleichs nicht mehr gegeben, wenn beim strengen I-Vergleich nur gefordert wird, dass für irgend ein beliebiges Paar $(q_\mathrm{X},q_\mathrm{Y})$ von internen Zinsfaktoren die betreffende Zinsfaktorungleichung gültig ist und dabei mehrere oder sogar alle internen Zinsfaktoren zum Vergleich zugelassen werden. Als Zahlenbeispiel dienen hierfür die Investitionen

$$\mathbf{X} = (-1,4,-3)^\mathsf{T},\ \mathbf{Y} = (-1,6,-8)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$$

mit den Endwertfunktionen

$$E_2(\mathbf{X},q) = -(q-1)(q-3) = -q^2 + 4q - 3,$$
$$E_2(\mathbf{Y},q) = -(q-2)(q-4) = -q^2 + 6q - 8$$

und den internen Zinsfaktoren

$$q_{\mathrm{X},1} = 3,\ q_{\mathrm{X},2} = 1,$$
$$q_{\mathrm{Y},1} = 4,\ q_{\mathrm{Y},2} = 2.$$

Bei Verwendung des Paares $(q_{\mathrm{X},1},q_{\mathrm{Y},2}) = (3,2)$ wäre $\mathbf{X}$ I-vorteilhafter als $\mathbf{Y}$ und bei Verwendung des Paares $(q_{\mathrm{X},2},q_{\mathrm{Y},2}) = (1,2)$ $\mathbf{X}$ I-unvorteilhafter als $\mathbf{Y}$. Eine widerspruchsfreie Definition und die Trichotomie des I-Vergleichs kann daher nur durch eine engere Definition des strengen I-Vergleichs gesichert werden.

Ein IV-Vergleich ist so zu definieren, dass die strengen Relationen des IV-Vergleichs und die IV-Neutralität nicht gleichzeitig auftreten, also deren Trichotomie gewährleistet ist. Nach Festlegung der trichotomischen Definition des IV-Vergleichs ist dann der zugehörige **Anwendungsbereich** zu bestimmen, auf dem der IV-Vergleich konsistent (widerspruchsfrei) zum E-Vergleich ist. Dazu wird der IV-Vergleich und der E-Vergleich mittels binärer (zweistelliger) Relationen beschrieben und dann mit den daraus gebildeten Durchschnittsrelationen (Kombinationsrelationen) der Anwendungsbereich des IV-Vergleichs bestimmt. Weiter ist dann zu untersuchen, wie für ein Zahlungsstrompaar $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ die Zugehörigkeit zum Anwendungsbereich ohne unmittelbaren Rückgriff auf die Endwertmethode zu prüfen ist und welche der internen Zinsfaktoren q_X von $\mathbf{X}$ und q_Y von $\mathbf{Y}$ ein IE-konsistentes Paar interner Zinsfaktoren liefern. Es folgen nun zwei kurz skizzierte Beispiele für IV-Varianten, die o. E. nur für Investitionen formuliert werden.

Beispiel 7.9 IV-Vergleich mittels maximalem und minimalem internen Zinsfaktor

Werden für den schwachen IV-Vergleich von zwei Investitionen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in D_\text{Inv}$ alle beliebigen internen Zinsfaktoren q_X von $\mathbf{X}$ und q_Y von $\mathbf{Y}$ zum Vergleich zugelassen, so erhält man die umfassendste Definition des schwachen IV-Vergleichs und der IV-Indifferenz und die engste Definition des strengen IV-Vergleichs:

$\mathbf{X} \trianglerighteq_\text{I,Inv} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist mindestens so I-vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$)
:$\Leftrightarrow$ $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in D_\text{Inv}$ besitzen interne Zinsfaktor q_X von $\mathbf{X}$ und q_Y von $\mathbf{Y}$ mit $q_\text{X} \geq q_\text{Y}$
$\Leftrightarrow$ $q_\text{max}(\mathbf{X}) \geq q_\text{min}(\mathbf{Y})$.

$\mathbf{X} \simeq_\text{I,Inv} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist genauso I-vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$)
:$\Leftrightarrow$ $\mathbf{X} \trianglerighteq_\text{I,Inv} \mathbf{Y} \wedge \mathbf{X} \trianglelefteq_\text{I,Inv} \mathbf{Y}$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in D_\text{Inv}$ besitzen interne Zinsfaktoren q_X, q'_X von $\mathbf{X}$ und q_Y, q'_Y von $\mathbf{Y}$ mit $q_\text{X} \geq q_\text{Y}$ und $q'_\text{X} \leq q'_\text{Y}$
$\Leftrightarrow$ $q_\text{max}(\mathbf{X}) \geq q_\text{min}(\mathbf{Y}) \wedge q_\text{min}(\mathbf{X}) \leq q_\text{max}(\mathbf{Y})$.

$\mathbf{X} \triangleright_\text{I,Inv} \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist (echt) I-vorteilhafter als $\mathbf{Y}$)
:$\Leftrightarrow$ $\mathbf{X} \trianglerighteq_\text{I,Inv} \mathbf{Y} \wedge \mathbf{X} \ntrianglelefteq_\text{I,Inv} \mathbf{Y}$
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in D_\text{Inv}$ besitzen interne Zinsfaktoren q_X von $\mathbf{X}$ und q_Y von $\mathbf{Y}$ mit $q_\text{X} \geq q_\text{Y}$ und keine internen Zinsfaktoren q'_X von $\mathbf{X}$ und q'_Y von $\mathbf{Y}$ mit $q'_\text{X} \leq q'_\text{Y}$
$\Leftrightarrow$ $q_\text{max}(\mathbf{X}) \geq q_\text{min}(\mathbf{Y}) \wedge q_\text{min}(\mathbf{X}) > q_\text{max}(\mathbf{Y})$
$\Leftrightarrow$ $q_\text{min}(\mathbf{X}) > q_\text{max}(\mathbf{Y})$,

Der zu den drei Relationen $\triangleright_\text{I,Inv}$, $\simeq_\text{I,Inv}$ und $\triangleleft_\text{I,Inv}$ des IV-Vergleichs von Investitionen gehörige Anwendungsbereich mit Beachtung der Ergebniskonsistenz des IV-Vergleichs mit der Endwertmethode (EF) zu festem Kalkulationszinsfaktor q ergibt sich als Teilmenge von $D_\text{Inv} \times D_\text{Inv}$ durch die Vereinigung(srelation)

$$V_{\text{I,Inv,E},q} := \triangleright_{\text{I,Inv,E},q} \cup \simeq_{\text{I,Inv,E},q} \cup \triangleleft_{\text{I,Inv,E},q}$$

der drei Durchschnittsrelationen (Kombinationsrelationen)

$\triangleright_{\text{I,Inv,E},q} := \triangleright_\text{I,Inv} \cap \succ_{\text{E},q}$ („vorteilhafter als“ bzgl. I- und E-Relation),
$\simeq_{\text{I,Inv,E},q} := \simeq_\text{I,Inv} \cap \sim_{\text{E},q}$ („genauso vorteilhaft wie“ bzgl. I- und E-Relation),
$\triangleleft_{\text{I,Inv,E},q} := \triangleleft_\text{I,Inv} \cap \prec_{\text{E},q}$ („unvorteilhafter als“ bzgl. I- und E-Relation).

An Stelle der Beschreibung des Anwendungsbereichs $V_{\text{I,Inv,E},q}$ als Relation, also als Teilmenge der Produktmenge $D_\text{Inv} \times D_\text{Inv} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, kann dieser Anwendungsbereich auch mit den Begriffen der Neutralitätsklasse, Echtbessermenge und Echtschlechtermenge in der Menge $D_\text{Inv} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ angegeben werden. Der Anwendungsbereich $V_{\text{I,Inv,E},q}$ ist die Menge aller Paare $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in D_\text{Inv} \times D_\text{Inv}$ mit

$$\mathbf{X} \in W_{\triangleright_{\text{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) \cup Ntr_{\simeq_{\text{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) \cup W_{\triangleleft_{\text{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y})$$

bei Verwendung der zur Investition $\mathbf{Y} \in D_\text{Inv}$ gehörigen Echtbessermenge

$$\begin{aligned} W_{\triangleright_{\text{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in D_\text{Inv} : \mathbf{X} \triangleright_{\text{I,Inv,E},q} \mathbf{Y}\} \\ &= \{\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D} \in D_\text{Inv} : q_\text{min}(\mathbf{X}) > q_\text{max}(\mathbf{Y}), E_n(\mathbf{D},q) > 0\}, \end{aligned}$$

der Neutralitätsklasse

$$Ntr_{\simeq_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : \mathbf{X} \simeq_{\mathrm{I,Inv,E},q} \mathbf{Y}\}$$
$$= \{\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{\max}(\mathbf{X}) \geq q_{\min}(\mathbf{Y}),\ q_{\min}(\mathbf{X}) \leq q_{\max}(\mathbf{Y}),\ E_n(\mathbf{D},q) = 0\}$$

und der Echtschlechtermenge

$$W_{\lhd_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : \mathbf{X} \lhd_{\mathrm{I,Inv,E},q} \mathbf{Y}\}$$
$$= \{\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{\max}(\mathbf{X}) < q_{\min}(\mathbf{Y}),\ \mathrm{E}_n(\mathbf{D},q) < 0\}.$$

Mit dem formal hinzugenommenen Sonderfall $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ ($\notin D_{\mathrm{Inv}}$) und mit der dabei verwendeten zusätzlichen Vereinbarung, dass für $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ als interner Zinsfaktor nur der konstante Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ zum I-Vergleich verwendet wird, erhält man den Anwendungsbereich der I-Beurteilung mittels beliebiger interner Zinsfaktoren.

Bei der Überprüfung der Zugehörigkeit eines Zahlungsstrompaars zum Anwendungsbereich ist bei den drei Teilmengen neben einer Zinsfaktorbedingung auch das Vorzeichen des Endwerts $E_n(\mathbf{D},q)$ zu prüfen. Soll die Berechnung von $E_n(\mathbf{D},q)$ und der damit verbundene Rückgriff auf die Endwertmethode vermieden werden, so kann das Vorzeichen von $E_n(\mathbf{D},q)$ auch mit der aufwendigeren IB-Beurteilung von **D** erfolgen. Da die IB-Beurteilung von **D** aber schon einen IB-konsistenten I-Vergleich der Zahlungsströme **X** und **Y** nach der Methode (ID) darstellt, bewirken die zusätzlich angegebenen Zinsfaktorbedingungen eine unnötige Einschränkung des Anwendungsbereichs. Für einen umfassenderen Anwendungsbereich ist daher die in Abschnitt 7.13 behandelte Vergleichsmethode (ID) mit der IB-Beurteilung von **D** vorzuziehen. △

Beispiel 7.10 IV-Vergleich mittels einer Interner Zinsfaktor-Funktion

Im Gegensatz zum vorigen Beispiel, in welchem beim schwachen I-Vergleich der Zahlungsströme **X** und **Y** beliebige interne Zinsfaktoren q_X von **X** und q_Y von **Y** zum Vergleich zugelassen werden und beim strengen IV-Vergleich alle internen Zinsfaktoren verwendet werden, wird nun beim IV-Vergleich je Zahlungsstrom nur ein fest gewählter interner Zinsfaktor verwendet. Wenn nun für die zu vergleichenden Zahlungsströme **X** und **Y** interne Zinsfaktoren $q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_{int}(\mathbf{Y})$ existieren und irgendwie eindeutig festgelegt sind, so können für den I-Vergleich von zwei Investitionen oder zwei Finanzierungen die beiden Relationen $\succcurlyeq_{\mathrm{I,Inv}}$ und $\succcurlyeq_{\mathrm{I,Fin}}$ jeweils mittels einer Nutzenfunktion definiert werden.

Für zwei Investitionen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in D_{\mathrm{Inv}}$ (X_0, $Y_0 < 0$) gelten folgende Relationen:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ (**X** ist mindestens so I-vorteilhaft wie **Y**) $\Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) \geq q_{int}(\mathbf{Y})$;
$\mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ (**X** ist ebenso I-vorteilhaft wie **Y**) $\Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) = q_{int}(\mathbf{Y})$;
$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,Inv}} \mathbf{Y}$ (**X** ist I-vorteilhafter als **Y**) $\Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) > q_{int}(\mathbf{Y})$.

Für zwei Finanzierungen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in D_{\mathrm{Fin}}$ (X_0, $Y_0 > 0$) gelten folgende Relationen:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{I,Fin}} \mathbf{Y}$ (**X** ist mindestens so I-vorteilhaft wie **Y**) $\Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) \leq q_{int}(\mathbf{Y})$;
$\mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,Fin}} \mathbf{Y}$ (**X** ist ebenso I-vorteilhaft wie **Y**) $\Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) = q_{int}(\mathbf{Y})$;
$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,Fin}} \mathbf{Y}$ (**X** ist I-vorteilhafter als **Y**) $\Leftrightarrow q_{int}(\mathbf{X}) < q_{int}(\mathbf{Y})$.

Der Index I in der Bezeichnung der Relationen steht für die Methode des internen Zinssatzes, die Indizes Inv und Fin stehen für die Anwendung des Vergleichs auf Investitionen oder Finanzierungen. Wenn keine Verwechslung auftreten kann, können die Indizes Inv und Fin auch weggelassen werden. Im Unterschied zur linearen Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ ist die Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ aber nur auf D_{Inv} bzw. D_{Fin} und nicht auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert und auch keine additive Nutzenfunktion für die zugehörige Relation, sodass nicht analog zum E-Vergleich mittels Zusatz 8.1.3 des mathematischen Anhangs gefolgert werden kann, dass der I-Vergleich der Investitionen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in D_{\mathrm{Inv}}$ durch die Zinsfaktorungleichung $q_{int}(\mathbf{X}) \geq q_{int}(\mathbf{Y})$ gleichbedeutend zur speziellen I-Beurteilung des Differenzzahlungsstroms $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ mittels der Zinsfaktorungleichung $q_{int}(\mathbf{D}) \geq 0$ mit dem speziellen Kalkulationszinsfaktor $q_0 = 0$ wäre.

Eine zweckmäßige Definition der Interner Zinsfaktor-Funktion könnte beispielsweise für einen NU-Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ des Abschnitts 7.2 mit dem einzigen positiven internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$, für einen NF-Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ des Abschnitts 7.3 mit einem beliebigen nichtpositiven internen Zinsfaktor oder dem nichtreellen internen Zinsfaktor $-\infty$ erfolgen. Für einen beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ kann nach den Ausführungen in Abschnitt 7.5 zur IB-*Beurteilung* stets ein reeller oder nichtreeller IB-konsistenter interner Zinsfaktor ausgewählt werden und hier als Funktionswert $q_{int}(\mathbf{X})$ festgelegt werden. Über die Zugehörigkeit eines Zahlungsstrompaars $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ zum Anwendungsbereich dieses I-*Vergleichs* ist damit aber noch nichts gesagt. Für zwei Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ bleibt also noch zu prüfen, ob ein IB-konsistenter I-Vergleich möglich ist.

Im Hinblick auf eine knappe Darstellung des IV-Vergleichs wird hier auf die Eigenschaften der auftretenden Relationen nicht eingegangen. Der Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I,Inv,E},q}$ des vorliegenden IV-Vergleichs für Investitionen wird in der Schreibweise der Relationen als Relation in (über) D_{Inv}, d. h. als Teilmenge der Produktmenge $D_{\mathrm{Inv}} \times D_{\mathrm{Inv}}$, gegeben durch die Vereinigungsrelation dreier Durchschnittsrelationen (Kombinationsrelationen):

$$R_{\mathrm{I,Inv,E},q} := \succ_{\mathrm{I,Inv,E},q} \cup \sim_{\mathrm{I,Inv,E},q} \cup \prec_{\mathrm{I,Inv,E},q}$$

mit den Durchschnittsrelationen

$$\succ_{\mathrm{I,Inv,E},q} := \succ_{\mathrm{I,Inv}} \cap \succ_{\mathrm{E},q} \qquad \text{(„vorteilhafter als“ bzgl. I- und E-Relation),}$$

$$\sim_{\mathrm{I,Inv,E},q} := \sim_{\mathrm{I,Inv}} \cap \sim_{\mathrm{E},q} \qquad \text{(„indifferent zu“ bzgl. I- und E-Relation),}$$

$$\prec_{\mathrm{I,Inv,E},q} := \prec_{\mathrm{I,Inv}} \cap \prec_{\mathrm{E},q} \qquad \text{(„unvorteilhafter als“ bzgl. I- und E-Relation).}$$

Statt als Teilmenge der Produktmenge $D_{\mathrm{Inv}} \times D_{\mathrm{Inv}} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ kann der Anwendungsbereich auch noch mit den Begriffen der Indifferenzklasse, Echtbessermenge und Echtschlechtermenge in der Menge $D_{\mathrm{Inv}} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ beschrieben werden:

Der Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I,Inv,E},q}$ ist die Menge aller Paare $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in D_{\mathrm{Inv}} \times D_{\mathrm{Inv}}$ mit

$$\mathbf{X} \in W_{\succ_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) \;\cup\; Ind_{\sim_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) \;\cup\; W_{\prec_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y})$$

bei Verwendung der zur Investition $\mathbf{Y} \in D_{\mathrm{Inv}}$ gehörigen Echtbessermenge

$$\begin{aligned} W_{\succ_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : \mathbf{X} \succ_{\mathrm{I,Inv,E},q} \mathbf{Y}\} \\ &= \{\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{int}(\mathbf{X}) > q_{int}(\mathbf{Y}),\ E_n(\mathbf{D},q_K) > 0\}, \end{aligned}$$

der Indifferenzklasse

$$\begin{aligned} Ind_{\sim_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : \mathbf{X} \sim_{\mathrm{I,Inv,E},q} \mathbf{Y}\} \\ &= \{\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{int}(\mathbf{X}) = q_{int}(\mathbf{Y}),\ E_n(\mathbf{D},q_K) = 0\} \end{aligned}$$

und der Echtschlechtermenge

$$\begin{aligned} W_{\prec_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y}) &:= \{\mathbf{X} \in D_{\mathrm{Inv}} : \mathbf{X} \prec_{\mathrm{I,Inv,E},q} \mathbf{Y}\} \\ &= \{\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D} \in D_{\mathrm{Inv}} : q_{int}(\mathbf{X}) < q_{int}(\mathbf{Y}),\ E_n(\mathbf{D},q_K) < 0\}. \end{aligned}$$

Nach der auf irgendeine Weise auf der Menge D_{Inv} erfolgten Festlegung der Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ ist der Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I,Inv,E},q}$ zumindest einmal eindeutig beschrieben. Als Sonderfall kann man den Vergleich von Zahlungsströmen $\mathbf{X}$ mit dem speziellen Zahlungsstrom $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ ($\notin D_{\mathrm{Inv}}$) hinzunehmen, wenn man hierbei zusätzlich vereinbart, dass für $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$ als interner Zinsfaktor nur der konstante Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ zum I-Vergleich verwendet wird. Dieser Sonderfall entspricht dem Anwendungsbereich $B_{\mathrm{Inv},q,qint}$ des Beispiels 7.3 in Abschnitt 7.4 für die I-Beurteilung mit einer Interner Zinsfaktor-Funktion.

Die Überprüfung der Zugehörigkeit eines Zahlungsstrompaars zum Anwendungsbereich erfolgt also, indem die Funktionswerte $q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_{int}(\mathbf{Y})$ verglichen werden und der Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D}$ mit der E-Beurteilung bzw. der IB-Beurteilung von Abschnitt 7.5 beurteilt wird. Die IB-Beurteilung von $\mathbf{D}$ stellt aber schon einen IB-konsistenten I-Vergleich der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ nach der Methode (ID) dar. Demnach ist der zusätzliche Vergleich von $q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_{int}(\mathbf{Y})$ für einen IB-konsistenten I-Vergleich eigentlich überflüssig und stellt eine unnötige Einschränkung des Anwendungsbereichs dar. Für einen umfassenderen Anwendungsbereich ist daher die in Abschnitt 7.13 behandelte Vergleichsmethode (ID) mit der alleinigen IB-Beurteilung von **D** vorzuziehen. △

Anwendungsbereich des IV-Vergleichs mittels einer Interner Zinsfaktor-Funktion zur Konsistenz mit dem E-Vergleich für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$

Die Beschreibung des Anwendungsbereichs $R_{\mathrm{I,Inv,E},q}$ des IV-Vergleichs von Beispiel 7.10 mittels einer Interner Zinsfaktor-Funktion für die Investitionen **X**, **Y** $\in D_{\mathrm{Inv}}$ bzw. die Beschreibung der Echtbessermengen $W_{>_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y})$, Indifferenzklassen $Ind_{\sim_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y})$ und der Echtschlechtermengen $W_{<_{\mathrm{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y})$ für die **Y** $\in D_{\mathrm{Inv}}$ soll nun für die noch relativ einfach zu behandelnden kleinen Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ geometrisch veranschaulicht werden. Es soll damit die Einschränkung des Anwendungsbereichs der Methode (IV) gegenüber dem Anwendungsbereich der Methode (ID) demonstriert werden. Für die größeren Laufzeiten $n = 2, 3, 4$ bzw. $n \geq 5$ wird die analytische Beschreibung komplizierter bzw. unmöglich, so wie es sich aus der Aufgabe der Nullstellenbestimmung für Polynome ergibt. Wie nämlich bereits in Abschnitt 7.1 bei der Definition des internen Zinsfaktors festgestellt wird, gibt es nach dem Satz von Abel ab einem Polynomgrad $n \geq 5$ für die Nullstellen eines Polynoms im allgemeinen Fall keine expliziten Lösungsformeln mit Wurzelausdrücken mehr. In der Praxis werden schon ab einem Polynomgrad $n \geq 3$ die Polynomnullstellen nicht mehr mit Wurzelausdrücken, sondern mit numerischen Iterationsmethoden bestimmt.

Für die Laufzeit $n = 1$ haben die Echtbessermengen, Indifferenzklassen und Echtschlechtermengen noch eine relativ einfache geometrische Struktur in der Gestalt von konvexen affinen Kegeln im $\mathbb{R}^2$, sodass der Anwendungsbereich noch als relativ einfach angesehen werden kann. Eine grafische Darstellung erfolgt in der Abbildung 7.12.

Für die Laufzeit $n = 2$ erhält man mit $q_{int}(\mathbf{X}) = q_{\max}(\mathbf{X})$ aber schon kompliziertere Echtbessermengen, Indifferenzklassen und Echtschlechtermengen, die durch Ungleichungen unter Verwendung der linearen Funktionen

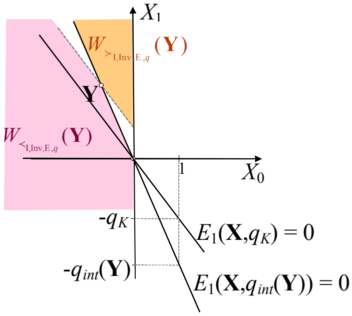
$$f_{1\mathrm{Y}}(X_2,X_0) = \delta_{\mathrm{Y}}/q_K - X_2/q_K - X_0 q_K,$$
$$h_{1\mathrm{Y}}(X_2,X_0) = - X_2/q_{\mathrm{Y}} - X_0 q_{\mathrm{Y}},$$
$$h_{2\mathrm{Y}}(X_2,X_0) = - 2q_{\mathrm{Y}}X_0$$

und des Wurzelausdruck

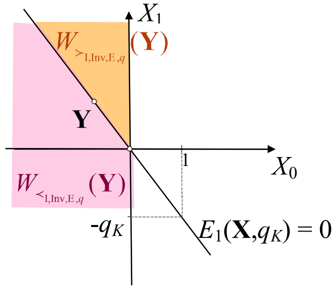
$$w(X_2,X_0) = 2\sqrt{X_0 X_2}$$

beschrieben werden ($q_{\mathrm{Y}} := q_{int}(\mathbf{Y})$, $\delta_{\mathrm{Y}} := E_2(\mathbf{Y},q_K)$). Daher kann für eine Laufzeit $n \geq 2$ im Allgemeinen ohne weitere Information über das Paar (**X**,**Y**) und ohne größeren Rechenaufwand nicht mehr einfach entschieden werden, ob das Paar (**X**,**Y**) der zu vergleichenden Zahlungsströme im Anwendungsbereich liegt und der I-Vergleich sinnvoll ist. Die Frage, ob ein Zahlungsstrompaar (**X**,**Y**) im Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I,Inv,E},q}$ liegt, ist ab der Laufzeit $n = 2$ im Allgemeinen am einfachsten gleich durch die Überprüfung der definierenden Ungleichungen zu lösen. Eine grafische Darstellung des Anwendungsbereichs wird mit Abbildung 7.13 gegeben.

a) $q_{int}(\mathbf{Y}) > q_K$:



b) $q_{int}(\mathbf{Y}) = q_K$:



c) $q_{int}(\mathbf{Y}) < q_K$:

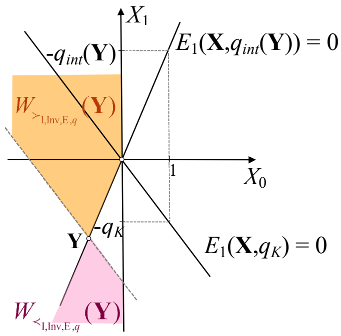


Abb. 7.12 Der Anwendungsbereich $R_{\text{I,Inv,E},q}$ des IV-Vergleichs für die Investitionen der Laufzeit $n = 1$ mittels einer Interner Zinsfaktor-Funktion: Die Echtbessermenge $W_{\succ_{\text{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y})$, die Indifferenzklasse $Ind_{\sim_{\text{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y})$ und die Echtschlechtermenge $W_{\prec_{\text{I,Inv,E},q}}(\mathbf{Y})$ der Investition $\mathbf{Y} \in D_{\text{Inv}}$ für die drei Fälle a) $q_{int}(\mathbf{Y}) > q_K$, b) $q_{int}(\mathbf{Y}) = q_K$ und c) $q_{\text{int}}(\mathbf{Y}) < q_K$

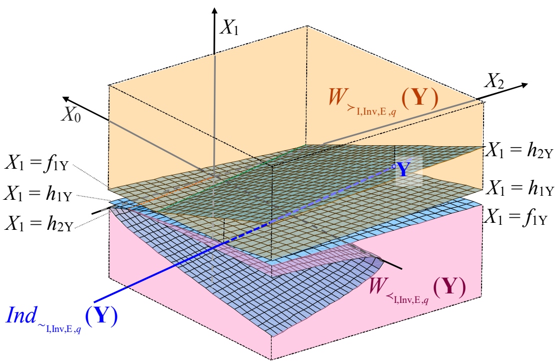


Abb. 7.13 Der Anwendungsbereich $R_{\text{I,Inv,E},q}$ des IV-Vergleichs für die Investitionen der Laufzeit $n = 2$ mittels einer Interner Zinsfaktor-Funktion: Die Echtbessermenge, die Indifferenzklasse und Echtschlechtermenge für die Investition $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3$

Anwendungsbereich des IV-Vergleichs mittels einer Interner Zinsfaktor-Funktion zur Konsistenz mit der SE-Halbordnung bzw. mit der natürlichen Halbordnung für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$

Für den IV-Vergleich mittels einer Interner Zinsfaktor-Funktion können auch die engeren Anwendungsbereiche $R_{\mathrm{I,Inv},\Lambda}$ und $R_{\mathrm{I,Inv},N}$ zur Konsistenz mit der SE-Halbordnung[22] $\Lambda = \succcurlyeq_{\Lambda}$ bzw. mit der natürlichen Halbordnung $N = \geq$ betrachtet werden. Die Prüfung der Zugehörigkeit zu diesen Anwendungsbereichen ist aber nicht mit der IB-Beurteilung des Differenzzahlungsstroms, sondern nur mit Rückgriff auf die SE-Halbordnung bzw. natürliche Halbordnung möglich. Da diese Anwendungsbereiche Teilmengen des umfassenderen Anwendungsbereichs $R_{\mathrm{I,Inv,E},q}$ zur Konsistenz mit der Endwert-Präferenzordnung sind, sollen zur Illustration dieser Inklusionen zumindest die Abbildungen 7.14 und 7.15 zum Anwendungsbereich für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ angegeben werden. Bei der Laufzeit $n = 2$ wird hier die Interner Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X}) = q_{\max}(\mathbf{X})$ verwendet.

a) $q_{int}(\mathbf{Y}) \geq 0$: b) $q_{int}(\mathbf{Y}) < 0$:

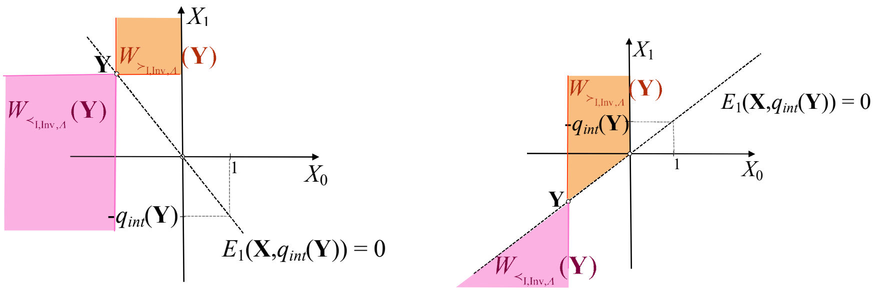


Abb. 7.14 Der Anwendungsbereich $R_{\mathrm{I,Inv},\Lambda} = R_{\mathrm{I,Inv},N}$ für die Investitionen der Laufzeit $n = 1$: Die Echtbessermenge $W_{\succ_{\mathrm{I,Inv},N}}(\mathbf{Y})$, die Indifferenzklasse $Ind_{\sim_{\mathrm{I,Inv},N}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{Y}\}$ und die Echtschlechtermenge $W_{\prec_{\mathrm{I,Inv},N}}(\mathbf{Y})$, $\mathbf{Y} \in D_{\mathrm{Inv}}$, für die beiden Fälle a) $q_{int}(\mathbf{Y}) \geq 0$ und b) $q_{int}(\mathbf{Y}) < 0$

[22] Die SE-Halbordnung (simultane Endwert-Halbordnung) $\Lambda = \succcurlyeq_{\Lambda}$ wird behandelt auf der Autoren-Website www.pleier-r.de.

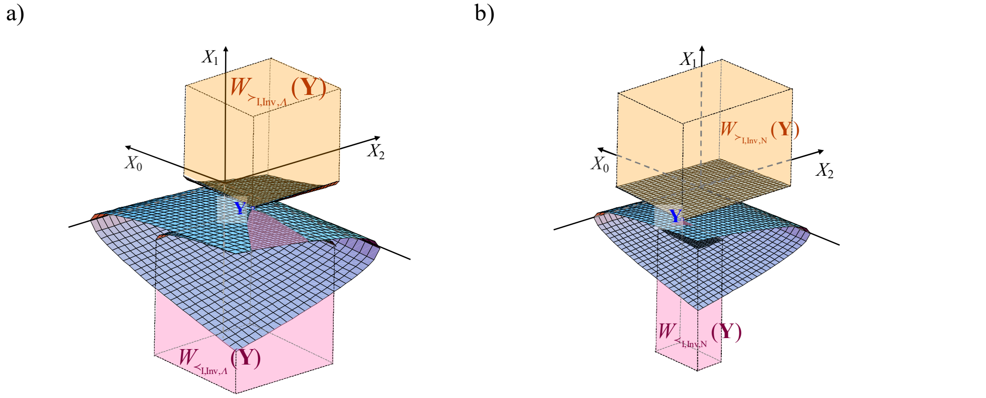


Abb. 7.15 Die Anwendungsbereiche a) $R_{\mathrm{I,Inv},A}$ und b) $R_{\mathrm{I,Inv},N}$ für die Investitionen der Laufzeit $n = 2$: Die Echtbessermenge, die Indifferenzklasse und die Echtschlechtermenge zur speziellen Investition **Y**

7.13 Universeller ID-Vergleich beliebiger Zahlungsströme

Zur Methode (ID) des I-Vergleichs (MIZ-Vergleichs) von alternativen Zahlungsströmen **X** und **Y**, bei welcher der Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** mittels seiner internen Zinsfaktoren q_D und eines fest gewählten positiven Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ beurteilt wird, ist anzumerken, dass der Differenzzahlungsstrom **D = X - Y** zweier realer Zahlungsströme **X** und **Y** im Allgemeinen nur eine rechnerische Größe darstellt und nicht durch Kombination (Addition) von realen Zahlungsströmen erzeugt werden kann. Mit einem Zahlungsstrom **Y** steht nämlich im Allgemeinen nicht auch der umgekehrte Zahlungsstrom (der Gegenvektor, das Negative, das additive Inverse) - **Y** zur Verfügung. Nur auf einem vollkommenen Kapitalmarkt mit seiner Hyperebenenstruktur (siehe Kapitel 4) würde zu einem Kapitalmarktgeschäft **S** stets auch das umgekehrte Kapitalmarktgeschäft **R** = **- S** existieren. Demzufolge kann auch ein interner Zinsfaktor q_D von **D** im Allgemeinen nicht ökonomisch als Zinsfaktor einer Verzinsung eines realen Zahlungsstroms **D** interpretiert werden. Aber dennoch kann mittels der Rechnungsgrößen **D** und q_D und der I-Beurteilung von **D** ein I-Vergleich für die Zahlungsströme **X** und **Y** angegeben werden, der konsistent zu deren Kapitalwertvergleich bzw. Endwertvergleich ist. Außerdem wird in Abschnitt 7.14 gezeigt, dass die damit gegebene Methodenkombination (ID) & (EF) auch ökonomisch mittels der Kapitalwertmethode oder allgemeiner mittels der Zeitwertmethode interpretiert werden kann.

Damit die I-Beurteilung nach einer der Varianten, die in den Abschnitten 7.1, 7.2, 7.3 und in den beiden Beispielen von Abschnitt 7.4 beschrieben werden, formal einfacher angewandt werden kann, ist für den Differenzzahlungsstrom **D** die Bedingung $D_0 \neq 0$ vorauszusetzen. Eine allgemeinere Darstellung würde eine Investition als lexikonegativen Zahlungsstrom und eine Finanzierung als lexikopositiven Zahlungsstrom definieren und zur Beurteilung eines Zahlungsstroms

$$\mathbf{X} = (0,\ldots,0,X_m,\ldots,X_n)^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^1 \\ \mathbf{X}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{O}\} \text{ mit}$$

$$\mathbf{X}^1 = (0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{X}^2 = (X_m,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n-m+1}, X_m \neq 0 \ (0 \leq m \leq n),$$

den Teilvektor $\mathbf{X}^2$ verwenden, der entweder eine Investition ($X_m < 0$) oder eine Finanzierung ($X_m > 0$) im engeren Sinne ist.

Investitionen als lexikonegative Zahlungsströme und die Finanzierungen als lexikopositive Zahlungsströme

Die zahlungsstromorientierte Definition einer Investition bzw. einer Finanzierung (siehe z.B. Gerke und Bank (1998), S. 7) kann allgemeiner auch für Zahlungsfolgen (Zahlungsströme) $\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ gefasst werden, die mit einer ersten Zahlung $X_0 = 0$ beginnen können: Die Zahlungsfolge

$$\mathbf{X} = (0,\ldots,0,X_m,\ldots,X_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{O}\} \qquad (0 \leq m \leq n)$$

wird als Investition (bzw. Finanzierung) bezeichnet, wenn die erste von Null verschiedene Komponente X_m eine Auszahlung (bzw. eine Einzahlung) darstellt, wenn also für einen Index m, $0 \leq m \leq n$, gilt:

$$X_j = 0 \text{ für } j = 0,\ldots,m\text{-}1,\ X_m < 0 \ \ (\text{bzw. } X_m > 0).$$

Bezüglich der lexikografischen Ordnung „$\succ$“ („lexikografisch größer als“; siehe z.B. Duden (1985), S. 375, Vieweg Mathematik Lexikon (1995), S. 173, Collatz und Wetterling (1971), S. 21, Jarre und Stoer (2004), S. 41) im $\mathbb{R}^{n+1}$ sind dann die Investionen die lexikonegativen (lexikografisch negativen) Zahlungsfolgen ($\mathbf{X} \prec \mathbf{O}$ bzw. $-\mathbf{X} \succ \mathbf{O}$) und die Finanzierungen die lexikopositiven (lexikografisch positiven) Zahlungsfolgen ($\mathbf{X} \succ \mathbf{O}$).

Da aber alle diese I-Beurteilungen nur Spezialfälle der universell anwendbaren IB-Beurteilung sind, wird der **ID-Vergleich**, d. h. der I-Vergleich nach der Methode (ID), nachfolgend nur unter Verwendung der IB-Beurteilung behandelt. Da hierbei jeder Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auftreten darf, kann dieser I-Vergleich wie der B-Vergleich für beliebige Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ durchgeführt werden und ist nicht auf Paare von Investitionen (lexikonegativen Zahlungsströme) bzw. Finanzierungen (lexikopositiven Zahlungsströme) oder Paare mit gleicher Beurteilung der einzelnen Zahlungsströme **X** und **Y** beschränkt. Dieser universell anwendbare ID-Vergleich ist äquivalent zum B-Vergleich und den anderen klassischen Vergleichsmethoden (Endwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode) mit einem konstanten Kalkulationszinsfaktor und steht damit gleichberechtigt neben diesen Vergleichsmethoden. Der Anwendungsbereich des universellen ID-Vergleichs ist die gesamte Menge $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ der Zahlungsstrompaare ($\mathbf{X},\mathbf{Y}$) der Laufzeit n.

Auch wenn die zu vergleichenden Zahlungsströme **X** und **Y** Investitionen sind, muss deren Bezeichnung nicht wie in der Literatur üblich so gewählt werden, dass die Rechnungsgröße $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ ebenfalls eine Investition ist. Es gilt nämlich, dass der E-Beurteilung und der I-Beurteilung einer Finanzierung **D** die umgekehrte E-Beurteilung und umgekehrte I-Beurteilung der Investition $\mathbf{D}' = -\mathbf{D}$ entsprechen. Damit liegt auch die Übereinstimmung (Konsistenz) der I- und E-Beurteilung für die Finanzierung **D** genau dann vor, wenn dies für die zugeordnete Investition **D‘** gilt. Für eine kürzere Einzelfallbetrachtung eines einzelnen Zahlungsstrompaares könnte man sich, wie in der Literatur üblich, schon auf den Fall beschränken, dass durch die Wahl der Bezeichnungen **X** und **Y** für die Investitionen auch der Differenzzahlungsstrom

D = **X** - **Y** eine Investition ist. Im Hinblick auf die Erfassung des gesamten Anwendungsbereichs der Methode (ID) wird jedoch hier diese Einschränkung nicht vorgenommen. Die Behandlung des Spezialfalls **D** = **O** wird in Abschnitt 7.5 bei der Darstellung des Anwendungsbereichs der IB-Beurteilung vorgenommen. Dabei wird **D** = **O** als IB-indifferent beurteilt und somit hier **X** genauso ID-vorteilhaft wie **Y** bewertet.

Definition des universell anwendbaren ID-Vergleichs
Es sei ein positiver Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ fest vorgegeben. Für zwei beliebige Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird für den Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ die zu q_K gehörige rechtsseitige Gesamtvielfachheit $m_{>q_K} = m_{>q_K}(\mathbf{D})$ seiner internen Zinsfaktoren q_D (Definition in Abschnitt 7.5) und die Anzahl $k = k(\mathbf{D})$ der Paare konjugiert komplexer Nullstellen des reellen Polynoms $E_n(\mathbf{D},r)$ bestimmt. Auf der gesamten Menge $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ der Zahlungsstrompaare $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ werden für den ID-Vergleich, d. h. den I-Vergleich nach der Methode (ID) unter Verwendung der IB-Beurteilung von Abschnitt 7.5, die Relationen $\sim_{\mathrm{ID},q}$, $\succ_{\mathrm{ID},q}$ und $\prec_{\mathrm{ID},q}$ definiert. Beim strengen Vergleich werden dabei die beiden Fälle unterschieden, ob **D** eine Investition oder eine Finanzierung ist.

Definition des ID-Vergleichs von Zahlungsströmen $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\mathbf{X} \sim_{\mathrm{ID},q} \mathbf{Y}$ (**X** ist ID-neutral zu **Y**, **X** ist genauso ID-vorteilhaft wie **Y**)
$:\Leftrightarrow$ $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \sim_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$
$\Leftrightarrow$ $q = q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von **D**;

$\mathbf{X} \succ_{\mathrm{ID},q} \mathbf{Y}$ (**X** ist ID-vorteilhafter als **Y**)
$:\Leftrightarrow$ $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \succ_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$
$\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \wedge$
[**D** ist Investition und $m_{>q_K} = m_{>q_K}(\mathbf{D})$ ungerade
$\vee$
D ist Finanzierung und $m_{>q_K}$ gerade];

$\mathbf{X} \prec_{\mathrm{ID},q} \mathbf{Y}$ (**X** ist ID-unvorteilhafter als **Y**)
$:\Leftrightarrow$ $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \prec_{\mathrm{I,B},q} \mathbf{O}$
$\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \wedge$
[**D** ist Investition und $m_{>q_K}$ gerade $\vee$
D ist Finanzierung und $m_{>q_K}$ ungerade].

Auswahl eines IB-konsistenten internen Zinsfaktors von D
O. E. wird hierfür nur der Fall betrachtet, dass **D** eine Investition ist. Falls **X** und **Y** zueinander ID-neutral sind, ist $q_\mathrm{D} = q_K$ der einzige IB-konsistente interne Zinsfaktor von **D**, d. h. ein interner Zinsfaktor, mit dem die I-Beurteilung von **D** konsistent zur B-Beurteilung von **D** bzw. zum B-Vergleich von **X** und **Y** ist.

Falls **X** ID-vorteilhafter als **Y** ist, existiert wegen ungeradem $m_{>q_K}$ mindestens ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor von **D**. In diesem Fall sind genau die internen Zinsfaktoren q_{D} von **D** mit $q_{\mathrm{D}} > q_K$ die IB-konsistenten.

Falls **X** ID-unvorteilhafter als **Y** ist, also $m_{>q_K}$ gerade ist, können hinsichtlich der Existenz von IB-konsistenten internen Zinsfaktoren $q_{\mathrm{D}} < q_K$ zwei verschiedene Fälle auftreten: α) Falls $m_{>q_K} < n - 2k$ und wegen $E_n(\mathbf{D},q_K) \neq 0$ somit $m_{<q_K} = n - 2k - m_{>q_K} > 0$ ist, gibt es mindestens einen IB-konsistenten internen Zinsfaktor von **D**. β) Falls dagegen $m_{>q_K} = n - 2k$ und somit $m_{<q_K} = n - 2k - m_{>q_K} = 0$ ist, gibt es keinen (reellen) IB-konsistenten internen Zinsfaktor von **D**. In diesem Fall kann formal $q_{\mathrm{D}} = -\infty$ als ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor von **D** hinzugenommen werden. Anzumerken ist zu dieser Vergleichsmethode jedoch, dass zur Bestimmung des Vergleichsergebnisses ein IB-konsistenter interner Zinsfaktor selbst gar nicht benötigt wird.

Eigenschaften der ID-Relationen

Da die IB-Beurteilung eine Charakterisierung der B- bzw. E-Beurteilung ist, stimmen die ID-Relationen $\sim_{\mathrm{ID},q}$, $\succ_{\mathrm{ID},q}$, $\prec_{\mathrm{ID},q}$ mit den entsprechenden Endwert-Relationen $\sim_{\mathrm{E},q}$, $\succ_{\mathrm{E},q}$, $\prec_{\mathrm{E},q}$ überein:

$$\sim_{\mathrm{ID},q} = \sim_{\mathrm{E},q},\ \succ_{\mathrm{ID},q} = \succ_{\mathrm{E},q},\ \prec_{\mathrm{ID},q} = \prec_{\mathrm{E},q}.$$

Eine Beschreibung dieser ID-Relationen kann also auch mit der zu den E-Relationen gehörigen Nutzenfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ erfolgen.

Spezialfälle des universell anwendbaren ID-Vergleichs

Spezialfälle des ID-Vergleichs ergeben sich aus den Spezialfällen der IB-Beurteilung eines Zahlungsstroms, die bereits in Abschnitt 7.5 angegeben wurden. Von besonderem Interesse waren dabei die Zahlungsströme, die genau einen positiven internen Zinsfaktor besitzen. Nachfolgend werden die dabei auftretenden Besonderheiten für die IB-Beurteilung einer Differenz*investition* **D** = **X** - **Y** beschrieben. Für eine Finanzierung **D** gilt Analoges.

1) Eine NG-Investition **D**, bei welcher der einzige positive interne Zinsfaktor q_{D} eine gerade Nullstellenvielfachheit aufweist, ist für jeden (positiven) Kalkulationszinsfaktor $q_K \neq q_{\mathrm{D}}$ IB-unvorteilhaft und für $q_K = q_{\mathrm{D}}$ IB-indifferent. Demzufolge ist **X** ID-indifferent zu **Y** im Fall $q_{\mathrm{D}} = q_K$ und **X** ID-unvorteilhafter als **Y** im Fall $q_{\mathrm{D}} \neq q_K$.

2) Eine NU-Investition **D**, bei welcher der einzige positive interne Zinsfaktor q_{D} eine ungerade Nullstellenvielfachheit aufweist, ist für $q_{\mathrm{D}} > q_K$ IB-vorteilhaft, für $q_{\mathrm{D}} = q_K$ IB-indifferent und für $0 < q_{\mathrm{D}} < q_K$ IB-unvorteilhaft. Demzufolge ist für $q_{\mathrm{D}} > q_K$ **X** ID-vorteilhafter als **Y**, für $q_{\mathrm{D}} = q_K$ **X** ID-indifferent zu **Y** und für $0 < q_{\mathrm{D}} < q_K$ **X** ID-unvorteilhafter als **Y**. Zu den NU-Investitionen gehören auch die VK-Investitionen (Definition in Abschnitt 7.1.3) mit positivem VK-Zinsfaktor, der die Nullstellenordnung 1 besitzt. Letztere werden in der Literatur wie z. B. bei Blohm und Lüder (1995), S. 90ff., und Götze (2008), S. 97f., als „isoliert

durchführbare Investitionen“ bezeichnet und als Anwendungsbereich der MIZ-Beurteilung angegeben. Zu den VK-Investitionen mit positivem VK-Zinsfaktor gehören insbesondere auch die regulären Investitionen und die Normalinvestitionen.

7.14 Ökonomische Interpretation der Methode für den Vergleich und ökonomische Interpretation beider interner Zinssätze

Eine **ökonomische Interpretierbarkeit der Methode** des internen Zinssatzes für den *Vergleich von zwei festen Zahlungsströmen* ist durch ihre Ergebniskonsistenz mit der Kapitalwertmethode bzw. der Endwertmethode auf dem dazu bestimmten Anwendungsbereich möglich: Nach Abschnitt 6.3.7.3 bzw. Abschnitt 6.1 können nämlich für zwei zu vergleichende Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ deren Endwerte $E_n(\mathbf{X},q)$ und $E_n(\mathbf{Y},q)$ zum Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ jeweils als Margen zum Endzeitpunkt realisiert werden, wenn für sie gemäß der **impliziten Prämisse** (RSnq) die beiden Supplemente

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = - \mathbf{X} + E_n(\mathbf{X},q),$$
$$\mathbf{S}‘(\mathbf{Y}) = - \mathbf{Y} + E_n(\mathbf{Y},q)$$

auf dem Kapitalmarkt dem Entscheider zur Verfügung stehen.

Unter dieser Voraussetzung (RSnq) für die ökonomische Interpretation der Endwerte $E_n(\mathbf{X},q)$ und $E_n(\mathbf{Y},q)$ besteht im Anwendungsbereich die ökonomische Interpretierbarkeit der I-Vergleichsmethode dann darin, dass der Vergleich der internen Zinsfaktoren $q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_{int}(\mathbf{Y})$ bei der Methode (IV) bzw. der Vergleich des internen Zinsfaktors $q_{int}(\mathbf{D})$, $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$, mit dem Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ bei der Methode (ID) äquivalent ist zum entsprechenden Vergleich der ökonomisch als Margen realisierbaren Endwerte.

Eine entsprechende Aussage ergibt sich mit der Prämisse (RSmq) für die Zeitwerte der Zahlungsströme. Einen universellen Vergleich auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ erhält man dabei, wenn man für den I-Vergleich die Methode (ID) mit der IB-Beurteilung des Differenzzahlungsstroms verwendet.

Fordert man die Voraussetzung (RSnq) *für alle Zahlungsströme* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, so ergibt dies nach Abschnitt 6.3.7.3 die sehr starke Voraussetzung, dass dem Entscheider auf dem Kapitalmarkt die sehr spezielle vollkommene zulässige Supplementmenge

$$C_{M^n} = H_{\mathbf{P}(q),0}$$

mit dem speziellen Preisvektor $\mathbf{P}(q) = (1,1/q,\ldots,1/q^n)^\mathrm{T}$ zur Verfügung steht.

Dass in der Praxis tatsächlich für den Entscheider eine konkrete finanzielle Situation vorhanden sein kann, in der zumindest *Zahlungsströme einer gewissen Menge G* auf ihren Endwert glattgestellt werden können, wird in Beispiel 6.2 mit einem sogenannten Verrechnungskonto dargestellt.

In den im Abschnitt 7.13 angegebenen Spezialfällen 1) und 2), in denen der Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** ein NG- oder NU-Zahlungsstrom ist, kann der ID-Vergleich mit dem einzigen positiven internen Zinsfaktor q_D von **D** durchgeführt werden. Dieser interne Zinsfaktor q_D des im Allgemeinen nicht realisierbaren und nur als Rechnungsgröße auftretenden Zahlungsstroms **D** kann aber **selbst nicht ökonomisch interpretiert** werden als Zinsfaktor einer Verzinsung eines realen Zahlungsstroms.

Bei der Methode (IV) ist eine **ökonomische Interpretation der beiden internen Zinsfaktoren** $q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_{int}(\mathbf{Y})$ selbst jeweils als Zinsfaktor einer realen Verzinsung von **X** bzw. **Y** mittels eines konstanten ökonomisch realisierbaren Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ nur in einem Spezialfall möglich: Unter den Voraussetzungen (RSnq) und (IK) von Abschnitt 7.7.1 ist diese Interpretation nämlich nur möglich, wenn die beiden internen Zinsfaktoren gleich dem Kalkulationszinsfaktor q_K sind: $q_{int}(\mathbf{X}) = q_K = q_{int}(\mathbf{Y})$. Bei verschiedenen internen Zinsfaktoren würde deren beider Interpretation durch verschiedene Kalkulationszinsfaktoren einen „Verstoß gegen die Logik des Vergleichens“ (Kruschwitz (1978), S. 100) mit einem einheitlichen Maßstab q_K darstellen. In diesem Spezialfall sind beide Zahlungsströme **X** und **Y** indifferent beurteilt.
Beispielsweise kann mit dem Verrechnungskonto des Beispiels 6.2 von Abschnitt 6.3.7.3 ein Zahlungsstrom **X** auf den Endwert $E_n(\mathbf{X},q) = 0$ aufgezinst werden, wenn dessen Verrechenbarkeit durch die Voraussetzung (VCn) und wenn der Endwert Null durch die Übereinstimmung des Kontozinsfaktors $q = q_K$ mit dem internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ gesichert ist. In diesem Spezialfall ist der interne Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ gleich dem Kontozinsfaktor und gleich dem Zinsfaktor q einer realen Verzinsung von **X** und somit ökonomisch interpretierbar. Soll dies nun auch noch für einen alternativen Zahlungsstrom **Y** gelten und damit für die beiden internen Zinsfaktoren $q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_{int}(\mathbf{Y})$ eine ökonomische Interpretation möglich sein, so ist dies nur im Fall $q_{int}(\mathbf{X}) = q = q_{int}(\mathbf{Y})$ möglich.

7.15 Kritik und Verallgemeinerung der Methode des internen Zinssatzes für den Vergleich

7.15.1 Kritik der Varianten des I-Vergleichs mit jeweils einem einzigen internen Zinsfaktor

Zu Beginn des Abschnitts 7.9 werden einige Zahlenbeispiele der Literatur angeführt, in denen der I-Vergleich nach der Methode (IV) mittels der internen Zinsfaktoren q_X und q_Y der Zahlungsströme **X** und **Y** nicht konsistent ist zum E-Vergleich (Endwertvergleich) der Zahlungsströme mit einem bestimmten Kalkulationszinsfaktor. Diese Tatsache wurde in der Literatur zum Anlass genommen, die Methode (IV) des I-Vergleichs als unbrauchbar anzusehen.

Bei einem Teil der angeführten Zahlenbeispiele, in denen die Zahlungsströme **X** und **Y** und deren Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** reguläre Investitionen sind, ist für jeden Kalkulationszinsfaktor $q_K > 0$ der I-Vergleich mit der Methode (ID), also mit der I-Beurteilung von **D**, konsistent zum E-Vergleich von **X** und **Y**. Daher wird in der Literatur für derartige Zahlungsstrompaare (**X**,**Y**) die Vergleichsmethode (ID) empfohlen.

Nichtsdestotrotz wird in Abschnitt 7.12 der vorliegenden Abhandlung der I-Vergleich nach der Methode (IV) auch noch für zwei Varianten zunächst mittels Relationen trichotomisch definiert und dann dazu der jeweilige eingeschränkte Anwendungsbereich bestimmt, auf dem der IV-Vergleich konsistent zum E-Vergleich ist. Bei der ersten Variante (Beispiel 7.9) werden beim strengen I-Vergleich alle internen Zinsfaktoren herangezogen, bei der zweiten Variante (Beispiel 7.10) nur jeweils ein interner Zinsfaktor von **X** und **Y**, der durch eine Interner Zinsfaktor-Funktion festgelegt ist. Bei beiden Varianten wird die Zugehörigkeit des Paars (**X**,**Y**) zum Anwendungsbereich durch die Zinsfaktorbedingung für die internen Zinsfaktoren von **X** und **Y** und die Endwertbedingung für den E-Vergleich von **X** und **Y** bzw. die E- oder B-Beurteilung von **D**. Letztere kann nun nicht mittels einer Bedingung für die internen Zinsfaktoren q_X und q_Y von **X** und **Y**, sondern nur mit einer Bedingung für die internen Zinsfaktoren q_D von **D** charakterisiert werden. Eine Begründung wird dafür in Abschnitt 7.5 in einer Anmerkung zum eingeschränkten Anwendungsbereich gegeben. Die in Abschnitt 7.5 angegebene IB-Beurteilung von **D** stellt nun für sich schon einen IB-konsistenten I-Vergleich von **X** und **Y** nach der Methode (ID) dar. Die für den Anwendungsbereich zusätzlich geforderte Zinsfaktorbedingung erweist sich damit als unnötige Einschränkung des Anwendungsbereichs gegenüber dem Anwendungsbereich des ID-Vergleichs. Auf Grund dieser unnötigen Einschränkung des Anwendungsbereichs beim IV-Vergleich erweist sich dieser als weniger geeignet als der universell anwendbare ID-Vergleich mit der universellen IB-Beurteilung des Differenzzahlungsstroms **D**.

7.15.2 Verallgemeinerung des I-Vergleichs zum universellen ID-Vergleich mit der IB-Beurteilung des Differenzzahlungsstroms

Beim I-Vergleich nach der Methode (ID) kann für Zahlungsstrompaare (**X**,**Y**) mit einem speziellen Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** auch eine speziellere I-Beurteilung des Differenzzahlungsstroms vorgenommen werden: Beispielsweise kann ein regulärer Zahlungsstrom oder ein NU-Zahlungsstrom **D** allein mit seinem einzigen positiven internen Zinsfaktor q_D und dem Kalkulationszinsfaktor q_K beurteilt werden. Bei einem allgemeineren Differenzzahlungsstrom **D** jedoch ist die universelle IB-Beurteilung von Abschnitt 7.5 zu nehmen. Diese ist auf jeden Zahlungsstrom **D** $\in \mathbb{R}^{n+1}$ anwendbar und die allgemeinste IB-konsistente I-Beurteilung eines Zahlungsstroms. Der I-Vergleich nach der Methode (ID) speziell mit der universellen IB-Beurteilung des Differenzzahlungsstroms ist universell auf $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ einsetzbar und der allgemeinste I-Vergleich. Er wird hier als universeller ID-Vergleich bezeichnet und enthält alle Varianten des I-Vergleichs nach der Methode (ID) oder (IV) als Spezialfälle.

8 Anhang

In dem nun folgenden mathematischen Anhang wird im ersten Abschnitt über die Relationen eines Vektorraums unter anderem gezeigt, wie eine additiv abgeschlossene Quasiordnung R eines Vektorraums mittels ihrer Differenzenmenge K bzw. ihrer Menge K_+ der R-nichtnegativen Vektoren charakterisiert werden kann. Die zusätzliche Abgeschlossenheit von R bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation liegt genau dann vor, wenn K ein konvexer linearer Kegel ist. Die darüber hinaus vorliegende Identitivität von R bedeutet, dass R eine Halbordnung eines Vektorraums ist und K ein spitzer konvexer linearer Kegel ist. Die Charakterisierung einer bezüglich Konuskombination (Nichtnegativkombination) abgeschlossenen Quasiordnung kann beispielsweise in Kapitel 4 verwendet werden, um aus der Halbraumstruktur der Bessermengen der B-Präferenzordnung zu schließen, dass diese Präferenzordnung bezüglich der Nichtnegativkombination abgeschlossen ist. Weitere Begriffe und Aussagen werden in den Kapiteln 4 und 5 benutzt, um die Eigenschaften der mit den Konzepten der Duplizierung und Replizierung definierten D- und R-Präferenzordnungen darzustellen.

Im zweiten Abschnitt über die konvexe Geometrie, die Geometrie der linearen Ungleichungssysteme, wird mittels der Projektion auf eine konvexe Menge und der Trennung konvexer Mengen ein Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel hergeleitet, der in den Kapiteln 4 und 5 unmittelbar die Existenz eines strikt positiven Normalenvektors für den Linienraum der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte sichert. Dieser Normalenvektor wird auf dem vollkommenen Kapitalmarkt als Preisvektor (Diskontierungsvektor) zur Berechnung der Duplizierung bzw. Replizierung und des Beurteilungsparameters (siehe Abschnitte 4.2.1 und 4.2.2) und auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt für den Beweis zur Vielfalt der Präferenzordnungen (siehe Abschnitt 8.3.6) verwendet.

Im dritten Abschnitt wird die allgemeine Definition einer Beurteilungskurve des Entscheiders angegeben, mit der in streng monotoner Abhängigkeit vom reellen Parameter μ die Verteilung einer Marge (Spanne, Differenz) als Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu)$ in $n+1$ Komponenten $W_j(\mu)$ auf die Zahlungszeitpunkte $j = 0,1,\ldots,n$ beschrieben wird. Es werden einige Eigenschaften dieser Kurven hergeleitet und insbesondere mittels einer Äquivalenzrelation eine Charakterisierung dafür angegeben, wann bei der Duplizierung bzw. der Replizierung zwei verschiedene Beurteilungskurven auf die gleiche D- bzw. R-Präferenzordnung führen.

Im letzten Abschnitt werden spezielle Supplementsysteme von Termingeschäften bzw. Kassageschäften angegeben, für welche die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und der Replizierung bei beliebiger Beurteilungskurve und die Monotonie und Stetigkeit der dazu gehörigen D- und R-Präferenzordnungen bewiesen werden kann.

8.1 Relationen in einem Vektorraum

In diesem Abschnitt über Relationen wird unter anderem dargestellt, wie die Halbordnung R eines Vektorraums V geometrisch durch den zugehörigen Kegel K_+ der R-nichtnegativen Vektoren charakterisiert werden kann. Der Beweis wird gleich etwas allgemeiner für eine Quasiordnung nur mit der zusätzlichen Eigenschaft der Abgeschlossenheit bezüglich der Addition, also ohne die Eigenschaft der Abgeschlossenheit bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation und ohne die Eigenschaft der Identitivität, geführt.

8.1.1 Definition einer Halbordnung eines Vektorraums

Als Verallgemeinerung der totalen Ordnung(srelation) (Totalordnung, Anordnung, lineare Ordnung) $\geq$ („größer oder gleich") in den Zahlenmengen $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen lässt sich auch **für eine beliebige Menge** M eine Ordnungsrelation (1. Art) oder kurz Ordnung definieren. Diese Ordnung 1. Art einer *Menge* wird zur Unterscheidung von der totalen (linearen, konnexen) Ordnungsrelation genauer auch **Halbordnung** (Teilweiseordnung, Partialordnung, nicht-lineare Ordnung) 1. Art genannt. Ihre Definition als eine binäre (2-stellige) Relation in der Menge M, d. h. als Teilmenge R des kartesischen Produkts $M \times M$ von M,

$$R \subseteq M \times M,$$

mit den Eigenschaften der

(H1) Reflexivität:	$(x,x) \in R$ für alle $x \in M$,
(H2) Identitivität (Antisymmetrie):	$(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$,
(H3) Transitivität:	$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$,

findet man beispielsweise im Duden (1985), S. 460–461, dtv-Atlas, Bd. 1 (1994), S. 43, Vieweg Mathematik Lexikon (1995), S. 113, Lexikon der Mathematik, Bd. 2 (2001), S. 357, Teubner-Taschenbuch der Mathematik Teil 1 (1996), S. 936, und Bronstein et al. (1997), S. 278. Die Paare $(x,y) \in R$ heißen dann vergleichbar bezüglich der Halbordnungsrelation R. Weitere Schreibweisen für $(x,y) \in R$, also für die Vergleichbarkeit der Elemente x und y mittels der Relation R, sind

xRy (gelesen als „x steht in Relation zu y"),

$x \geq_R y$ (gelesen als „x größer oder gleich y")

und, wenn keine Verwechslung auftreten kann, auch

$$x \geq y.$$

Aus der Halbordnung 1. Art R einer Menge M erhält man eine Halbordnung 2. Art (**strenge Halbordnung**, Striktordnung) S, wenn man von R die Diagonale

$$\Delta = \{(x,x) : x \in M\}$$

von $M \times M$ wegnimmt:

$$S = R \setminus \Delta.$$

Umgekehrt induziert eine strenge Halbordnung S durch Hinzunahme der Diagonalen Δ auch eine Halbordnung 1. Art R:

$$R = S \cup \Delta.$$

Die strenge Halbordnung S ist also transitiv, antisymmetrisch, antireflexiv (irreflexiv):

$$(x,x) \notin S \text{ für alle } x \in M$$

und daher asymmetrisch:

$$(x,y) \in S \Rightarrow (y,x) \notin S.$$

Die Schreibweisen xSy, $x >_S y$ und $x > y$ werden gelesen als „x größer als y“ oder „x echt größer als y“. Literatur: dtv-Atlas, Bd. 1 (1994), S. 43, und Duden (1985), S. 460.

Zu jeder Halbordnung R existiert wie zu jeder zweistelligen Relation eindeutig die Umkehrrelation (inverse Relation, konverse Relation)

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}.$$

Die Schreibweisen $xR^{-1}y$, $x \leq_R y$ und $x \leq y$ werden gelesen als „x steht in umgekehrter Relation zu y“ und „x kleiner oder gleich y“, die Schreibweisen $xS^{-1}y$, $x <_S y$ und $x < y$ werden gelesen als „x kleiner als y“ oder „x echt kleiner als y“. Literatur: dtv-Atlas, Bd. 1 (1994), S. 31, Bronstein et al. (1997), S. 275, Gellert et al. (1990), S. 484f., Naas und Schmid, Bd. II (1961), S. 486, Lexikon der Mathematik, Bd. 4 (2002), S. 387f, und Duden (1985), S. 539.

Die Abschwächung einer Halbordnung in einer *Menge M*, bei der auf die Antisymmetrie (Identitivität) verzichtet wird, ist eine **Quasiordnung** (Präordnung), also eine reflexive und transitive zweistellige Relation.

Jede Quasiordnung R in der Menge M induziert auch eine **Äquivalenzrelation** (Indifferenzrelation, eine reflexive, transitive und symmetrische Relation)

$$I = R \cap R^{-1}$$

und eine strenge Halbordnung (Halbordnung 2. Art, Striktordnung, eine transitive und irreflexive (antireflexive) Relation)

$$S = R \setminus R^{-1}.$$

Bei einer Halbordnung R ist die zugehörige Äquivalenzrelation I in M die Identität „=“ bzw. in $M \times M$ die Diagonale Δ.

Die Definition der spezielleren **Halbordnung für einen *Vektorraum*** (linearen Raum) V über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen findet man bei Bronstein et al. (1997), S. 556: Zusätzlich zu den drei Eigenschaften (H1), (H2) und (H3) einer Halbordnung R einer Menge sind für die binäre Relation $R \subseteq V \times V$ eines Vektorraums V noch zwei weitere Eigenschaften gegeben, nämlich die Abgeschlossenheit bezüglich der im Vektorraum definierten Addition und der nichtnegativen Skalarmultiplikation:

(H4) Abgeschlossenheit bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation:

$$\lambda R \subseteq R \quad \text{für } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R};$$

(H5) Abgeschlossenheit bezüglich der Addition:

$$R + R \subseteq R.$$

Insgesamt hat man also noch die Abgeschlossenheit bezüglich der Konuskombination (konischen Kombination, nichtnegativen Linearkombination, Nichtnegativkombination) gegeben:

$$\lambda_1 R + \ldots + \lambda_m R \subseteq R \quad \text{für } \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0, m \in \mathbb{N}.$$

Zu jeder binären Relation R eines Vektorraums V kann man die Menge K der Differenzen $x - y$ aller mittels R vergleichbaren Vektorpaare (x,y) bilden:

$$\begin{aligned} K &:= \{u = x - y : (x,y) \in R\} \\ &= \{u = x - y : x \geq_R y\}. \end{aligned}$$

$K \subseteq V$ ist also das Bild der Menge R bei der durch die Differenzbildung

$$diff : (x,y) \in V \times V \mapsto diff(x,y) = x - y \in V$$

beschriebenen linearen Abbildung $diff$ von $V \times V$ nach V:

$$K := diff(R).$$

Folgerung von Eigenschaften der Differenzenmenge *K* aus Eigenschaften der Relation R

Es werden jetzt aus den Eigenschaften (H1), …, (H5) der vorgegebenen Relation R entsprechende Eigenschaften der dazu definierten Differenzenmenge K hergeleitet.

Aus der Eigenschaft (H1) der Reflexivität von R ergibt sich für K die Eigenschaft

(K1): $o \in K.$

Der Vektorraum V enthält nämlich auf Grund seiner Definition zumindest das zur Addition gehörige Nullelement o und ist somit eine nichtleere Menge. Da wegen (H1) speziell für $x = o$ die Relation $x \geq_R x$ gilt, ist $R \neq \emptyset$ und

$$o = x - x \in K.$$

Aus der Eigenschaft (H4), der Abgeschlossenheit von R bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation, folgt für K die Eigenschaft der

(K4) Abgeschlossenheit von K bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation:

$\lambda K \subseteq K$ für $\lambda \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

K ist ein linearer Kegel und bei $R \neq \emptyset$ ist noch $K \neq \emptyset$ und $o \in K$.

Zu jedem $u \in K = diff(R)$ gibt es nämlich ein Paar $(x,y) \in R$ mit $u = diff(x,y) = x - y$. Für jedes $\lambda \geq 0$ ist wegen (H4) $(\lambda x,\lambda y) = \lambda(x,y) \in R$ und somit

$$\lambda u = \lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y = diff(\lambda x,\lambda y) \in diff(R) = K.$$

Bei $R \neq \emptyset$ gibt es ein Paar $(x,y) \in R$, sodass $u = diff(x,y) \in K$ und wegen (H4) auch $o = 0 \cdot u \in K$ gilt.

Aus der Eigenschaft (H5), der Abgeschlossenheit von R bezüglich der Addition, resultiert für K die Eigenschaft der

(K5) Abgeschlossenheit von K bezüglich der Addition:

$$K + K \subseteq K.$$

Zu beliebigen Elementen $u, u' \in K$ gibt es nämlich $(x,y), (x',y') \in R$ mit $u = x - y$ und $u' = x' - y'$. Wegen (H5) gilt

$$(x+x',y+y') = (x,y) + (x',y') \in R$$

und damit

$$u + u' = x + x' - (y + y') = diff(x+x',y+y') \in diff(R) = K.$$

In Aussage c) des nachfolgenden Satzes wird für eine Relation R von V mit den Eigenschaften (H1) und (H5) eine schöne Charakterisierung der Relation R mittels der zugehörigen Differenzenmenge K angegeben. Für deren Beweis wird zuerst noch der Begriff der Bessermenge und der Menge der R-nichtnegativen Vektoren bereitgestellt. Zu jedem fest vorgegebenen Vektor $y \in V$ ist die Bessermenge von y definiert durch

$$W_+(y) := \{x \in V : x \geq_R y\},$$

also als die Menge aller $x \in V$, die mit y bezüglich der Relation $\geq_R$ vergleichbar (größer oder gleich y bezüglich $\geq_R$) sind. Als Spezialfall davon erhält man mit der Bessermenge von $y = o$ die Menge

$$K_+ := W_+(o) = \{u \in V : u \geq_R o\}$$

der R-nichtnegativen Vektoren von V. Bei einer reflexiven Relation R ist zumindest $o \in K_+$. Allgemein gilt für ein beliebiges $u \in K_+$ die Relation $u \geq_R o$ und somit $u = u - o \in K$. Also ist K_+ eine Teilmenge von K.

8.1.2 Charakterisierung einer additiv abgeschlossenen Quasiordnung

Der folgende mathematische Satz gibt eine Charakterisierung einer additiv abgeschlossenen Quasiordnung R eines Vektorraums V mittels ihrer Menge K_+ der R-nichtnegativen Vektoren. Im anschließenden Zusatz werden bei Hinzunahme der weiteren Eigenschaften einer Halbordnung R eines Vektorraums V noch die entsprechenden weiteren geometrischen Eigenschaften der Menge $K = K_+$ angegeben und schließlich die Halbordnung R dadurch charakterisiert, dass K_+ ein spitzer konvexer linearer Kegel ist.

Satz 8.1.1 Charakterisierung einer additiv abgeschlossenen Quasiordnung R eines Vektorraums mittels der Menge K_+ der R-nichtnegativen Vektoren

Für eine binäre Relation R eines reellen Vektorraums V mit den Eigenschaften der

(H1) Reflexivität und der

(H5) Abgeschlossenheit bezüglich der Addition

und die zugehörige Differenzenmenge

$$K := diff(R)$$

gelten die folgenden Aussagen:

a) Die Menge $K = diff(R)$ der Differenzen der R-vergleichbaren Vektorpaare ist schon durch ihre Teilmenge K_+ der R-nichtnegativen Vektoren gegeben:

$$K_+ = K.$$

b) Die Urbildmenge $diff^{-1}(K)$ von K bei der Abbildung

$$diff: (x,y) \in V \times V \mapsto diff(x,y) = x - y \in V$$

ist in R enthalten und somit gleich R:

$$R = diff^{-1}(K).$$

c) Charakterisierung der Relation R (der additiv abgeschlossenen Quasiordnung) mittels der Differenzenmenge K bzw. der Menge K_+ der R-nichtnegativen Vektoren:

Zwei Vektoren $v, w \in V$ sind genau dann mittels R vergleichbar ($v \geq_R w$), wenn ihr Differenzvektor $v - w$ in K liegt:

$$v \geq_R w \Leftrightarrow v - w \in K_+ = K.$$

d) Für jedes $y \in V$ erhält man für die Bessermenge von y die Darstellung als Minkowski-Summe von y und K_+:

$$W_+(y) = y + K_+.$$

e) Die Relation R hat auch die Eigenschaft der

(H3) Transitivität,

so dass R also eine additiv abgeschlossene Quasiordnung ist.

Zusatz 8.1.2 Weitere Eigenschaften der Menge $K = K_+$ der R-nichtnegativen Vektoren bei zusätzlichen Eigenschaften der Relation R

Für eine Relation R eines reellen Vektorraums V, die neben den Eigenschaften der

(H1) Reflexivität und der

(H5) Abgeschlossenheit bezüglich der Addition

zusätzlich noch die Eigenschaft der

(H2) Identitivität (Antisymmetrie) oder/und der

(H4) Abgeschlossenheit bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation

aufweist, werden weitere Eigenschaften der Menge $K = diff(R)$ angegeben.

a) Mit der zusätzlichen Eigenschaft (H2) von R folgt für die Differenzenmenge $K = diff(R)$ der Relation R die Trivialität seiner Untermenge $L := K \cap (-K)$:

(K2) $L := K \cap (-K) = O = \{o\}$.

b) Mit der zusätzlichen Eigenschaft (H4) von R folgt für K die Eigenschaft

(K6) K ist ein konvexer linearer Kegel.

Daher ist für jedes $y \in V$ die Bessermenge

$$W_+(y) = y + K$$

ein konvexer affiner Kegel mit y als Scheitelpunkt (Spitze) des Kegels und dem von y unabhängigen zugehörigen konvexen linearen Kegel

$$K = K_+ = W_+(o) = \{u \in V : u \geq_R o\}$$

aller $\geq_R$-nichtnegativen Vektoren von V.
Außerdem ist die in K enthaltene Teilmenge $L = K \cap (-K)$ ein Vektorunterraum von V und zwar der größte in K enthaltene Vektorunterraum. L wird **Linienraum** des konvexen linearen Kegels K genannt.
Weiter ist dann die Eigenschaft

(K2) $L = O$

gleichbedeutend mit der Eigenschaft

(K2*) K enthält keine Geraden durch den Nullpunkt (Nullvektor) o.

c) **Charakterisierung einer Halbordnung eines Vektorraums**: Mit den zusätzlichen Eigenschaften (H4) und (H2) ist die Relation R eine Halbordnung eines Vektorraums. Die zugehörige Menge

$$K = diff(R) = K_+$$

ist dann ein konvexer linearer Kegel mit der Eigenschaft (K2) bzw. (K2*) und somit ein spitzer konvexer linearer Kegel. Dementsprechend sind die Bessermengen

$$W_+(y) = y + K_+$$

spitze konvexe affine Kegel. Insbesondere ist die Halbordnung R durch den zugehörigen spitzen konvexen linearen Kegel K_+ charakterisiert:

$$x \geq_R y \Leftrightarrow x - y \in K_+.$$

Zusatz 8.1.3 Die additiv abgeschlossene Präferenzordnung zu einer additiven Nutzenfunktion

Ist die binäre Relation R des reellen Vektorraums V unter Verwendung einer beliebigen auf ganz V definierten Funktion $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ als sogenannter Nutzenfunktion definiert,

$$v \geq_R w :\Leftrightarrow f(v) \geq f(w),$$

und ist die **Nutzenfunktion** f **additiv**,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ für alle } x, y \in V,$$

so besitzt die Relation R die Eigenschaften (H1), (H5) und (H3). Zu beachten ist, dass die Funktion f auf ganz V und nicht nur auf einer Teilmenge von V definiert ist und somit die Eigenschaft (H1) der Reflexivität von R auf ganz V gesichert ist. R ist dann eine additiv abgeschlossene Präferenzordnung auf V und es gilt für $v, w \in V$:

$$v \geq_R w \Leftrightarrow f(u) \geq 0 \text{ für } u := v - w.$$

Insbesondere gilt diese Aussage auch für eine lineare Nutzenfunktion, die also additiv und noch homogen ist:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ für alle } x \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

In dem Spezialfall einer **linearen Nutzenfunktion** f ist die Präferenzordnung R auch noch abgeschlossen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation.

Beweis des Satzes 8.1.1: *Beweis für a):* „$K_+ \subseteq K$“: Auf Grund der Definition der Mengen

$$K = diff(R) = \{u = x - y : x \geq_R y\}$$

und

$$K_+ = \{u = u - o \in V : u \geq_R o\}$$

ist K_+ eine Teilmenge von K.
„$K \subseteq K_+$“: Unter Verwendung der Eigenschaften (H1) und (H5) wird jetzt auch die umgekehrte Inklusion $K \subseteq K_+$ und somit insgesamt $K = K_+$ gezeigt. Für ein beliebiges $u \in K$ gibt es $x, y \in V$ mit $u = x - y$ und $x \geq_R y$. Wegen der Vektorraum-Eigenschaft von V ist $- y \in V$ und wegen der Gültigkeit der Eigenschaft (H1) der Reflexivität auf ganz V (und nicht nur auf einer Teilmenge des Vektorraums) ist noch $- y \geq_R - y$, so dass wegen (H5) $x + (- y) \geq_R y + (- y) = o$ folgt, also $u = x - y \geq_R o$, d. h. $u \in K_+$. Daher stellt unter diesen Voraussetzungen die Teilmenge K_+ von K schon die gesamte Menge K dar:

$$K_+ = K.$$

Beweis für b): „$R = diff^{-1}(K)$“: „$\subseteq$“: Auf Grund der Definition von $K := diff(R)$ liegt für jedes Vektorpaar $(x,y) \in R$ das Bild $u = diff(x,y)$ in K. Daher ist $(x,y) \in diff^{-1}(\{u\}) \subseteq diff^{-1}(K)$. Damit gilt stets die Inklusion

$$R \subseteq diff^{-1}(K) = \{(x,y) \in V \times V : x - y \in K\}.$$

„$\supseteq$“: Die umgekehrte nichttriviale Inklusion

$$diff^{-1}(K) \subseteq R$$

wird nun unter Verwendung der Eigenschaften (H1) und (H5) gezeigt. Für jedes Vektorpaar (v,w) mit $(v,w) \in diff^{-1}(K)$ bzw. mit $v - w = diff(v,w) \in K$ soll also $(v,w) \in R$ gezeigt werden. Auf Grund der Voraussetzung $v - w \in K$ und der bereits in Teil a) bewiesenen Mengenbeziehung $K = K_+$ ist also

$$v - w \geq_R o.$$

Außerdem gilt wegen (H1)

$$w \geq_R w,$$

so dass mit (H5) folgt

$$v = v - w + w \geq_R o + w = w$$

bzw. $(v,w) \in R$. Damit ist auch die nichttriviale Inklusion und insgesamt $diff^{-1}(K) = R$ bewiesen.

Beweis für c): „$\Rightarrow$“: Als Erstes ist für zwei R-vergleichbare Vektoren $v, w \in V$ zu zeigen, dass ihr Differenzvektor $v - w = diff(v,w)$ in K liegt bzw. (v,w) in der Urbildmenge $diff^{-1}(K)$ von K liegt. Dies ist gleichbedeutend mit der Mengeninklusion $diff(R) \subseteq K$ bzw. $R \subseteq diff^{-1}(K)$. Auf Grund der hier verwendeten Definition von $K := diff(R)$ ist dies erfüllt.
„$\Leftarrow$“: Als Zweites ist für die nichttriviale umgekehrte Richtung der Aussage c) zu zeigen, dass für beliebige Vektoren $v, w \in V$ mit $v - w = diff(v,w) \in K$ bzw. mit $(v,w) \in diff^{-1}(K)$ auch $(v,w) \in R$ gilt. Dies ist nun gleichbedeutend mit der Mengeninklusion $diff^{-1}(K) \subseteq R$. Diese wurde aber in Teil b) aus den Eigenschaften (H1) und (H5) gefolgert.
Die angegebene Charakterisierung von R ist also gleichbedeutend zur Gültigkeit der beiden Inklusionen $R \subseteq diff^{-1}(K)$ und $diff^{-1}(K) \subseteq R$, also insgesamt zu

$$R = diff^{-1}(K).$$

In Teil b) wurde die erste der beiden Inklusionen aus der Definition von K und die zweite aus den Eigenschaften (H1) und (H5) geschlossen.

Beweis für d): Die Bedingung $x \in W_+(y)$ bzw. $x \geq_R y$ ist nach Teil c) und a) äquivalent zu $x - y \in K = K_+$ bzw. zu

$$x = y + x - y \in y + K = y + K_+.$$

Also gilt die Mengenbeziehung $W_+(y) = y + K_+$.

Beweis für e): Für die Transitivität der Relation R ist aus den vorgegebenen Relationen $x \geq_R y$ und $y \geq_R z$ die Relation $x \geq_R z$ zu folgern. Da $- y, - z \in V$ gilt und wegen (H1) $- y \geq_R - y$ und $- z \geq_R - z$ gilt, folgt mit c) zunächst $x - y \geq_R o$ und $y - z \geq_R o$, dann mit (H5) daraus

$$x - z = x - y + y - z \geq_R o + o = o,$$

also $x - z \in K_+$ und mit c) die gewünschte Relation $x \geq_R z$. Die Relation R besitzt mit den Eigenschaften (H1) und (H5) also auch die Eigenschaft (H3) und ist somit eine Quasiordnung, die noch zusätzlich abgeschlossen bezüglich der Addition ist. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

Beweis des Zusatzes 8.1.2: *Beweis für a):* Für $u \in L := K \cap (-K)$ ist $u \in K = K_+$ und somit $u \geq_R o$. Außerdem ist $u = -u' \in -K$ mit $u' \in K$, also $-u = u' \in K = K_+$ und somit $-u \geq_R o$. Da wegen (H1) $u \geq_R u$ gilt, folgt mit (H5) $o = u - u \geq_R u + o = u$. Aus $u \geq_R o$ und $o \geq_R u$ folgt wegen (H2) $u = o$. Damit ist zunächst $L \subseteq O$ gezeigt.
Da wegen (H1) oben bereits $o \in K$ gezeigt wurde, folgt auch $o = -o \in -K$ und $o \in K \cap (-K) = L$, also $O \subseteq L$ und insgesamt $L = O$.

Beweis für b): Aus den Eigenschaften (H4) und (H5) von R wurden oben die Eigenschaften (K4) und (K5) für K hergeleitet. Beide zusammen bedeuten, dass K abgeschlossen ist bezüglich der Konuskombination (konischen Linearkombination, nichtnegativen Linearkombination, Nichtnegativkombination):

$$\lambda_1 K + \ldots + \lambda_m K \subseteq K \quad \text{für } \lambda_j \geq 0,\ \lambda_j \in \mathbb{R},\quad j = 1,\ldots,m;\ m \in \mathbb{N}.$$

Es wird nachfolgend noch gezeigt, dass dies gleichbedeutend dazu ist, dass K ein konvexer linearer Kegel ist.

Die speziellere Definition eines konvexen Kegels mit $s = o$ als Scheitelpunkt (*linearer* konvexer Kegel) als eine nichtleere konvexe Menge K, die auch ein linearer Kegel ist, also auch noch abgeschlossen bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation ist,

$$\lambda K = \{\lambda u : u \in K\} \subseteq K \text{ für jedes } \lambda \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

findet man beispielsweise bei Stoer und Witzgall (1970), S. 32, Rockafellar (1970), S. 13, 14, und Jungnickel (2008), S. 24. Demnach enthält K als linearer Kegel mit einem Vektor $u \neq o$ auch den gesamten vom Nullpunkt o ausgehenden und von u erzeugten Strahl (Halbgerade)

$$\text{ray } u = \{\lambda u : \lambda \geq 0\}.$$

Beispielsweise ist jeder Vektorunterraum U von V ein konvexer linearer Kegel.
Die allgemeinere Definition eines konvexen Kegels K mit beliebig fixiertem Scheitelpunkt (Spitze) $s \in V$ (*affiner* konvexer Kegel) als nichtleere konvexe und von V verschiedene Teilmenge $K \subseteq V$, bei der für jeden Punkt $p \in K$ auch die gesamte von s ausgehende und durch p verlaufende Halbgerade in K liegt, findet man im Lexikon der Mathematik, Bd. 3 (2001), S. 197:

$$p \in K \Longrightarrow s + \text{ray } (p - s) = \{s + \lambda(p - s) : \lambda \geq 0\} \subseteq K.$$

Ein affiner Kegel K mit möglichem Scheitelpunkt (Spitze) $s \in V$ liegt genau dann vor, wenn für ein Element $s \in K$ die Menge

$$K - s = \{v \in V : v = u - s,\ u \in K\}$$

ein linearer Kegel ist.

Den Beweis für die oben angegebene Charakterisierung des konvexen linearen Kegels durch die Abgeschlossenheit bezüglich konischer Kombination findet man beispielsweise bei Rockafellar (1970), S. 14: Die Eigenschaft (K4) der Abgeschlossenheit von K bei nichtnegativer Skalarmultiplikation bedeutet, dass K ein linearer Kegel ist. Es bleibt zu zeigen, dass bei vorliegender Eigenschaft (K4) die Eigenschaft (K5) der Abgeschlossenheit von K bei der Addition gleichbedeutend zur Konvexität von K ist. Falls K die Eigenschaften (K4) und (K5) hat, ist K insbesondere auch abgeschlossen bezüglich der Konvexkombination (konvexen Linearkombination), d. h. der nichtnegativen Linearkombination mit Koeffizientensumme gleich Eins: Mit $u, u' \in K$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ ist dann auch

$$(1 - \lambda)u + \lambda u' \in K,$$

also K eine konvexe Menge. Falls umgekehrt K eine konvexe Menge ist, ist mit $u, u' \in K$ auch

$$v = \tfrac{1}{2} u + \tfrac{1}{2} u' \in K$$

und wegen (K4) dann auch $u + u' = 2v \in K$. Daher ist K abgeschlossen bei der Addition. Insgesamt ist damit gezeigt, dass ein (nichtleerer) linearer Kegel K genau dann konvex ist, wenn er abgeschlossen bezüglich der Addition ist.
Die Aussage über die Bessermengen $W_+(y)$ ergibt sich unmittelbar aus Satz 8.1.1 d) und a).
Für einen konvexen linearen Kegel K ist die Teilmenge

$$L := K \cap (-K)$$

der größte in K enthaltene Vektorunterraum (Untervektorraum, lineare Unterraum), der sogenannte **Linienraum** von K (Borgwardt (2001), S. 56; Jungnickel (2008), S. 73, 74). Zum *Beweis* wird dafür bei Rockafellar (1970), S. 15, gezeigt, dass L abgeschlossen ist bezüglich der Addition, der nichtnegativen Skalarmultiplikation und der Multiplikation mit - 1. Insgesamt ist dann nämlich L abgeschlossen bezüglich der Addition und der Skalarmultiplikation, also ein Vektorunterraum von V. Für $x, y \in L$ gilt $x, y \in K$ und wegen (K5) $x + y \in K$. Weiter gilt $x, y \in -K$ bzw. $-x, -y \in K$ und wegen (K5) $-(x + y) = (-x) + (-y) \in K$ bzw. $x + y \in -K$. Insgesamt ist $x + y \in L = K \cap (-K)$, also L abgeschlossen bei der Addition:

$$L + L \subseteq L.$$

Für $x \in -K$, d. h. $x = -x'$ mit $x' \in K$, und $\lambda \geq 0$ gilt wegen (K4)

$$\lambda x = -\lambda x' \in -K,$$

so dass auch $-K$ abgeschlossen ist bei der nichtnegativen Skalarmultiplikation. Mit K und $-K$ ist dann auch ihr Durchschnitt L abgeschlossen bei nichtnegativer Skalarmultiplikation:

$$\lambda L \subseteq L \text{ für } \lambda \geq 0.$$

Für $x \in L$ gilt $x \in K$ und $x = -x' \in -K$ mit $x' \in K$. Für $x' = -x$ gilt außerdem $x' \in -K$, also $-x = x' \in L$. Demnach ist $-L \subseteq L$, also L abgeschlossen bei der Multiplikation mit -1. Außerdem folgt aus $-L \subseteq L$ auch $L = -(-L) \subseteq -L$ und insgesamt

$$-L = L,$$

die Symmetrie von L zum Nullpunkt o.
Für einen weiteren Vektorunterraum $U \subseteq K$ ist $-U \subseteq U \subseteq K$, also $U \subseteq -K$ und insgesamt $U \subseteq L$. Daher ist L der größte im konvexen linearen Kegel K enthaltene Vektorunterraum. Die Teilmenge $L = K \cap (-K)$ von K heißt der Linienraum von K, da L mit einem Vektor $u \neq o$ auch die lineare Hülle

$$[u] = \text{lin}\ \{u\} = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

von u enthält, die ein eindimensionaler Vektorunterraum bzw. eine Gerade durch den Nullpunkt o ist. Der Unterraum L enthält also alle in K enthaltenen Geraden durch den Nullpunkt o.
Wenn nun K die Eigenschaft (K2*) aufweist, also keine Geraden durch den Nullpunkt o enthält, dann enthält auch seine Teilmenge L keine Geraden $[u]$ durch o und ist somit gleich dem Nullraum $O = \{o\}$. Weist umgekehrt K die Eigenschaft (K2) $L = O$ auf, so kann K keine eindimensionalen Vektorunterräume $[u]$, $u \neq o$, enthalten, da L der größte in K enthaltene Vektorunterraum ist. Für einen konvexen linearen Kegel K ist also die Eigenschaft (K2), dass der Linienraum trivial ist, gleichbedeutend mit der Eigenschaft (K2*), dass der Kegel K keine Geraden durch den Nullpunkt enthält. Ein konvexer linearer Kegel K mit der Eigenschaft (K2*) enthält zu jedem $u \in K$ zwar den Strahl ray u $(u \neq o)$, aber nicht auch noch den entgegengesetzten Strahl ray $(-u)$, also nicht die gesamte Gerade durch o, d. h. nicht den gesamten von u erzeugten eindimensionalen Vektorunterraum

$$[u] = \text{lin}\ u = \text{ray}\ u \cup \text{ray}\ (-u).$$

Ein konvexer linearer Kegel mit der Eigenschaft (K2) bzw. (K2*) heißt spitz.

Beweis für c): Mit der zusätzlichen Eigenschaft (H4) von R ergibt sich K als konvexer linearer Kegel. Mit der zusätzlichen Eigenschaft (H2) von R ist der Linienraum $L = K \cap (-K)$ von K gleich dem Nullraum O. Nach Teil b) des Zusatzes besitzt dann K die Eigenschaft (K2*), so dass K keine Geraden durch den Nullpunkt o enthält. Somit ist K ein spitzer konvexer linearer Kegel. Die Charakterisierung der Halbordnung R mittels des zugehörigen Kegels $K = K_+$ ergibt sich nach Satz 8.1.1 c) und a):

$$x \geq_R y \iff x \in W_+(y) \iff x - y \in W_+(y) - y = K_+.$$

Damit ist der Beweis des Zusatzes erbracht. □

Beweis des Zusatzes 8.1.3: Aus der Definition der Relation R mittels einer auf ganz V definierten Nutzenfunktion f folgt die Reflexivität von R auf ganz V und aus der Additivität von f die additive Abgeschlossenheit von R: Für jedes $x \in V$ ist (H1) $x \geq_R x$ erfüllt, da $f(x) \geq f(x)$ ist. Aus $x \geq_R y$, $x' \geq_R y'$ bzw. $f(x) \geq f(y)$, $f(x') \geq f(y')$ folgt $f(x + x') = f(x) + f(x') \geq f(y) + f(y') = f(y + y')$, also $x + x' \geq_R y + y'$, d. h. die additive Abgeschlossenheit von R. Aus der Additivität von f folgt auch noch $f(o) = f(o + o) = f(o) + f(o)$, also $f(o) = 0$. Nach Satz 8.1.1 e), c) ist R eine additiv abgeschlossene Quasiordnung und es ist für $v, w \in V$ die Relation $v \geq_R w$ gleichbedeutend zur Relation $u := v - w \geq_R o$ bzw. zur Ungleichung $f(u) \geq f(o) = 0$. Aus der Totalität der (Total-)Ordnung „$\geq$" („größer gleich") der reellen Zahlen folgt auch noch die Totalität der Relation $\geq_R$, so dass die Relation $\geq_R$ eine additiv abgeschlossene Präferenzordnung auf V ist. Beispielsweise liefert bei $V = \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, die durch $f(x) = a^{\mathsf{T}}x$ definierte lineare Funktion $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine additive Nutzenfunktion auf V und die damit definierte Relation $\geq_R$,

$$v \geq_R w :\iff f(v) \geq f(w),$$

eine additiv abgeschlossene Präferenzordnung auf V. Im Spezialfall einer linearen Nutzenfunktion f folgt aus $x \geq_R y$, $\lambda \geq 0$ auch $f(\lambda x) = \lambda f(x) \geq \lambda f(y) = f(\lambda y)$, also $\lambda x \geq_R \lambda y$ und somit auch noch die Abgeschlossenheit der Präferenzordnung R bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation. □

Zwei Beispiele für eine Halbordnung eines Vektorraums

Beispiel 8.1.1 Ein Beispiel für eine Halbordnung in einem Vektorraum V ist die in $V = \mathbb{R}^n$ mittels der Ordnung ≥ („größer oder gleich") der reellen Zahlen komponentenweise definierte, sogenannte natürliche Halbordnung ≥. Der zugehörige spitze konvexe lineare Kegel K ist der nichtnegative Orthant

$$K = \{x - y : x, y \in V = \mathbb{R}^n, x \geq y\} = K_+ = \{u \in V : u \geq o\} = \mathbb{R}^n_{+0}\,. \qquad \triangle$$

Beispiel 8.1.2 Ein weiteres Beispiel für eine Halbordnung in einem Vektorraum V wird durch den konvexen linearen Kegel K in $V = \mathbb{R}^2$ gegeben, der als die obere Halbebene inklusive den Nullpunkt o gewählt wird:

$$K = \{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}.$$

Die zugehörige Relation $R := diff^{-1}(K)$ wird für die $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ beschrieben durch

$$xRy :\Leftrightarrow x_2 > y_2 \text{ oder } x = y. \qquad \triangle$$

8.1.3 Eigenschaften der Relation zu einer vorgegebenen Differenzenmenge

Im obigen Satz und ersten Zusatz wird von einer Relation R eines Vektorraums V ausgegangen und werden aus den Eigenschaften der Relation R die entsprechenden Eigenschaften der zugehörigen Differenzenmenge $K := diff(R)$ hergeleitet. Man kann nun aber auch umgekehrt von einer vorgegebenen nichtleeren Menge $K \subseteq V$ mit einigen der oben angegebenen Eigenschaften ausgehen, dazu die Relation $R \subseteq V \times V$ als das Urbild von K bei der Abbildung $diff(x,y) = x - y$ der Differenzbildung definieren,

$$R := diff^{-1}(K) = \{(x,y) \in V \times V : x - y \in K\},$$

und für diese Relation R die entsprechenden Eigenschaften herleiten.

Diese Definition der Relation R ist ohne weitere Voraussetzungen schon identisch mit der im obigen Satz 8.1.1, Teil b) angegebenen Charakterisierung der Relation R mittels K:

$$v \geq_R w \;\Leftrightarrow\; v - w \in K.$$

Insbesondere ist $u \in K$ wegen $u = u - o$ gleichbedeutend mit $u \geq_R o$, also mit $u \in K_+$. Daher stellt die Teilmenge K_+ von K schon die gesamte Menge K dar:

$$K_+ = K.$$

Weiter ist dann auch $x \in W_+(y)$ bzw. $x \geq_R y$ äquivalent zu $x - y \in K = K_+$ bzw. $x \in y + K_+$. Daher hat die Bessermenge $W_+(y)$ von $y \in V$ die Darstellung

$$W_+(y) = y + K_+.$$

Aus der Definition von R folgt zunächst nur $diff(R) \subseteq K$, da evtl. ein $u \in K$ existieren könnte, welches kein $diff$-Bild eines Paares $(v,w) \in R$ ist. Wegen $diff(u,o) = u - o = u$ gibt es aber zu jedem $u \in V$ stets ein Urbild bezüglich der Abbildung $diff$, nämlich (u,o). Insbesondere gibt es für jedes $u \in K$ das Urbild

$$(u,o) \in diff^{-1}(\{u\}) \subseteq diff^{-1}(K) = R,$$

so dass u ein *diff*-Bild eines Elements von R ist:

$$u = u - o = diff(u,o) \in diff(R).$$

Also gilt auch $K \subseteq diff(R)$ und insgesamt ohne weitere Voraussetzungen, dass K die Differenzenmenge der Relation R ist:

$$K = diff(R) = \{u = x - y \in V : x \geq_R y\}.$$

Bei der oben dargestellten Betrachtung dagegen, bei der von der Relation R ausgegangen wird und K als Bild $diff(R)$ von R definiert wird, gilt im Allgemeinen nur die Inklusion $R \subseteq diff^{-1}(K)$. Die umgekehrte nichttriviale Inklusion $diff^{-1}(K) \subseteq R$ konnte oben nur unter Verwendung der Eigenschaften (H1) und (H5) von R hergeleitet werden. Die jetzt verwendete Definition $R := diff^{-1}(K)$ ist also die stärkere Voraussetzung und beinhaltet auch $K = diff(R)$. Infolge der stärkeren Voraussetzung $R = diff^{-1}(K)$ werden hier für die Charakterisierung von R und die Mengendarstellungen $K_+ = K$ und $W_+(y) = y + K_+$ keine weiteren Voraussetzungen benötigt, also insbesondere auch nicht die Eigenschaften (K1) und (K5) von K, die hier zu den Eigenschaften (H1) und (H5) von R äquivalent sind.

Aus der Eigenschaft (K1): $o \in K$ folgt für die Relation R die Eigenschaft (H1) der Reflexivität: Für jedes $x \in V \neq \emptyset$ ist nämlich

$$diff(x,x) = x - x = o \in K,$$

also $(x,x) \in diff^{-1}(K) = R$ bzw. $x \geq_R x$. Für die Äquivalenz der Eigenschaften (K1) und (H1) wird also die Inklusion $diff^{-1}(K) \subseteq R$ benötigt. Diese ist hier bei der Definition von $R := diff^{-1}(K)$ gegeben.

Aus der Eigenschaft (K5), der Abgeschlossenheit von K bezüglich der Addition, ergibt sich für R die Eigenschaft (H5), die Abgeschlossenheit von R bezüglich der Addition: Aus $x \geq_R y$ und $x' \geq_R y'$ folgt nämlich wegen der Charakterisierung von R mittels K für die Differenzen $u = x - y \in K$, $u' = x' - y' \in K$ und wegen (K5)

$$(x + x') - (y + y') = x - y + x' - y' = u + u' \in K,$$

also $x + x' \geq_R y + y'$. Insbesondere liegen auch für die speziellen Paare $(x,y), (y,z) \in R$ die Differenzen $u = x - y$ und $u' = y - z$ in K und wegen (K5) dann auch deren Summe

$$x - z = x - y + y - z = u + u' \in K,$$

was wiederum $x \geq_R z$ bedeutet. Somit folgt aus der Eigenschaft (K5) auch die Eigenschaft (H3), die Transitivität der Relation R. Aus den Eigenschaften (K1) und (K5) von K folgt somit, dass R die Eigenschaften (H1), (H3) und (H5) aufweist, also eine additiv abgeschlossene Quasiordnung ist.

Aus der Eigenschaft

(KT) $\quad K \cup (-K) = V$

der Menge K folgt für die Relation R die Eigenschaft der Totalität (Konnexität, Linearität, allgemeinen Vergleichbarkeit):

(T) $\quad x, y \in V \Rightarrow x \geq_R y$ oder $y \geq_R x$.

Für beliebige $x, y \in V$ ist nämlich $u = x - y \in V = K \cup (-K)$, also $x - y = u \in K$ oder $y - x = -u \in K$ bzw. $x \geq_R y$ oder $y \geq_R x$. Umgekehrt folgt aus (T) auch (KT), da wegen (T) insbesondere für jedes $z \in V$ und $o \in V$ eine der Relationen $z \geq_R o$ oder $o \geq_R z$

gültig ist, also $z = z - o \in K$ oder $- z = o - z \in K$ gilt und insgesamt $z \in K \cup (- K)$ ist.

Aus den Eigenschaften (K1), (K5) und (KT) von K folgt daher, dass R auch eine totale Quasiordnung, eine Präferenzordnung, also insgesamt eine additiv abgeschlossene Präferenzordnung ist.

Aus der Eigenschaft (K4), der Abgeschlossenheit von $K \neq \emptyset$ bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation (K ist linearer Kegel und damit insbesondere $o \in K$, also Eigenschaft (K1)), folgt für die Relation R die Eigenschaft (H4), die Abgeschlossenheit von R bezüglich nichtnegativer Skalarmultiplikation: Aus $x \geq_R y$ und $\lambda \geq 0$ folgt nämlich wegen der Charakterisierung von R mittels K für die Differenz $u = x - y \in K$ und dann für $\lambda \geq 0$ wegen (K4)

$$\lambda x - \lambda y = \lambda(x - y) = \lambda u \in K,$$

also $\lambda x \geq_R \lambda y$. Da $K \neq \emptyset$ dann auch die Eigenschaft (K1) aufweist, hat R auch die Eigenschaft (H1).

Aus der Eigenschaft (K2): $L := K \cap (- K) = O = \{o\}$ folgt für R die Eigenschaft (H2), die Antisymmetrie (Identitivität): Aus den Relationen $x \geq_R y$ und $y \geq_R x$ folgt wegen der Charakterisierung von R mittels K nämlich $u := x - y \in K$ und $- u = y - x \in K$, also $u \in L = O$ und somit $u = o$ bzw. $x = y$.

Falls die Menge K die Eigenschaften (K4) und (K5) aufweist, also K abgeschlossen ist bezüglich der konischen Linearkombination (Nichtnegativkombination), ist nach obigem Beweis K ein konvexer linearer Kegel. Weiter ist dann die Eigenschaft (K2*) äquivalent zur Eigenschaft (K2).

Falls K die Eigenschaften (K4), (K5) und (KT) besitzt, also K ein konvexer linearer Kegel ist, der zusammen mit seinem Spiegelbild $- K$ am Nullpunkt den gesamten Vektorraum V ausfüllt, so besitzt K auch die Eigenschaften (K1) und (K2). Die zugehörige Relation R besitzt dann die Eigenschaften (H4) und (H1), (H5) und (H3), (T) und ist somit eine abgeschlossene Präferenzordnung von V.

Falls K die Eigenschaften (K4), (K5) und (K2*) besitzt, also K ein spitzer konvexer linearer Kegel ist, besitzt K auch die Eigenschaften (K1) und (K2). Die zugehörige Relation R besitzt dann die Eigenschaften (H4) und (H1), (H5) und (H3), (H2) und ist somit eine Halbordnung des Vektorraums V.

Nach diesen Überlegungen lässt sich der folgende mathematische Satz formulieren, der noch einmal zusammenfasst, welche Eigenschaften für die als Urbild $R := diff^{-1}(K)$ einer nichtleeren Menge $K \subset V$ definierte Relation R aus den vorgegebenen Eigenschaften von K folgen.

Satz 8.1.4 Zusammenhang zwischen den Eigenschaften einer vorgegebenen Teilmenge K eines Vektorraums und der dazu definierten Relation $R = diff^{-1}(K)$

Zu einer nichtleeren Teilmenge K eines reellen Vektorraums V wird die mittels der Abbildung

$$diff\colon (x,y) \in V \times V \mapsto diff(x,y) = x - y \in V$$

als Urbildmenge von K definierte binäre Relation R in V betrachtet:

$$R := diff^{-1}(K).$$

Die Relation R wird also beschrieben durch die Aussage

$$(x,y) \in R \; (x \geq_R y) \;\; :\Leftrightarrow x - y \in K.$$

Die Menge

$$K_+ = W_+(o) = \{u \in V : u \geq_R o\}$$

der R-nichtnegativen Vektoren von V ist dann gleich K:

$$K_+ = K.$$

Für jedes $y \in V$ besitzt die Bessermenge $W_+(y) = \{x \in V : x \geq_R y\}$ die Darstellung

$$W_+(y) = y + K.$$

Stattet man die Menge K noch mit besonderen Eigenschaften aus, so ergeben sich für die Relation R die folgenden entsprechenden Eigenschaften.

a) Falls $o \in K$ ist, ist R eine reflexive Relation.

b) Falls K den Nullpunkt o enthält und K abgeschlossen ist bei der Addition, ist R eine additiv abgeschlossene Quasiordnung.

c) Falls K den Nullpunkt o enthält, K bei der Addition abgeschlossen ist und K zusammen mit seinem Spiegelbild $-K$ am Nullpunkt den gesamten Vektorraum V ausfüllt,

$$K \cup (-K) = V,$$

so ist R eine additiv abgeschlossene Präferenzordnung.

d) Falls K abgeschlossen bei Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation ist, also ein konvexer linearer Kegel ist, ist R eine Quasiordnung, die abgeschlossen ist bei Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation.

e) Falls K ein spitzer konvexer linearer Kegel ist, also K abgeschlossen ist bei Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation und K keine Geraden durch den Nullpunkt enthält, ist R eine Halbordnung des Vektorraums V.

8.2 Konvexe Geometrie

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Sätze aus der konvexen Analysis im $\mathbb{R}^n$ bereitgestellt. Die konvexe Analysis ist ein Grenzgebiet von Geometrie, Analysis und Funktionalanalysis und untersucht die Eigenschaften konvexer Mengen und konvexer Funktionen (Lexikon der Mathematik, Bd. 3 (2001), S. 190–194). Grundlagen der konvexen Analysis findet man meist in den Büchern der Optimierung wie beispielsweise bei Borgwardt (2001), Jarre und Stoer (2004) und Jungnickel (2008).

Im nachfolgenden ersten Satz wird die Existenz einer eindeutigen Projektion eines Punktes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ auf eine abgeschlossene konvexe Menge C beschrieben. Aus diesem ergibt sich als zweiter Satz der Trennungssatz von Eidelheit (benannt nach dem polnischen Mathematiker Meier Eidelheit, 1910–1943), der Voraussetzungen angibt, unter denen die strikte Trennung zweier konvexer Mengen mittels einer affinen Hyperebene möglich ist. Als Folgerungen aus diesem Trennungssatz werden in einem dritten Satz ein Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel angegeben und in zwei Zusätzen noch Alternativsätze über die Lösbarkeit endlicher linearer Ungleichungssysteme.

Mit dem dritten Satz wird in Abschnitt 4.1.3 für den arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkt die Existenz eines strikt positiven Preisvektors **P** nachgewiesen. Dieser positive Preisvektor ist ein Normalenvektor des Unterraums der Kapitalmarktgeschäfte. Der Preisvektor **P** ermöglicht im Abschnitt 4.3 auf dem vollkommenen Kapitalmarkt in einfacher Weise die eindeutige Duplizierung bzw. Replizierung und die Bewertung beliebiger Zahlungsströme, ohne das Supplement bestimmen zu müssen. Außerdem liefert er die Diskontierungsfaktoren für die B-Präferenzordnung $\trianglerighteq$, welche die Zahlungsströme mittels ihrer Barwerte vergleicht und welche die einzige Präferenzordnung darstellt, die mit den Konzepten der Duplizierung und Replizierung auf dem vollkommenen Kapitalmarkt konstruiert werden kann.

Dagegen gestalten sich die Duplizierung und die Replizierung auf dem im Kapitel 5 betrachteten unvollkommenen Kapitalmarkt wesentlich aufwendiger. Die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung für jeden beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und damit die Existenz einer Präferenzordnung kann nur mittels speziell ausgewählter Supplementsysteme L gesichert werden. Entsprechende spezielle Supplementsysteme findet man beispielsweise in Abschnitt 8.4. Außerdem kann aus der Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts die Existenz eines positiven Normalenvektors **P** nur für den Linienraum $V = K \cap (-K)$ der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte und nicht für den gesamten Kegel K der Kapitalmarktgeschäfte geschlossen werden. Doch auch dieser Normalenvektor **P** findet seine Anwendung im Beweis für die Übereinstimmung der Präferenzordnungen gewisser Beurteilungskurven, nämlich der L-äquivalenten Beurteilungskurven (siehe Abschnitt 8.3.5 und Satz 5.5 in Abschnitt 5.3.3).

8.2.1 Projektion auf eine konvexe Menge

Im nachfolgenden Satz wird die Existenz und Einzigkeit der Projektion eines Punktes auf eine Menge C für die Fälle formuliert, dass C eine abgeschlossene konvexe Menge, ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel oder ein linearer Unterraum ist. In Abbildung 8.1 werden diese Fälle geometrisch dargestellt.

Satz 8.2.1 Projektion eines Punktes auf eine abgeschlossene konvexe Menge

a) Es sei C eine nichtleere abgeschlossene und konvexe Teilmenge des affinen Raumes $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt dieses Raumes mit $\mathbf{y} \notin C$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $\mathbf{z} \in C$, der vom Punkt $\mathbf{y}$ minimalen Abstand hat:
$$\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\| = \min \{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in C\}.$$
Dieser als die Lösung des angegebenen Minimierungsproblems definierte Punkt $\mathbf{z} =: P_C(\mathbf{y}) = P(\mathbf{y})$ ist auch dadurch charakterisiert, dass es für den Vektor $\mathbf{y}$ eine eindeutige additive Zerlegung

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$$

gibt mit $\mathbf{z} \in C$ und $\mathbf{a}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in C$.

b) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (nichtleerer) abgeschlossener und konvexer linearer Kegel und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\mathbf{y} \notin K$. Dann ist der gemäß Teil a) eindeutig bestimmte Punkt $\mathbf{z} = P(\mathbf{y})$ dadurch charakterisiert, dass der Vektor $\mathbf{y}$ eine eindeutige orthogonale additive Zerlegung

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$$

besitzt mit

$$\mathbf{z} \in K,$$
$$\mathbf{a} \in K^{\mathrm{P}} = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in K\} \text{ und}$$
$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} = 0.$$

c) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum (Untervektorraum) und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\mathbf{y} \notin U$. Dann wird der gemäß Teil a) eindeutig bestimmte Punkt $\mathbf{z} = P(\mathbf{y})$ charakterisiert durch die Existenz einer eindeutigen orthogonalen additiven Zerlegung

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$$

mit

$$\mathbf{z} \in U \text{ und}$$
$$\mathbf{a} \in U^{\perp} = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in U\}.$$

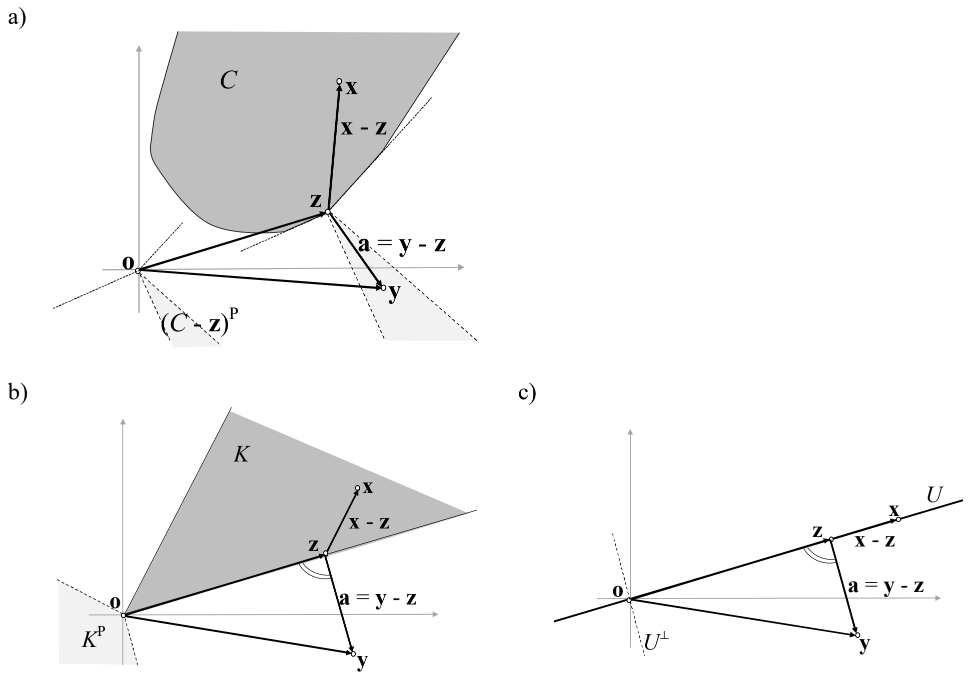


Abb. 8.1 Die Projektion eines Punktes $\mathbf{y}$ auf eine abgeschlossene konvexe Menge C und die orthogonale Projektion von $\mathbf{y}$ auf einen abgeschlossenen konvexen linearen Kegel K bzw. auf einen Unterraum U

Literatur zur Projektion: Jungnickel (2008), S. 34, 52, für die Projektion eines Punktes auf eine abgeschlossene konvexe Menge und für die orthogonale Projektion auf einen abgeschlossenen konvexen Kegel; Jarre und Stoer (2004), S. 241, für die Projektion auf eine abgeschlossene konvexe Menge; Stoer und Witzgall (1970), S. 51ff, für die orthogonale Projektion auf einen abgeschlossenen konvexen Kegel; Wagner (1981), S. 190, 217, Kowalsky (1967), S. 133f, und Kremer (2006), S. 410f, je für die orthogonale Projektion auf einen linearen Unterraum; Bröcker (2004), S. 8, Kremer (2006), S. 405, speziell für die orthogonale Projektion auf einen eindimensionalen Unterraum $U = \text{lin}\,\{\mathbf{x}\}$.

Anmerkungen zur Projektion

1) Der in Teil a) des obigen Satzes als die Lösung des Minimierungsproblems angegebene Punkt $\mathbf{z}$ heißt die **Projektion**
$$P(\mathbf{y}) = P_C(\mathbf{y})$$
des Punktes $\mathbf{y}$ auf die Menge C bezüglich der euklidischen Norm $\|.\|$ ($\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}$ mit dem Standardskalarprodukt bzw. kanonischen Skalarprodukt $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ des $\mathbb{R}^n$). Dass im Allgemeinen hier noch keine *orthogonale* Projektion vorliegt, zeigt das einfache Beispiel mit
$$C = \{\mathbf{z}\},\ \mathbf{z} = (1,1)^\mathsf{T},\ \mathbf{y} = (2,1)^\mathsf{T},$$
bei dem die Projektion $\mathbf{z} = P(\mathbf{y})$ von $\mathbf{y}$ nicht orthogonal zum Verbindungsvektor $\mathbf{a} = \mathbf{y} - \mathbf{z} = (1,0)^\mathsf{T}$ von $\mathbf{z}$ zu $\mathbf{y}$ ist ($\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (1,0)\cdot(1,1)^\mathsf{T} = 1 \neq 0$). Erst wenn wie in Teil b) die Menge $C = K$ noch zusätzlich als linearer Kegel vorausgesetzt wird, erhält man eine orthogonale Projektion.
Setzt man noch $P(\mathbf{y}) := \mathbf{y}$ für die Punkte $\mathbf{y} \in C$, so erhält man eine Abbildung $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow C$, die Projektion auf C.
Der angegebene Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ liegt in dem zur Menge
$$M = C - \mathbf{z} = \{\mathbf{x} - \mathbf{z} : \mathbf{x} \in C\}$$
gehörigen Polarkegel (polaren Kegel) $(C - \mathbf{z})^\mathrm{P}$ bzw. in dem Normalkegel (Kegel der normalen Richtungen)
$$N(C;\mathbf{z}) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in C\} = (C - \mathbf{z})^\mathrm{P}$$
von C in $\mathbf{z}$. Der Vektor $\mathbf{a}$ und die Vektoren $\mathbf{m} \in M$ besitzen zueinander „polare" (gegensätzliche) Richtungen in dem Sinne, dass der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{m}$ eingeschlossene Winkel stumpf ist ($\cos\varphi = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{m}/(\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{m}\|) \leq 0$ für $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{m})$).
Die Menge C liegt in dem abgeschlossenen Halbraum
$$H^{\leq} = H^{\leq}_{\mathbf{a},\zeta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \zeta\}$$
mit $\zeta := \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z}$ und der Punkt $\mathbf{y}$ im offenen Halbraum
$$H^{>} = H^{>}_{\mathbf{a},\zeta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} > \zeta\}.$$

2) Der in Teil b) des Satzes angegebene Punkt $\mathbf{z} \in K$ heißt die **orthogonale Projektion** $P(\mathbf{y}) = P_K(\mathbf{y})$ des Punktes $\mathbf{y}$ auf den Kegel K. Der Punkt $\mathbf{a}$ liegt in der Menge K^P, dem Polarkegel von K. Da jeder Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige orthogonale additive Zerlegung $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{z} \in K$, $\mathbf{a} \in K^\mathrm{P}$ und $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} = 0$ besitzt, wird $\mathbb{R}^n$ als

die orthogonale Summe[1] (orthogonale additive Zerlegung) der Mengen K und K^{P} bezeichnet:

$$\mathbb{R}^n = K \boxplus K^{\mathrm{P}}.$$

Es gilt $\mathbb{R}^n = K + K^{\mathrm{P}}$ und $K \cap K^{\mathrm{P}} = O = \{\mathbf{o}\}$, $\mathbf{o} = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^n$.

3) Der in Teil c) des Satzes angegebene Punkt $\mathbf{z}$ heißt die orthogonale Projektion (der Lotfußpunkt) $P(\mathbf{y}) = P_U(\mathbf{y})$ des Punktes $\mathbf{y}$ auf den linearen Unterraum U. Die Menge $U^{\perp}$ ist ein spezielles lineares Komplement des Unterraums U in $\mathbb{R}^n$, nämlich das orthogonale Komplement von U und es ist $\mathbb{R}^n$ die spezielle direkte Summe[2] von U und seinem orthogonalen Komplement $U^{\perp}$:

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^{\perp},$$

d. h. $\mathbb{R}^n = U + U^{\perp}$, $U \cap U^{\perp} = O = \{\mathbf{o}\}$ und $U \perp U^{\perp}$. Mit einer Orthonormalbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ von U ($\mathbf{e}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$ für $i, j = 1,\ldots,m$) erhält man nach Kowalsky (1967), S. 134, Kremer (2006), S. 410, die orthogonale Projektion mittels der Koordinatendarstellung

$$P_U(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \ .$$

Speziell für einen eindimensionalen Unterraum $U = \operatorname{lin}\{\mathbf{x}\}$ ist die orthogonale Projektion von $\mathbf{y}$ auf U gegeben durch

$$P_U(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{x})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2.$$

Beweis von Teil a) des Satzes: Wegen $C \neq \emptyset$ gibt es ein $\mathbf{w} \in C$. Für $\varepsilon := \|\mathbf{w} - \mathbf{y}\|$ (> 0) und mit der abgeschlossenen ε-Umgebung

$$\bar{U} = \overline{U_\varepsilon(\mathbf{y})} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon\}$$

von $\mathbf{y}$ ist der Durchschnitt $M := C \cap \bar{U} \neq \emptyset$ von C und $\bar{U}$ als Teilmenge von $\bar{U}$ beschränkt und als Durchschnitt abgeschlossener Mengen auch abgeschlossen, somit insgesamt kompakt. Für die stetige Funktion

$$f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\mathsf{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

ist $f(\mathbf{x}) > \varepsilon^2$ für $\mathbf{x} \in C \setminus M$, $f(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^2$ für $\mathbf{x} \in M$ und nach dem Satz von Weierstraß (1815–1897; zum Extremwertsatz bzw. Satz vom Maximum siehe die Analysis-Bücher von Köhler (2006), S. 122, Hildebrandt (2006), Bd. 1, S. 155; Grauert und Fischer (1968), Bd. 2, S. 38; Erwe (1967), Bd. 1, S. 267)

$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in C\} = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\} = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\} = f(\mathbf{z}) =: \omega$$

mit einem $\mathbf{z} \in M \subseteq C$. Damit ist die Existenz eines Punktes $\mathbf{z} \in C$ gezeigt, der Lösung des angegebenen Minimierungsproblems ist.

Um die Einzigkeit (Unität) der Stelle $\mathbf{z}$ eines Minimums von $f(\mathbf{x})$ auf C zu zeigen, nimmt man an, dass es eine weitere Stelle $\mathbf{v} \in C$ mit $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{z}) = \omega$ gibt und beweist, dass $\mathbf{v} = \mathbf{z}$ ist. Man wählt dazu

---

[1] Nach Stoer, Witzgall (1970), S. 51, heißt der euklidische Vektorraum V orthogonale Summe seiner Teilmengen K und M, wenn jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutige orthogonale additive Zerlegung $x = k + m$ mit $k \in K$, $m \in M$ und $k^{\mathsf{T}}m = 0$ besitzt. Es gilt dann $K \cap M = O$.

[2] Die Definition der direkten Summe $V = U + W$ von linearen Unterräumen U und W ($U \cap W = O$) und ihre Charakterisierung mit der eindeutigen additiven Zerlegung der Elemente der Unterraumsumme findet man bei Wagner (1981), S. 27, Kowalsky (1967), S. 217, Kowalsky u. Michler (2003), S. 37, Bröcker (2004), S. 35. Die Darstellung eines Vektorraums V als spezielle direkte Summe $V = U \oplus U^{\perp}$ eines beliebigen endlichdimensionalen Unterraums U ($\dim U < \infty$) und seines orthogonalen Komplements $U^{\perp}$ wird bei Wagner (1981), S. 181, Satz 5.2.15, behandelt.

den Punkt

$$\mathbf{u} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{v}),$$

der als Konvexkombination von **z** und **v** wegen **z**, **v** $\in C$ und der Konvexität von C ebenfalls in C liegt und der demnach einen Funktionswert $f(\mathbf{u}) \geq \omega$ besitzt. Weiter verwendet man, dass die Vektoren **u** - **y** und **v** - **u** orthogonal sind: Es ist nämlich

$$2(\mathbf{u} - \mathbf{y}) = \mathbf{z} + \mathbf{v} - 2\mathbf{y} = (\mathbf{v} - \mathbf{y}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y}),$$
$$2(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 2\mathbf{v} - \mathbf{z} - \mathbf{v} = (\mathbf{v} - \mathbf{y}) - (\mathbf{z} - \mathbf{y})$$

und somit

$$4(\mathbf{u} - \mathbf{y})^{\mathsf{T}}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = (\mathbf{v} - \mathbf{y})^2 - (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2 = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{z}) = 0.$$

Nach dem Satz von Pythagoras (von Samos ~ 570 v. Chr. – 510 v. Chr.) gilt dann die folgende Gleichung:

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}-\mathbf{y}\|^2 .$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\omega \leq f(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{v}-\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 \leq \|\mathbf{v}-\mathbf{y}\|^2 = f(\mathbf{v}) = \omega.$$

Daher folgt $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{o}$, somit $2\mathbf{v} = 2\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{v}$ und schließlich $\mathbf{v} = \mathbf{z}$. Demnach gibt es nur eine einzige Stelle $\mathbf{z} \in C$ eines Minimums von $f(\mathbf{x})$ auf C. Die Geometrie zu dieser Schlussweise mit dem Satz von Pythagoras ist in der Abbildung 8.2 dargestellt.

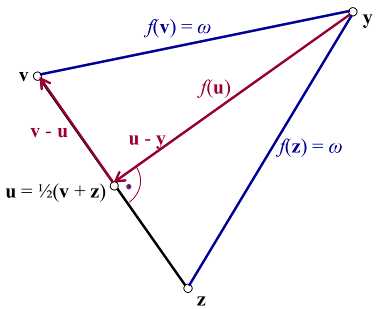


Abb. 8.2 Das gleichschenklige Dreieck mit den Ecken **v**, **z**, **y** und den (gleich langen) Schenkeln **z** - **y** und **v** - **y**. Im Fall $\mathbf{v} \neq \mathbf{z}$ bzw. $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{z}) \neq 0$ gilt mit der Funktion $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ die Ungleichung $f(\mathbf{u}) < f(\mathbf{v})$.

Als Nächstes wird die angegebene Charakterisierung der Stelle **z** bewiesen. Falls $f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{x})$ für alle Punkte $\mathbf{x} \in C$ ist, so gilt dies bei fest gewähltem $\mathbf{x} \in C$ insbesondere auch für die Punkte

$$\mathbf{x}_\lambda := \mathbf{z} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z}),\ \lambda \in [0,1],$$

auf der Verbindungsstrecke $[\mathbf{z},\mathbf{x}] \subseteq C$ von **z** und **x**, da $\mathbf{z}, \mathbf{v} \in C$ gilt und C konvex ist. Es ist also für alle $\lambda \in [0,1]$

$$f(\mathbf{z}) \leq f(\mathbf{x}_\lambda) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z})\|^2 = f(\mathbf{z}) + 2\lambda(\mathbf{z} - \mathbf{y})^{\mathsf{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \lambda^2\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2$$

und

$$\varphi(\lambda) := f(\mathbf{x}_\lambda) \geq f(\mathbf{z}) = \varphi(0).$$

Daraus folgt

$$2(\mathbf{z} - \mathbf{y})^{\mathsf{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \varphi'(0) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} \geq 0$$

und mit dem Verbindungsvektor $\mathbf{a} := \mathbf{y} - \mathbf{z}\ (\neq \mathbf{o})$ vom Punkt **z** zum Punkt **y** die angegebene Ungleichung

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in C.$$

Diese Ungleichung ist gleichbedeutend zu

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} =: \zeta \qquad \text{mit } \zeta = \max_{\mathbf{x} \in C} \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} .$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die Menge C im abgeschlossenen Halbraum $H^{\le}_{\mathbf{a},\zeta}$ liegt:

$$C \subseteq H^{\le}_{\mathbf{a},\zeta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \le \zeta\}.$$

Die Hyperebene $H_{\mathbf{a},\zeta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \zeta = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z}\}$ heißt eine Stützhyperebene für C in $\mathbf{z}$.

Für den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ gilt

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} + \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a} = \zeta + \|\mathbf{a}\|^2 > \zeta,$$

was geometrisch bedeutet, dass der Punkt $\mathbf{y}$ im offenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},\zeta}$ liegt:

$$\mathbf{y} \in H^{>}_{\mathbf{a},\zeta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} > \zeta\}.$$

Für den minimalen Funktionswert der Funktion $f(\mathbf{x})$ auf der Menge C gilt $\omega = f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2$.

Für die umgekehrte Beweisrichtung der Charakterisierung der Projektion sei ein $\mathbf{z} \in C$ vorgegeben, für welches mit $\mathbf{a} := \mathbf{y} - \mathbf{z}$ für alle $\mathbf{x} \in C$ die Ungleichung $\mathbf{a}^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \le 0$ erfüllt ist. Außerdem sei $\mathbf{x} \in C$ beliebig vorgegeben. Für alle $\lambda \in [0,1]$ ist dann

$$f(\mathbf{x}_\lambda) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{z})\|^2 = f(\mathbf{z}) - 2\lambda\mathbf{a}^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \lambda^2\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 \ge f(\mathbf{z})$$

und insbesondere für $\lambda = 1$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1) \ge f(\mathbf{z}).$$

Da $\mathbf{x} \in C$ beliebig war, ist $\mathbf{z} \in C$ eine Stelle (ein Argument), an der die Funktion $f(\mathbf{x})$ ihr Minimum annimmt:

$$\mathbf{z} \in \{\mathbf{x} \in C : f(\mathbf{x}) \text{ minimal}\} =: \arg\min_{\mathbf{x}\in C} f(\mathbf{x}).$$

Auf Grund der Einzigkeit der Lösung des Minimierungsproblems ist dann $\mathbf{z} = P_C(\mathbf{y})$.

Beweis von Teil b): Als zusätzliche Voraussetzung kommt jetzt für die Menge $C = K$ hinzu, dass K auch ein linearer Kegel ist, dass also mit $\mathbf{x} \in K$ auch $\lambda\mathbf{x} \in K$ gilt für alle reellen $\lambda \ge 0$. Nach Teil a) des Satzes gilt mit der eindeutig bestimmten Projektion $\mathbf{z} = P_K(\mathbf{y}) \in K$ von $\mathbf{y}$ auf K und mit dem Verbindungsvektor $\mathbf{a} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ von $\mathbf{z}$ zu $\mathbf{y}$ für alle $\mathbf{x} \in K$ die Ungleichung $\mathbf{a}^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \le 0$. Für alle $\lambda \ge 0$ ist nun $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{z} \in K$ und somit

$$(\lambda - 1)\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{a}^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \le 0.$$

Da hierbei der Faktor $\lambda - 1 \in [-1,\infty[$ sowohl negative als auch positive Werte annehmen kann, kann der zweite Faktor $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z}$ weder negativ noch positiv sein und muss daher gleich Null sein. Für $\mathbf{y}$ gibt es daher die orthogonale additive Zerlegung $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$, $\mathbf{z} \perp \mathbf{a}$. Aus der Orthogonalität von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{z}$ und der obigen Ungleichung folgt dann für alle $\mathbf{x} \in K$

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{a}^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \le 0,$$

also $\mathbf{a} \in K^\mathrm{P}$: Die Richtung $\mathbf{a}$ liegt in dem zu K polaren Kegel K^P. Insgesamt hat man also für $\mathbf{y}$ die additive Zerlegung $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{z} \in K$, $\mathbf{a} \in K^\mathrm{P}$ und $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} = 0$. Der Summand $\mathbf{z}$ ist die orthogonale Projektion von $\mathbf{y}$ auf K.

Für die umgekehrte Beweisrichtung der Charakterisierung der orthogonalen Projektion geht man von einer orthogonalen additiven Zerlegung $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{z} \in K$, $\mathbf{a} \in K^\mathrm{P}$ und $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} = 0$ aus und zeigt, dass $\mathbf{z} = P(\mathbf{y})$ ist. Für beliebiges $\mathbf{x} \in K$ gilt dann $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \le 0$ und demnach

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{a}\|^2 = [(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{a}]^\mathsf{T}[(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \mathbf{a}] \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 - 2\mathbf{a}^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + \|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 - 2\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} + 2\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} + f(\mathbf{z}) \\ &\ge f(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

so dass $\mathbf{z}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Minimierungsproblems ist: $\mathbf{z} = P_K(\mathbf{y})$.

Beweis von Teil c): Für die Menge $C = U$ ist jetzt zusätzlich vorausgesetzt, dass U ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist ($\emptyset \ne U \subseteq \mathbb{R}^n$, $U + U \subseteq U$, $\lambda U \subseteq U$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$). Die Teilmenge U ist als linearer Unterraum auch ein (nichtleerer) konvexer linearer Kegel ($U + U \subseteq U$, $\lambda U \subseteq U$ für alle $\lambda \ge 0$) und abgeschlossen: Die Abgeschlossenheit von U erhält man, da es zu einer Basis des Unterraums U den Koordinaten-Isomorphismus $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ($m = \dim U$) gibt (siehe beispielsweise Wagner (1981),

S. 62, und Bröcker (2004), S. 39) und diese Abbildung φ und ihre Umkehrabbildung φ^{-1} als bijektive lineare Abbildungen auch stetig sind (φ ist ein Homöomorphismus, eine topologische Abbildung). Da die Abbildung $\varphi = (\varphi^{-1})^{-1}$ stetig ist, ist φ^{-1} eine abgeschlossene Abbildung, die abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Bilder überführt (Franz (1968), Bd. I, S. 34–36). Da der Raum $\mathbb{R}^m$ abgeschlossen ist, ist also $U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m)$ ebenfalls abgeschlossen.
Der zu U polare Kegel U^{P} ist dann gleich dem orthogonalen Komplement $U^{\perp}$ von U: Ist nämlich $\mathbf{d} \in U^{\mathrm{P}}$ und $\mathbf{x} \in U$ beliebig, so ist auch $-\mathbf{x} \in U$, damit $\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \le 0$ und $-\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \le 0$, also $\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = 0$ und $\mathbf{d} \in U^{\perp}$. Umgekehrt folgt aus $\mathbf{d} \in U^{\perp}$ auch $\mathbf{d} \in U^{\mathrm{P}}$. Der Polarkegel M^{P} einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ verallgemeinert also den Begriff des orthogonalen Komplements $U^{\perp}$ eines linearen Unterraums $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
Es ergibt sich dann die Aussage von Teil c) unmittelbar aus Teil b). Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

8.2.2 Trennung konvexer Mengen

Mit Hilfe des vorherigen Satzes über die Existenz einer eindeutigen Projektion eines Punktes auf eine abgeschlossene konvexe Menge wird nun der folgende Trennungssatz von Eidelheit bewiesen. In der Abbildung 8.3 erfolgt die geometrische Darstellung der Trennung eines Punktes $\mathbf{y}$ von einer abgeschlossenen konvexen Menge C und der Trennung einer kompakten konvexen Menge S von einer Menge T für die Fälle, dass T eine abgeschlossene konvexe Menge, ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel oder ein linearer Unterraum ist.

Satz 8.2.2 Strikte Trennung von abgeschlossenen konvexen Mengen

a) Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\mathbf{y} \notin C$. Dann kann der Punkt $\mathbf{y}$ von der Menge C durch eine Hyperebene strikt getrennt werden. Dies heißt, dass es eine affine Hyperebene

$$H = H_{\mathbf{a},\alpha} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \alpha\},$$

mit einem Normalenvektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ der Hyperebene und einem $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt und dass $\mathbf{y}$ in dem einen und C in dem anderen der zugehörigen offenen Halbräume liegt:

$$\mathbf{y} \in H^{>} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} > \alpha\},$$

$$C \subseteq H^{<} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} < \alpha\}.$$

b) Es seien $T, S \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleere abgeschlossene konvexe Mengen und zusätzlich S beschränkt. Falls die Mengen S und T disjunkt (elementfremd, durchschnittsfremd) sind, können sie strikt getrennt werden. Es gibt also eine affine Hyperebene $H = H_{\mathbf{a},\alpha}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) mit $S \subseteq H^{<}$ und $T \subseteq H^{>}$, d. h.

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

c) Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel und $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte konvexe Menge. Falls die Mengen T und S disjunkt sind, können sie durch eine affine Hyperebene $H = H_{\mathbf{a},\alpha}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\alpha > 0$) strikt getrennt werden:

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Darüber hinaus gilt noch

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \le 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in T,$$

so dass der Kegel T in dem abgeschlossenen homogenen Halbraum $H^{\leq}_{\mathbf{a},0}$ und $\mathbf{a}$ in dem zu T polaren Kegel T^{P} liegt:

$$T \subseteq H^{\leq}_{\mathbf{a},0} \quad = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq 0\},$$

$$\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}} \quad = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in T\}.$$

d) Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum und $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte konvexe Menge. Falls die Mengen T und S disjunkt sind, können sie durch eine affine Hyperebene $H = H_{\mathbf{a},\alpha}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\alpha > 0$) strikt getrennt werden:

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Darüber hinaus gilt noch

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in T,$$

so dass der Unterraum T in der linearen (homogenen) Hyperebene $H_{\mathbf{a},0} = [\mathbf{a}]^{\perp}$, einem ($n$-1)-dimensionalen linearen Unterraum, und $\mathbf{a}$ in dem orthogonalen Komplement $T^{\perp}$ von T liegt.

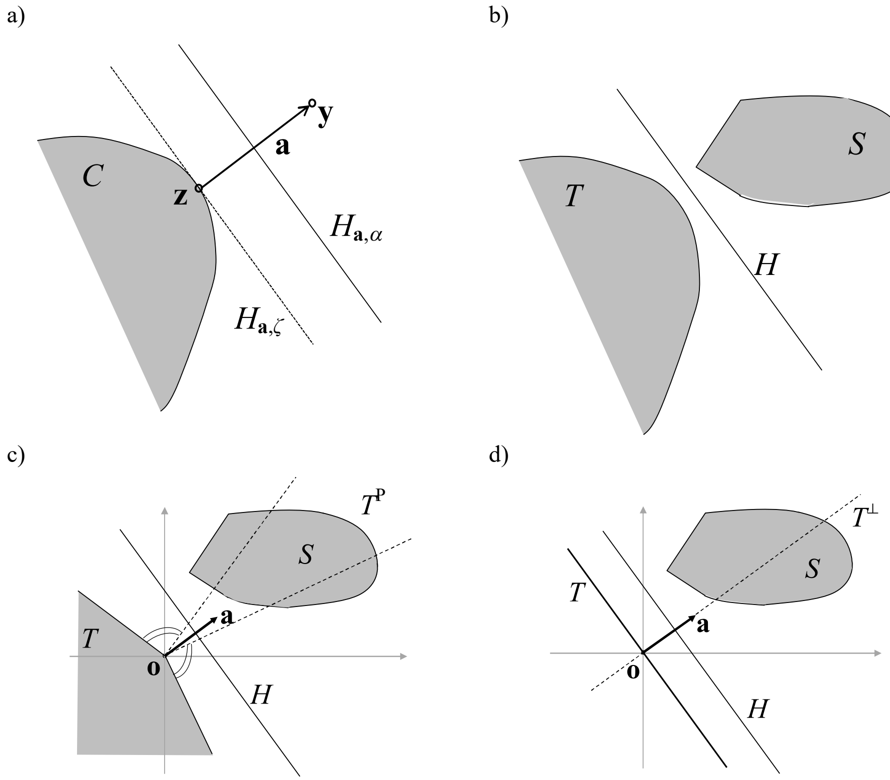


Abb. 8.3 Die strikte Trennung eines Punktes $\mathbf{y}$ von einer abgeschlossenen konvexen Menge C und die strikte Trennung einer kompakten konvexen Menge S von einer abgeschlossenen konvexen Menge T, von einem abgeschlossenen konvexen linearen Kegel T bzw. von einem Unterraum T

Literatur zu den Trennungssätzen: Für die Trennung eines Punktes bzw. des Nullpunktes oder einer kompakten konvexen Menge von einer abgeschlossenen konvexen Menge siehe Jungnickel (2008), S. 35, 37, Jarre und Stoer (2004), S. 209, 211, 220; für die Trennung des Nullpunktes von einer abgeschlossenen konvexen Menge und für die Trennung einer kompakten konvexen Menge von einem Unterraum siehe Kremer (2006), S. 32–34.

Beweis von Teil a) des Satzes: Nach Satz 8.2.1 a) gilt mit der Projektion $\mathbf{z} := P_C(\mathbf{y}) \in C$ von $\mathbf{y}$ auf C und dem Verbindungsvektor $\mathbf{a} := \mathbf{y} - \mathbf{z}\ (\neq \mathbf{o})$ von $\mathbf{z}$ zu $\mathbf{y}$ die Ungleichung

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \le \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} =: \zeta \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in C.$$

Für $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{a}$ gilt

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z} + \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a} = \zeta + \|\mathbf{a}\|^2 > \zeta$$

und daher für alle $\mathbf{x} \in C$

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \le \zeta < \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \zeta + \|\mathbf{a}\|^2 .$$

Für $\alpha := \zeta + \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2$ erhält man die Ungleichung $\zeta = \alpha - \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 < \alpha < \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ und damit die strikte Trennung von $\mathbf{y}$ und C:

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{y} \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in C.$$

Beweis von Teil b): Um Teil a) des Satzes anzuwenden, betrachtet man die Menge

$$C := T - S = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x} \in T, \mathbf{y} \in S\}.$$

Es ist C eine nichtleere Menge, da T und S nichtleer sind. Weiter ist $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{o} \notin C$, da sonst $\mathbf{o} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \in C$ mit Elementen $\mathbf{x} \in T$ und $\mathbf{y} \in S$, also $\mathbf{x} = \mathbf{y} \in T \cap S$, im Widerspruch zur Disjunktheit von S und T.
Die Menge C ist konvex, da mit den Elementen $\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in C$ und $\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2 \in C$ ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in T$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in S$) wegen der Konvexität von T und S auch alle Konvexkombinationen in C liegen:

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{z}_1 + (1-\lambda)\mathbf{z}_2 &= \lambda\mathbf{x}_1 - \lambda\mathbf{y}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 - (1-\lambda)\mathbf{y}_2 \\ &= [\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2] - [\lambda\mathbf{y}_1 + (1-\lambda)\mathbf{y}_2] \in T - S = C, \qquad \lambda \in [0,1].\end{aligned}$$

Schließlich wird noch gezeigt, dass die Menge C auch abgeschlossen ist, d. h. dass sie alle ihre Berührungspunkte enthält bzw. dass sie mit jeder konvergenten Folge $(\mathbf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{z}_k \in C$, auch deren Grenzwert $\mathbf{z}_0$ enthält:

$$\mathbf{z}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{z}_k \in C.$$

Es sei also $(\mathbf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $\mathbf{z}_k$ in C mit Grenzwert $\mathbf{z}_0$. Es ist $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k$ mit $\mathbf{x}_k \in T$, $\mathbf{y}_k \in S$, $k \in \mathbb{N}$. Da die Menge S eine abgeschlossene und beschränkte Menge im Raum $\mathbb{R}^n$ ist, ist sie nach einem Satz der Analysis kompakt und zwar sowohl überdeckungskompakt (nach Heine-Borel; siehe z. B. Hildebrandt (2003), Bd. 2, S. 94) als auch folgenkompakt (siehe z. B. Hildebrandt (2006), Bd. 1, S. 95). Zu der in der kompakten Menge S liegenden Folge $\mathbf{y}_k$ gibt es also eine Teilfolge $\mathbf{y}_{k_j}$, die gegen ein Element $\mathbf{y}_0 \in S$ konvergiert:

$$\mathbf{y}_0 = \lim_{j\to\infty} \mathbf{y}_{k_j} \in S.$$

Als Differenz zweier konvergenter Folgen konvergiert auch die in der Menge T liegende Folge $\mathbf{x}_{k_j} = \mathbf{z}_{k_j} - \mathbf{y}_{k_j}$:

$$\mathbf{x}_0 := \lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_{k_j} .$$

Da die Menge T abgeschlossen ist, gilt $\mathbf{x}_0 \in T$ und damit auch

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_0 &= \lim_{k\to\infty} \mathbf{z}_k = \lim_{j\to\infty} \mathbf{z}_{k_j} = \lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_{k_j} - \lim_{j\to\infty} \mathbf{y}_{k_j} \\ &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in T - S = C.\end{aligned}$$

Damit ist die Abgeschlossenheit der Menge C nachgewiesen.
Nach Teil a) des Satzes kann der Punkt $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{o}$ strikt von der Menge C getrennt werden. Es gibt also ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} < \alpha < \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{o} = 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \in C$$

bzw.

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} < \alpha + \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in T, \mathbf{y} \in S.$$

Da T und S nichtleere Mengen sind, folgt aus dieser Ungleichung

$$\beta := \sup_{\mathbf{x} \in T} \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \gamma := \inf_{\mathbf{y} \in S} \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \in \mathbb{R}$$

und wegen $\alpha < 0$ für β und γ die strenge Ungleichung

$$\beta \leq \alpha + \gamma < \gamma.$$

Wählt man nun ein δ mit $\beta < \delta < \gamma$, so erhält man die Ungleichung

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq \beta < \delta < \gamma \leq \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in T, \mathbf{y} \in S,$$

so dass die Hyperebene $H_{\mathbf{a},\delta}$ die Mengen S und T strikt trennt.

Beweis von Teil c): Nach Teil b) von Satz 8.2.2 erhält man die strikte Trennung von S und T:

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Aus $\mathbf{o} \in T$ folgt $\alpha > \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{o} = 0$, also $\alpha > 0$. Da T ein linearer Kegel ist, ist für beliebige $\mathbf{x} \in T$ und $\lambda \geq 0$ auch $\lambda\mathbf{x} \in T$ und

$$\lambda \cdot \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} < \alpha.$$

Da hierbei auf der linken Seite der Ungleichung der erste Faktor λ beliebig große positive Werte annehmen kann, ist der zweite Faktor $\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ nichtpositiv. Für alle $\mathbf{x} \in T$ gilt also $\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq 0$, so dass T in dem abgeschlossenen linearen (homogenen) Halbraum $H^{\leq}_{\mathbf{a},0}$ liegt und $\mathbf{a}$ in dem zu T polaren Kegel T^{P}.

Beweis von Teil d): Im Beweis von Satz 8.2.1, Teil c) wurde bereits begründet, dass ein linearer Unterraum T auch ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel ist und der zu T polare Kegel T^{P} gleich dem orthogonalen Komplement $T^{\perp}$ von T ist. Nach Satz 8.2.2, Teil c) erhält man dann die strikte Trennung von S und T durch eine affine Hyperebene $H = H_{\mathbf{a},\alpha}$ mit einem $\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}} = T^{\perp}$. Aus $\mathbf{o} \in T$ folgt $\alpha > \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{o} = 0$, also $\alpha > 0$. Wegen $\mathbf{a} \in T^{\perp}$ gilt hier für alle $\mathbf{x} \in T$ die Gleichung $\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = 0$, so dass T jetzt in der linearen Hyperebene $L = H_{\mathbf{a},0} = [\mathbf{a}]^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = 0\}$ liegt. Der Unterraum T ist also parallel zur trennenden Hyperebene $H = H_{\mathbf{a},\alpha}$. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

8.2.3 Alternativsätze

8.2.3.1 Alternativsätze über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

Als Folgerung aus dem Satz 8.2.2 c) und d) wird der nachfolgende Alternativsatz über die Disjunktheit von punktierten konvexen Kegeln hergeleitet. Er gibt auch eine Charakterisierung der abgeschlossenen konvexen Kegel bzw. spezieller der linearen Unterräume, die jeweils zum punktierten nichtnegativen Orthanten disjunkt sind. Anschließend wird im Spezialfall von polyedrischen Kegeln der Zusammenhang mit entsprechenden Alternativsätzen für die Lösbarkeit endlicher linearer Ungleichungssysteme aufgezeigt (z. B. Satz von Stiemke, Minkowski-Farkas-Lemma). Der Teil b) des Alternativsatzes für einen linearen Unterraum, der dem Altenativsatz von Stiemke (1915) über lineare Ungleichungssysteme entspricht, wird hier im Abschnitt 4.1.3 für den Beweis der Existenz eines positiven orthogonalen Preisvektors des arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkts K verwendet. In Abschnitt 8.3.5 sichert er den positiven orthogonalen Preisvektor **P** zur Menge V der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte bei den Beweisen zur Charakterisierung der Übereinstimmung von D- bzw. von R-Präferenzordnungen. Im Buch des Autors zur stochastischen Finanzmathematik liefert er in Abschnitt 3.6 den positiven orthogonalen Zustandsprozess für die stochastischen Kapitalmarktgeschäfte.

Bei der Formulierung des Satzes werden folgende Bezeichnungen für spezielle Orthanten des $\mathbb{R}^n$ verwendet. Die Definition eines abgeschlossenen Orthanten im $\mathbb{R}^n$ findet man beispielsweise im Lexikon der Mathematik (2002), Bd. 4, S. 118. Sie verallgemeinert den Begriff „Quadrant des $\mathbb{R}^2$" und „Oktant des $\mathbb{R}^3$" auf den $\mathbb{R}^n$. Der nichtnegative Orthant des $\mathbb{R}^n$ ist die abgeschlossene Menge

$$\mathbb{R}^n_{+0} = \mathbb{R}^n_{\geq\mathbf{o}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}$$

aller (komponentenweise) nichtnegativen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der schwach positive Orthant bzw. der im Nullpunkt $\mathbf{o}$ punktierte nichtnegative Orthant ist die Menge

$$\dot{\mathbb{R}}^n_{+0} = \mathbb{R}^n_{+0} \setminus \{\mathbf{o}\} = \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$$
$$= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \underset{\cdot}{>} \mathbf{o}, \text{ d.h. } \mathbf{x} \geq \mathbf{o} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$$

aller schwach positiven Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und der positive Orthant ist die offene Menge

$$\mathbb{R}^n_{+} = \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o}\}.$$

aller (komponentenweise) positiven Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Der nichtnegative Orthant

$$P := \mathbb{R}^n_{+0} = \bigcap_{j=1}^{n} H^{\geq}_{\mathbf{e}_j,0}$$
$$= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : -E\mathbf{x} \leq \mathbf{o}\} =: P(-E,\mathbf{o})$$

($E = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^{n\mathrm{x}n}$ Einheitsmatrix) ist als Durchschnitt der abgeschlossenen homogenen Halbräume

$$H^{\geq}_{\mathbf{e}_j,0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_j = \mathbf{e}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \geq 0\} \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

ein nichtleeres Polyeder, das den Nullpunkt $\mathbf{o}$ enthält. Außerdem ist P als Durchschnitt abgeschlossener konvexer linearer Kegel auch selbst ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel, also insgesamt ein polyedrischer Kegel. Nimmt man zum positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{+}$ noch den Nullpunkt $\mathbf{o}$ hinzu, so erhält man ebenfalls einen konvexen linearen Kegel, der aber weder offen ($\mathbf{o}$ ist kein innerer Punkt von R) noch abgeschlossen ist ($\mathbf{e}_1$ ist Häufungspunkt von R, aber kein Punkt von R):

$$R := \mathbb{R}^n_{+} \cup \{\mathbf{o}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o} \text{ oder } \mathbf{x} = \mathbf{o}\}.$$

Umgekehrt ist dann der positive Orthant $\mathbb{R}^n_{+}$ der im Nullpunkt punktierte lineare Kegel $\dot{R} = R \setminus \{\mathbf{o}\}$. Die Disjunktheit eines linearen Kegels T zum punktierten nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ ist gleichbedeutend dazu, dass die linearen Kegel T und $P = \mathbb{R}^n_{+0}$ nur den trivialen Durchschnitt $O = \{\mathbf{o}\}$ aufweisen. Weiter ist die Disjunktheit eines linearen Kegels T zum positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{+}$ gleichbedeutend dazu, dass die linearen Kegel T und $R = \mathbb{R}^n_{+} \cup \{\mathbf{o}\}$ nur den trivialen Durchschnitt $O = \{\mathbf{o}\}$ aufweisen. Der Teil a) des Satzes besagt nun, dass ein nichtleerer abgeschlossener konvexer linearer Kegel T genau dann mit dem nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}^n_{+0}$ nur den trivialen Durchschnitt O besitzt, wenn T und $\mathbb{R}^n_{+0}$ durch eine homogene Hyperebene

$H_{\mathbf{a},0}$ mit positivem Normalenvektor **a** getrennt werden können. Der Teil b) behandelt den entsprechenden Spezialfall, dass T ein linearer Unterraum ist.

Satz 8.2.3 Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

a) Der (nichtleere) abgeschlossene konvexe lineare Kegel $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte nichtnegative Orthant $\mathbb{R}^n_{\dot{\geq}\mathbf{o}}$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen positiven Vektor **a** im polaren Kegel T^{P} gibt und somit T in einem abgeschlossenen homogenen Halbraum $H^{\leq}_{\mathbf{a},0}$ und $\mathbb{R}^n_{\dot{\geq}\mathbf{o}}$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$ mit positivem Normalenvektor **a** liegt:

$$T \cap \mathbb{R}^n_{\dot{\geq}\mathbf{o}} = \emptyset \iff T^{\mathrm{P}} \cap \mathbb{R}^n_{+} \neq \emptyset.$$

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Es hat also entweder der konvexe lineare Kegel T mit dem punktierten nichtnegativen Orthanten einen leeren Durchschnitt oder der zugehörige polare Kegel T^{P} mit dem positiven Orthanten einen leeren Durchschnitt.
Eine äquivalente Formulierung lautet: Es hat entweder T mit dem punktierten nichtnegativen Orthanten einen nichtleeren Durchschnitt oder es besitzt T^{P} mit dem positiven Orthanten einen nichtleeren Durchschnitt. Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \mathbb{R}^n_{\dot{\geq}\mathbf{o}} \neq \emptyset$;

(2) $T^{\mathrm{P}} \cap \mathbb{R}^n_{+} \neq \emptyset$.

b) Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte nichtnegative Orthant $\mathbb{R}^n_{\dot{\geq}\mathbf{o}}$ sind genau dann disjunkt, wenn einen positiven Vektor **a** im orthogonalen Komplement $T^{\perp}$ gibt und somit T in einer homogenen Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und $\mathbb{R}^n_{\dot{\geq}\mathbf{o}}$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$ mit positivem Normalenvektor **a** liegt:

$$T \cap \mathbb{R}^n_{\dot{\geq}\mathbf{o}} = \emptyset \iff T^{\perp} \cap \mathbb{R}^n_{+} \neq \emptyset.$$

Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \mathbb{R}^n_{\dot{\geq}\mathbf{o}} \neq \emptyset$;

(2) $T^{\perp} \cap \mathbb{R}^n_{+} \neq \emptyset$.

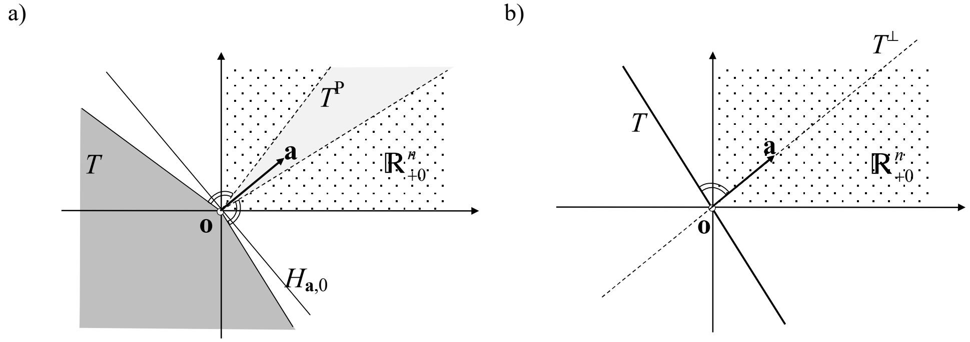


Abb. 8.4 Ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel T und ein linearer Unterraum T, die jeweils zum punktierten nichtnegativen Orthanten disjunkt sind, und ein positiver Vektor $\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}}$ bzw. $T^{\perp}$. Der Kegel liegt im Halbraum $H^{\le}_{\mathbf{a},0}$ und der Unterraum in der Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ mit einem positiven Normalenvektor $\mathbf{a}$

Beweis von Teil a): „⇐": Es gebe ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}}$, d. h. $\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \le 0$ für alle $\mathbf{x} \in T$, und mit $\mathbf{a} > \mathbf{o}$, d. h.

$$\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)^{\mathsf{T}} \text{ mit } a_j > 0 \text{ für } j = 1,\ldots,n.$$

In der Literatur wird der komponentenweise positive Vektor $\mathbf{a}$ statt positiv auch als strikt positiv (echt positiv) bezeichnet und die Schreibweise $\mathbf{a} \gg \mathbf{o}$ verwendet. Weiter liege $\mathbf{y}$ im punktierten nichtnegativen Orthanten bzw. im schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$; es ist also $\mathbf{y} \underset{\cdot}{>} \mathbf{o}$, d. h. $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)^{\mathsf{T}} \ge \mathbf{o}$ und $\mathbf{y} \ne \mathbf{o}$. Ein Vektor $\mathbf{y} \underset{\cdot}{>} \mathbf{o}$ wird zur Unterscheidung von einem strikt positiven Vektor hier als schwach positiv bezeichnet. Für die Komponenten von $\mathbf{y}$ gilt $y_j \ge 0$ für $j = 1,\ldots,n$ und $y_k > 0$ für mindestens einen Index k. Für das Skalarprodukt von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{y}$ gilt dann

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = a_1y_1 + \ldots + a_ny_n \ge a_ky_k > 0.$$

Demzufolge gilt $\mathbf{y} \notin T$, so dass der Kegel T und der punktierte nichtnegative Orthant disjunkt sind.

„⇒": Für die umgekehrte Beweisrichtung der Charakterisierung sind die Mengen T und $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ als disjunkt vorausgesetzt und ist die Existenz eines Vektors $\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}} \cap \mathbb{R}^n_{+}$ nachzuweisen. Das Einheitssimplex (Standardsimplex) S des $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{conv}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)^{\mathsf{T}} = \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j \text{ , } y_j \ge 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}, \end{aligned}$$

ist die konvexe Hülle der n Einheitspunkte $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, die durch die Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_j$ gegeben sind:

$$\mathbf{e}_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} = (\delta_{jk})_{k=1,\ldots,n} \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

mit dem Kronecker-Symbol δ_{jk} (Kroneckerscher δ-Operator, Kronecker-δ nach dem deutschen Mathematiker Leopold Kronecker, 1823–1891, $\delta_{jk} = 1$ für $k = j$, $\delta_{jk} = 0$ für $k \ne j$). Die Menge S liegt im punktierten nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ und ist daher auch zu T disjunkt. S ist als konvexe Hülle einer nichtleeren Menge ebenfalls nichtleer und auch konvex. Außerdem ist S abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt. Nach Satz 8.2.2 c) erhält man die strikte Trennung von S und T durch eine affine Hyperebene $H_{\mathbf{a},\alpha}$ mit einem Normalenvektor $\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}}$:

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} < \alpha < \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in T \text{ und } \mathbf{y} \in S.$$

Aus der Trennungsungleichung folgt speziell für $\mathbf{x} = \mathbf{o} \in T$ und $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j \in S$ für jedes $j = 1,\ldots,n$

$$0 = \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{o} < \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_j = a_j,$$

also $\mathbf{a} > \mathbf{o}$. Die Positivität des Normalenvektors $\mathbf{a}$ resultiert hier also aus der strikten Trennung des Nullpunkts $\mathbf{o} \in T$ von den n Einheitspunkten $\mathbf{e}_j \in S$. Wegen $\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}}$ liegt der Kegel T in dem abgeschlossenen homogenen Halbraum $H^{\leq}_{\mathbf{a},0}$, der den positiven Normalenvektor **a** besitzt:

$$T \subseteq H^{\leq}_{\mathbf{a},0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq 0\} \text{ mit einem } \mathbf{a} > \mathbf{o}.$$

Da für alle schwach positiven $\mathbf{y}$ das Skalarprodukt $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ positiv ist, liegt der punktierte nichtnegative Orthant ganz im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$:

$$\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}} \subseteq H^{>}_{\mathbf{a},0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} > 0\}.$$

Beweis von Teil b): Im Beweis von Satz 8.2.1 c) wurde bereits begründet, dass ein linearer Unterraum T auch ein (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel ist und dass für einen linearen Unterraum T der Polarkegel T^P gleich dem orthogonalen Komplement $T^\perp$ von U ist. Damit ergibt sich nach Teil a) des vorliegenden Satzes die entsprechende Charakterisierung der Disjunktheit von linearem Unterraum T und punktiertem nichtnegativen Orthanten. Im Falle der Existenz eines $\mathbf{a} \in T^\perp \cap \mathbb{R}^n_+$ liegt jetzt T in der linearen Hyperebene

$$H_{\mathbf{a},0} = [\mathbf{a}]^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 0\}$$

und $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$. Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

Aus Satz 8.2.3, Teil b) ergibt sich speziell für eine Hyperebene $T = H_{\mathbf{a},0}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$) und das zugehörige orthogonale Komplement $T^\perp = [\mathbf{a}] = \operatorname{lin} \mathbf{a}$ die nachstehende Folgerung.

Zusatz 8.2.4 Disjunktheit einer Hyperebene und des schwach positiven Orthanten

Die lineare Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen positiven (oder negativen) Normalenvektor **a** der Hyperebene gibt. Bei positiv gewähltem Normalenvektor **a** der Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ liegt der schwach positive Orthant im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$:

$$\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}} \subseteq H^{>}_{\mathbf{a},0}.$$

Eine Verallgemeinerung des obigen Alternativsatzes 8.2.3 wird auf der Website www.pleier-r.de des Autors angegeben, wobei die Positivität der Komponenten a_j des Vektors $\mathbf{a} \in T^\mathrm{P}$ nur für die Indizes j einer Teilmenge $J \subseteq I_n = \{1,\ldots,n\}$ charakterisiert wird und dazu der J-positive Orthant

$$\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j > 0 \ \forall\, j \in J\} \ (\supseteq \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}})$$

und der J-schwach positive Orthant

$$\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0 \ \forall\, j \in J,\ x_i = 0 \ \forall\, i \in I_n \setminus J,\ \exists\, k \in J \text{ mit } x_k > 0\} \ (\subseteq \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}})$$

verwendet werden. Als Spezialfälle sind dann enthalten a) $J = I_n$ mit $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) = \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}$, $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) = \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ und b) $J = \{1\}$ mit $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) = H^{>}_{\mathbf{e}_1,0} = \{x_1 > 0\}$, $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) = \operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$.
Mit diesem allgemeineren Alternativsatz speziell für einen linearen Unterraum T kann im stochastischen Fall der schrittweise Übergang vom Law of One Price zur Arbitragefreiheit geometrisch interpretiert werden.

In Teil a) von Alternativsatz 8.2.3 wird ein allgemeiner (nichtleerer) abgeschlossener konvexer Kegel T betrachtet. Dieser lässt sich nach einem Satz der konvexen Geometrie (siehe beispielsweise Jungnickel (2008), S. 35, Korollar 2.3.7; Rockafellar (1970), S. 99, Th.11.5; Stoer und Witzgall (1970), S. 95, Th.3.3.2) wie jede abgeschlossene konvexe Menge T als Durchschnitt aller T umfassenden abgeschlossenen Halbräume H darstellen:

$$T = \bigcap_{\substack{H \supseteq T \\ H \text{ abgeschl. Halbraum}}} H \,.$$

Wie das folgende Beispiel zeigt, können dabei aber für die Durchschnittsbildung im Allgemeinen unendlich viele Halbräume benötigt werden.

Beispiel 8.2.1 Ein konvexer linearer Kegel als Durchschnitt von unendlich vielen Halbräumen

Dass für die Darstellung einer abgeschlossenen konvexen Menge T als Durchschnitt von Halbräumen im Allgemeinen unendlich viele Halbräume benötigt werden, zeigt das Beispiel des abgeschlossenen konvexen linearen Kegels T im Raum $\mathbb{R}^3$, den man erhält, wenn man durch jeden Punkt $\mathbf{x} = (x_1,x_2,1)$ der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe

$$C = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1,\, x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$

der Ebene $H_{\mathbf{e}_3,1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$ den vom Nullpunkt ausgehenden Strahl

$$\text{ray } \mathbf{x} = \{\lambda\mathbf{x} : \lambda \ge 0\}$$

legt und T als die Vereinigung dieser Strahlen bildet:

$$T = \bigcup_{\mathbf{x} \in C} \text{ray } \mathbf{x} = \text{ray } C.$$

Für die Durchschnittsbildung werden alle unendlich vielen T umfassenden Halbräume benötigt, die zu den in den Mantellinien des Kegels anliegenden Tangentialebenen gehören. △

Bevor nun der Zusammenhang des obigen Alternativsatzes für konvexe lineare Kegel mit Alternativsätzen über lineare Ungleichungssysteme aufgezeigt wird, erfolgt zuerst die Bereitstellung der verschiedenen Hüllen-Definitionen und des Polyederdarstellungssatzes.

8.2.3.2 Verschiedene Hüllen einer Menge

Allgemein ist die **konische Hülle** (konvexe Kegelhülle) cone S einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden konvexen linearen Kegel des $\mathbb{R}^n$ und damit als der kleinste S umfassende konvexe lineare Kegel:

$$\text{cone } S = \bigcap_{\substack{C \supseteq S, \\ C \text{ konvexer Kegel}}} C \,.$$

Dabei heißt eine nichtleere Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ ($\emptyset \ne C \subseteq \mathbb{R}^n$) ein **konvexer linearer Kegel**, wenn sie eine konvexe Menge und ein linearer Kegel ist, also abgeschlossen bezüglich der Konvexkombination und der nichtnegativen Skalarmultiplikation und somit abgeschlossen bezüglich der Konuskombination ist. Da der Nullraum $O = \{\mathbf{o}\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ein konvexer linearer Kegel ist und $\emptyset \subseteq O \subseteq C$ für jeden konvexen linearen Kegel C gilt, ergibt sich für die konische Hülle der leeren Menge:

$$\text{cone } \emptyset = O.$$

Wegen $\emptyset \subseteq S$ ist $O = \text{cone } \emptyset \subseteq \text{cone } S$, also stets $\mathbf{o} \in \text{cone } S$ und cone $S \ne \emptyset$. Falls $S \ne \emptyset$ ist, kann cone S charakterisiert werden als die Menge aller nichtnegativen Linearkombinationen (Nichtnegativkombinationen, konischen Kombinationen, Konuskombinationen) von endlich vielen Elementen von S:

$$\text{cone } S = \{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i \ : \exists\, k \in \mathbb{N}, \mathbf{s}_i \in S, \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 1,\ldots,k\}.$$

Der aus $S \neq \emptyset$ durch alle konischen Kombinationen erzeugte konvexe lineare Kegel cone S ist zu unterscheiden von dem nur durch alle nichtnegativen Vielfachen erzeugten linearen Kegel, der **Kegelhülle** von S:

$$\text{ray } S = \{\mathbf{x} = \lambda\mathbf{s} : \mathbf{s} \in S, \lambda \geq 0\} = \bigcup_{\mathbf{s} \in S} \text{ray } \mathbf{s}\ .$$

Für eine beliebige (evtl. auch leere) Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Kegelhülle ray S definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden linearen Kegel K des $\mathbb{R}^n$ und damit als der kleinste S umfassende lineare Kegel:

$$\text{ray } S = \bigcap_{\substack{K \supseteq S,\\ K \text{ linearer Kegel}}} K\ .$$

Dabei heißt eine nichtleere Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ ($\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$) ein **linearer Kegel**, wenn sie abgeschlossen bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation. Da ein $\mathbf{x} \in K$ existiert, gilt stets $\mathbf{o} = 0 \cdot \mathbf{x} \in K$. Da der Nullraum $O = \{\mathbf{o}\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ein linearer Kegel ist und $\emptyset \subseteq O \subseteq K$ für jeden linearen Kegel K gilt, ergibt sich für die Kegelhülle der leeren Menge:

$$\text{ray } \emptyset = O.$$

Wegen $\emptyset \subseteq S$ ist $O = \text{ray } \emptyset \subseteq \text{ray } S$, also stets $\mathbf{o} \in \text{ray } S$ und ray $S \neq \emptyset$. Weiter gilt cone S = conv (ray S) = ray (conv S)).

Die **lineare Hülle** (das Erzeugnis) lin S einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wird definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden linearen Unterräume des $\mathbb{R}^n$ und somit als der kleinste S umfassende lineare Unterraum:

$$\text{lin } S = \bigcap_{\substack{U \supseteq S,\\ U \text{ linearer Unterraum}}} U\ .$$

Dabei heißt eine nichtleere Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ ($\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$) ein **linearer Unterraum** (Untervektorraum, Vektorunterraum) von $\mathbb{R}^n$, wenn sie bezüglich der Addition und der Skalarmultiplikation, also insgesamt bezüglich der Linearkombination abgeschlossen ist. Da $O = \{\mathbf{o}\}$ ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist und $\emptyset \subseteq O \subseteq U$ für jeden linearen Unterraum U des $\mathbb{R}^n$ gilt, ergibt sich für die lineare Hülle der leeren Menge:

$$\text{lin } \emptyset = O.$$

Wegen $\emptyset \subseteq S$ ist $O = \text{lin } \emptyset \subseteq \text{lin } S$, also stets $\mathbf{o} \in \text{lin } S$ und lin $S \neq \emptyset$. Falls $S \neq \emptyset$ ist, kann lin S charakterisiert werden als die Menge aller reellen Linearkombinationen (linearen Kombinationen) von endlich vielen Elementen von S:

$$\text{lin } S = \{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i \ : \exists\, k \in \mathbb{N}, \mathbf{s}_i \in S \text{ für } i = 1,\ldots,k\}.$$

Die **konvexe Hülle** conv S einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wird definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, damit als die kleinste S umfassende konvexe Menge, bzw. gleichbedeutend dazu als die Menge aller nichtnegativen Linearkombinationen mit Koeffizientensumme Eins (konvexen Kombinationen, Konvexkombinationen) von endlich vielen Elementen von S:

$$\begin{aligned}\text{conv } S &= \bigcap_{\substack{C \supseteq S,\\ C \text{ konvex}}} C \\ &= \{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i \ : \exists\, k \in \mathbb{N}, \mathbf{s}_i \in S, \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 1,\ldots,k,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}.\end{aligned}$$

Dabei heißt eine Teilmenge C von $\mathbb{R}^n$ **konvex**, wenn sie abgeschlossen bezüglich der Konvexkombination ist. Da auch die leere Menge $\emptyset$ eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist und $\emptyset \subseteq C$ für jede konvexe Teilmenge C des $\mathbb{R}^n$ gilt, ergibt sich für die konvexe Hülle der leeren Menge:

$$\text{conv } \emptyset = \emptyset.$$

Die **affine Hülle** aff S einer beliebigen Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wird definiert als der Durchschnitt aller S umfassenden affinen Unterräume des $\mathbb{R}^n$, damit als der kleinste S umfassende affine Unterraum, bzw. gleichbedeutend dazu als die Menge aller reellen Linearkombinationen mit Koeffizientensumme Eins (affinen Kombinationen, Affinkombinationen) von endlich vielen Elementen von S:

$$\operatorname{aff} S = \bigcap_{\substack{M \supseteq S, \\ M \text{ affiner Unterraum}}} M$$
$$= \{\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i \ : \exists\, k \in \mathbb{N},\, \mathbf{s}_i \in S \text{ für } i = 1,\ldots,k,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}.$$

Dabei ist eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ ein **affiner Unterraum** von $\mathbb{R}^n$, wenn sie bezüglich der Affinkombination abgeschlossen ist. Da auch die leere Menge $\emptyset$ ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist und $\emptyset \subseteq M$ für jeden affinen Unterraum M des $\mathbb{R}^n$ gilt, ergibt sich für die affine Hülle der leeren Menge:

$$\operatorname{aff} \emptyset = \emptyset.$$

Literatur zu den Definitionen der Hüllen: Jungnickel (2008), S. 25, 261, 263; Jarre und Stoer (2004), S. 205, 207, 216; Borgwardt (2001), S. 14f.; Stoer und Witzgall (1970), S. 31f.; Rockafellar (1970), S. 6, 12, 14.

8.2.3.3 Polyederdarstellungssatz

Allgemein besagt der Polyederdarstellungssatz von Weyl-Minkowski (siehe beispielsweise Jungnickel (2008), S. 72, Satz 2.9.7 speziell für $X = \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $P = \operatorname{cone} Y$; Borgwardt (2001), S. 51–55, Sätze 4.1, 4.2, 4.4, 4.5; Faigle (2006), S. 23, Satz 2.1 und (2009), S.50, Satz 3.1), dass die (konvexen) **Polyeder** (polyedrischen Mengen, Vielflache, Vielflächner, Ebenflächner)

$$P = P(A,\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

im $\mathbb{R}^n$ als die Durchschnitte endlich vieler abgeschlossener affiner Halbräume

$$P(\mathbf{a}_i^\mathsf{T}, b_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq b_i\}, \qquad \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,m,$$

genau die Mengen mit einem endlichen Erzeugendensystem (X,Y) sind. Der Polyederdarstellungssatz ist benannt nach dem deutschen Mathematiker, Physiker und Philosophen Hermann K. H. Weyl (1885–1955) und dem deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (1864–1909).

Polyederdarstellungssatz von Weyl-Minkowski

Zum konvexen Polyeder P gibt es zwei endliche Teilmengen X und Y des $\mathbb{R}^n$ mit

1)	$P = \operatorname{conv} X + \operatorname{cone} Y$,		falls $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$,
2)	$P = \operatorname{conv} X$	(Polytop),	falls $X \neq \emptyset$, $Y = \emptyset$,
3)	$P = \operatorname{cone} Y$	(polyedrischer Kegel),	falls $X = \emptyset$, $Y \neq \emptyset$,
4)	$P = \emptyset$,		falls $X = Y = \emptyset$.

Die dabei in 1) verwendete Minkowski-Summe zweier Mengen S, $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$S + T := \{\mathbf{s} + \mathbf{t} : \exists\, \mathbf{s} \in S,\ \mathbf{t} \in T\}.$$

Der Fall 4) des leeren Polyeders ($\operatorname{conv} \emptyset + \operatorname{cone} \emptyset = \emptyset + O = \emptyset$) und der Fall 2) des konvexen Polytops (beschränktes Polyeder; $\operatorname{conv} X + \operatorname{cone} \emptyset = \operatorname{conv} X + O = \operatorname{conv} X$) ordnen sich in die Darstellungsformel von Fall 1) ein. Im Fall 3) wird jedoch die extra angegebene Darstellungsformel für den polyedrischen linearen Kegel benötigt, da $\operatorname{conv} \emptyset + \operatorname{cone} Y = \emptyset + \operatorname{cone} Y = \emptyset \neq \operatorname{cone} Y$ ($\supseteq O$). Die Formel 3) ist ein Spezialfall der Formel 1) nur für den Fall $X = O = \{\mathbf{o}\}$: $\operatorname{conv} O + \operatorname{cone} Y = O + \operatorname{cone} Y = \operatorname{cone} Y$.
Die Polytope, die hier als beschränkte (konvexe) Polyeder auftreten, sind stets konvex. Davon zu unterscheiden sind die allgemeinen Polytope, die als (im Allgemeinen nichtkonvexe) Vereinigungen von konvexen Polytopen definiert sind (Aigner und Ziegler (2004), S. 58).

Neben der additiven Zerlegung (Dekomposition)

$$P = Q + C$$

eines nichtleeren Polyeders P in ein Polytop

$$Q = \operatorname{conv} X$$

und einen konvexen linearen Kegel

$$C = \operatorname{cone} Y$$

(im Fall 3 setzt man hier $Q = O = \{\mathbf{o}\}$) wird für den Kegel C eine weitere additive Zerlegung in den linearen Unterraum

$$L := C \cap (-C),$$

den sogenannten Linienraum von C, und den spitzen konvexen linearen Kegel

$$K := C \cap L^{\perp}$$

($K \cap (-K) = C \cap L^{\perp} \cap (-C) \cap L^{\perp} = L \cap L^{\perp} = O \Rightarrow K$ spitz) angegeben:

$$C = K \oplus L.$$

Für ein nichtleeres Polyeder P erhält man daher die Zerlegung

$$P = Q + C = Q + (K \oplus L)$$

mit einem Polytop Q, dem Rezessionskegel $C = P_\infty$ von P, dem Linienraum L von C und dem spitzen konvexen linearen Kegel K. Der Rezessionskegel P_∞ des Polyeders $P = P(A,\mathbf{b})$ ist der Kegel der freien Richtungen von P und gegeben durch $P(A,\mathbf{o})$. $P(A,\mathbf{o})$ wird auch als Rezessionskegel der Matrix A bezeichnet. Literatur zur Zerlegung eines Polyeders in ein Polytop, einen linearen Unterraum und einen spitzen konvexen Kegel: Borgwardt (2001), S. 58; Jungnickel (2008), S. 74.
Neben der sogenannten äußeren Beschreibung (external representation nach Rockafellar (1970), S. 11, 170) eines Polyeders P, bei der die Menge P im $\mathbb{R}^n$ von außen betrachtet wird und algebraisch als Lösungsmenge eines endlichen linearen Ungleichungssystems bzw. geometrisch als Durchschnitt endlich vieler Halbräume eingegrenzt wird, hat man also noch eine sogenannte innere Beschreibung (internal representation nach Rockafellar (1970), S. 170, 153ff., 60ff.), bei der die Menge von innen betrachtet wird und mittels einer Parameterdarstellung mit Punkten der Menge aufgespannt wird.

Der Polyederdarstellungssatz verallgemeinert also die Situation eines linearen bzw. affinen Teilraums von $\mathbb{R}^n$. Im Spezialfall eines affinen Unterraums bzw. linearen Unterraums $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dieser einerseits algebraisch die Lösungsmenge eines endlichen inhomogenen bzw. homogenen linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ bzw. geometrisch der Durchschnitt endlich vieler Hyperebenen und andererseits die affine Hülle von $m + 1$ affin unabhängigen Punkten $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ ($m = \dim M$):

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{aff}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\} \\ &= \mathbf{x}_0 + L \\ &= \mathbf{x}_0 + \operatorname{lin}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \\ &= \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0\} + \operatorname{cone}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, -\mathbf{v}_1, \ldots, -\mathbf{v}_m\} \end{aligned}$$

mit dem linearen Unterraum

$$L = M - M = \operatorname{aff}\{\mathbf{o}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} = \operatorname{lin}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$$

und der Basis $\mathbf{v}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0$, $j = 1,\ldots,m$, von L. Ein linearer Unterraum M liegt genau dann vor, wenn $\mathbf{o} \in M$ gilt, somit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$ gewählt werden kann und M eine lineare Hülle ist:

$$M = L = \operatorname{lin}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}.$$

Ausführlichere Betrachtungen zu den beiden Darstellungsweisen für einen affinen bzw. linearen Unterraum findet man z. B. bei Rockafellar (1970), S. 4–7, und Jungnickel (2008), S. 262f.

8.2.3.4 Zusammenhang der Alternativsätze für konvexe lineare Kegel mit Alternativsätzen über lineare Ungleichungssysteme

Beschränkt man sich nun in Satz 8.2.3, Teil a) auf abgeschlossene konvexe lineare Kegel T, die als Durchschnitt von *endlich* vielen homogenen Halbräumen gebildet werden, also auf **polyedrische Kegel**, so kann dessen Aussage in einen Alternativsatz über die Lösbarkeit endlicher linearer Ungleichungssysteme umformuliert werden. Ebenso liefert Teil b) des Satzes einen entsprechenden Alternativsatz, da ein linearer Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ stets als Durchschnitt endlich vieler linearer Hyperebenen bzw. als Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems und auch als lineare Hülle einer Basis von T dargestellt werden kann.
Nach dem Polyederdarstellungssatz von Weyl-Minkowski ist nun T genau dann ein polyedrischer Kegel im $\mathbb{R}^n$,

$$T = P(Z,\mathbf{o}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : Z\mathbf{x} \leq \mathbf{o}\} \qquad (Z \in \mathbb{R}^{m\times n}),$$

wenn T ein endlich erzeugter linearer Kegel ist, also die konische Hülle einer endlichen Menge $L = \{\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist:

$$T = \text{cone } L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{c}_i \text{ , } \lambda_i \geq 0 \text{ für } i = 1,\ldots,m\}.$$

Die endliche Menge L ist ein Erzeugendensystem des konvexen linearen Kegels T. Die Aussage von Satz 8.2.3, Teil a) für den Spezialfall eines polyedrischen bzw. endlich erzeugten Kegels

$$T = P(Z,\mathbf{o}) = \text{cone } L \text{ mit } L = \{\mathbf{c}_1,\ldots, \mathbf{c}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

wird jetzt in eine Aussage über lineare Ungleichungssysteme umformuliert. Es wird dazu die innere Beschreibung von T verwendet. Bezeichnet man die mit den Vektoren $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$ der Menge L als Spaltenvektoren gebildete Matrix ebenfalls mit L,

$$L = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m) \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

so ist der polyedrische Kegel T das Bild des nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}^n_{+0}$ bei der durch die Matrix L vermittelten linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $L(\mathbf{z}) = L\mathbf{z}$ für $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m_{+0}$:

$$T = \text{cone } L = L(\mathbb{R}^n_{+0}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = L\mathbf{z}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{z} \geq \mathbf{o}\}.$$

Es kann hier für drei verschiedene mathematische Objekte dieselbe Bezeichnung L verwendet werden, da aus dem Zusammenhang hervorgeht, ob jeweils die Menge, die Matrix oder die Abbildung gemeint ist.

Für den zu T polaren Kegel $T^\mathrm{P} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{o}$ für alle $\mathbf{y} \in T\}$ gilt

$$T^\mathrm{P} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^\mathsf{T}L \leq \mathbf{o}\}:$$

Es ist nämlich genau dann $\mathbf{v} \in T^\mathrm{P}$, wenn $\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq 0$ ist für alle $\mathbf{y} = L\mathbf{z}$ mit $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$. Speziell mit den Standardbasisvektoren $\mathbf{z} = \mathbf{e}_j$ des $\mathbb{R}^m$ folgt daraus $\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{c}_j = \mathbf{v}^\mathsf{T}L\mathbf{e}_j \leq 0$ $(j = 1,\ldots,m)$ und damit $\mathbf{v}^\mathsf{T}L \leq \mathbf{o}$. Umgekehrt folgt aus $\mathbf{v}^\mathsf{T}L \leq \mathbf{o}$ auch für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$ die Ungleichung $\mathbf{v}^\mathsf{T}L\mathbf{z} \leq 0$ bzw. für alle $\mathbf{y} = L\mathbf{z} \in T$ die Ungleichung $\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq 0$ und somit $\mathbf{v} \in T^\mathrm{P}$.

Die Aussage

(1) $\qquad T \cap \dot{\mathbb{R}}^n_{+0} \neq \emptyset$

ist dann gleichbedeutend dazu, dass ein $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ existiert mit

(1‘) $\qquad L\mathbf{z} \gneq \mathbf{o}$ und $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$.

Die Aussage

(2) $\qquad T^\mathrm{P} \cap \mathbb{R}^n_{+0} \neq \emptyset$

ist gleichbedeutend dazu, dass ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

(2‘) $\qquad \mathbf{v}^\mathsf{T}L \leq \mathbf{o}$ und $\mathbf{v} > \mathbf{o}$.

Nach diesen Vorüberlegungen ergibt sich schon der Teil a) des nachfolgenden Zusatzes, nach dem genau eines der beiden angegebenen Ungleichungssysteme (1‘) oder (2‘) lösbar ist. Dieser Teil a) von Zusatz 8.2.5 ist ein homogener Spezialfall des bei Jungnickel (2008), S. 44, angegebenen Korollars 2.4.11 (mit $A = - E$, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Einheitsmatrix, $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, $B = L^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = \mathbf{o}$).

In Teil b) von Satz 8.2.3 wird als ein spezieller (nichtleerer) abgeschlossener konvexer linearer Kegel ein linearer Unterraum T von $\mathbb{R}^n$ und das zugehörige orthogonale Komplement $T^\perp$ betrachtet. Um die Aussage von Teil b) über die alternative Disjunktheit von Mengen für den Spezialfall eines linearen Unterraums T jetzt in die Sprache von linearen Ungleichungssystemen zu übersetzen, wird wieder die innere Beschreibung von T verwendet. Die linearen Unterräume $T \subseteq \mathbb{R}^n$ sind genau die Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die jeweils die lineare Hülle eines endlichen Erzeugendensystems $L = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m\} \subseteq T$, $m \geq \dim T$, sind. Mit der endlichen Menge $L \subseteq T$ bzw. mit der Matrix $L = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ bzw. der Abbildung $L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt also für den linearen Unterraum

$$\begin{aligned} T &= \operatorname{lin} L = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = L\mathbf{z}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m\} \\ &= L(\mathbb{R}^m) =: \operatorname{Bild}(L) =: \operatorname{Im} L. \end{aligned}$$

Der Unterraum T ist der von den Spalten $\mathbf{c}_j$ der Matrix L aufgespannte sogenannte Spaltenraum der Matrix und der Bildraum (das Bild, englisch: image) Im L der linearen Abbildung (des Vektorraumhomomorphismus) $L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Für das zu T gehörige orthogonale Komplement gilt

$$\begin{aligned} T^\perp &= (\operatorname{lin} L)^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^\mathsf{T} L\mathbf{z} = 0 \text{ für alle } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^\mathsf{T} L = \mathbf{o}\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : L^\mathsf{T}\mathbf{v} = \mathbf{o}^\mathsf{T}\}, \end{aligned}$$

sodass $T^\perp$ der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit der zu L transponierten Matric L^T ist.

Die Aussage

(1) $\quad T \cap \dot{\mathbb{R}}^n_{+0} \neq \emptyset$

ist dann gleichbedeutend dazu, dass ein $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ existiert mit

(1‘) $\quad L\mathbf{z} \underset{\cdot}{>} \mathbf{o}$;

die Aussage

(2) $\quad T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{+0} \neq \emptyset$

ist gleichbedeutend dazu, dass ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

(2‘) $\quad \mathbf{v}^\mathsf{T} L = \mathbf{o}^\mathsf{T}$ und $\mathbf{v} > \mathbf{o}$.

Aus diesen Vorüberlegungen ergibt sich auch Teil b) des nachfolgenden Zusatzes, der als Satz von Stiemke (1892–1915) bezeichnet wird und in engem Zusammenhang mit dem Minkowski-Farkas-Lemma steht. Beweise des Satzes von Stiemke findet man beispielsweise auch bei Stoer und Witzgall (1970), S. 24, Borgwardt (2001), S. 23, und Jungnickel (2008), S. 42f. Bei Jungnickel wird der Satz von Stiemke aus dem Satz von Motzkin[3] und dieser wiederum aus dem Minkowski-Farkas-Lemma hergeleitet. Dieses Lemma wurde unabhängig voneinander 1902 vom ungarischen Physiker und Mathematiker Julius (Gyula) Farkas (1847–1930) und vom deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (1864–1909) bewiesen. Verschiedene Beweise des Lemmas findet man beispielsweise bei

[3] Theodore Samuel Motzkin (1908–1970) war ein US-amerikanischer Mathematiker, der russischer Abstammung war und in Berlin geboren wurde.

Rockafellar (1970), S. 200, Corollary 22.3.1, Stoer und Witzgall (1970), S. 55, Theorem (2.8.5), Borgwardt (2001), S. 18–21, Satz 2.3 und Jungnickel (2008), S. 39f, Satz 2.4.2.

Zusatz 8.2.5 Alternativsatz über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen

Es sei die Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gegeben.

a) Von den beiden folgenden Ungleichungssystemen ist dann entweder (1‘) oder (2‘) lösbar:

(1‘) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: $L\mathbf{z} \underset{\cdot}{\geq} \mathbf{o}$, $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$;

(2‘) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{v}^\mathsf{T} L \leq \mathbf{o}^\mathsf{T}$, $\mathbf{v} > \mathbf{o}$.

b) **Satz der Alternativen von Erich Stiemke** (1915): Von den beiden folgenden Ungleichungssystemen ist dann entweder (1‘) oder (2‘) lösbar:

(1‘) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: $L\mathbf{z} \underset{\cdot}{\geq} \mathbf{o}$;

(2‘) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{v}^\mathsf{T} L = \mathbf{o}^\mathsf{T}$, $\mathbf{v} > \mathbf{o}$.

Um einen Vergleich des Alternativsatzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma anzustellen, werden die im Zusatz 8.2.5 b), der homogenen Version des Satzes von Stiemke, auftretenden homogenen Ungleichungssysteme mittels einer Variablentransformation in äquivalente Ungleichungssysteme umgeformt, von denen mindestens eines inhomogen ist. Mit den Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^\mathsf{T} \\ -A^\mathsf{T} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}, \ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$L^\mathsf{T} = (\mathbf{b}, -A)$$

und den Variablen

$$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{v}^\mathsf{T} = (1, \mathbf{x}^\mathsf{T})$$

ergibt sich aus Zusatz 8.2.5 der nachfolgende Zusatz über inhomogene lineare Ungleichungssysteme. Umgekehrt erhält man aus dem nachfolgenden Zusatz speziell mit $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, $A = -L^\mathsf{T}$, $-A^\mathsf{T} = L$ und $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ wieder den vorigen Zusatz über die homogenen linearen Ungleichungssysteme.

Zusatz 8.2.6 Alternativsatz über die Lösbarkeit von *inhomogenen* linearen Ungleichungssystemen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) Es ist dann genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (1“) oder (2“) lösbar:

(1“) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: α) $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$, $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{z} > 0$, $A^\mathsf{T}\mathbf{z} \leq \mathbf{o}$ oder
β) $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$, $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{z} \geq 0$, $A^\mathsf{T}\mathbf{z} \underset{\cdot}{\leq} \mathbf{o}$;

(2“) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} > \mathbf{o}$, $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.

b) **Inhomogene Version des Satzes von Stiemke**: Es ist dann genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (1“) oder (2“) lösbar:

(1“) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: α) $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{z} > 0$, $A^\mathsf{T}\mathbf{z} \leq \mathbf{o}$ oder

β) $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{z} \geq 0$, $A^\mathsf{T}\mathbf{z} \underset{\cdot}{<} \mathbf{o}$;

(2“) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} > \mathbf{o}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

8.2.3.5 Vergleich der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma

Der Teil b) von Zusatz 8.2.6 ist eine inhomogene Version des selbst in homogener Version auftretenden Satzes von Stiemke. Diese inhomogene Version lässt sich mit dem (inhomogenen) Minkowski-Farkas-Lemma vergleichen.

Das **Minkowski-Farkas-Lemma** (auch „Grundsatz der einfachen Ungleichungen“ genannt) besagt, dass zu vorgegebenen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (I) oder (II) lösbar ist:

(I) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{z} > 0$, $A^\mathsf{T}\mathbf{z} \leq \mathbf{o}$;

(II) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Im Ungleichungssystem (II) wird mit den nichtnegativen **x** eine größere Lösungsmenge zugelassen als im Ungleichungssystem (2“) von Zusatz 8.2.6, b) mit den positiven **x**. Im Gegenzug dazu verkleinert sich in (I) die Lösungsmenge auf den Fall α) von (1“). Beim Ungleichungssystem (I) des Minkowski-Farkas-Lemmas wird für die schwache Positivität des Vektors $L\mathbf{z} = (\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{z}, -A^\mathsf{T}\mathbf{z})^\mathsf{T}$ im Ungleichungssystem (1“) der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke also nur der Fall α) und nicht auch noch der Fall β) zugelassen. Der Fall (1“α) wird in Abbildung 8.5 dargestellt.

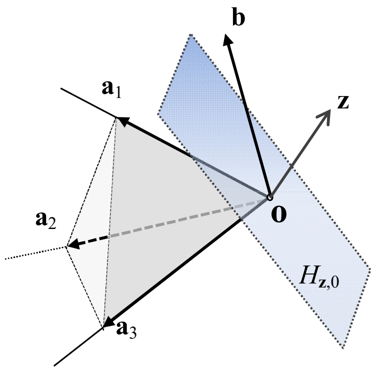


Abb. 8.5 Der Fall (I) im Minkowski-Farkas-Lemma bzw. der Fall (1“α) in der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke, in dem **b** außerhalb des Kegels cone $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ liegt ($m = n = 3$)

Das Minkowski-Farkas-Lemma bedeutet geometrisch, dass der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ entweder gemäß (II) in dem von den Spalten $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ der Matrix $A = (\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ erzeugten konvexen linearen Kegel liegt,

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \in \text{ cone } \{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\} &= \text{cone } A = A(\mathbb{R}^n_{+0}) \\ &= \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\} \\ &= \{x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n : x_j \geq 0 \text{ für } j = 1,\ldots,n\},\end{aligned}$$

oder gemäß (I) sich von diesem Kegel folgendermaßen trennen lässt:

$$\exists\, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m : \quad \mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{b} > 0 \geq \mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{u} \text{ für alle } \mathbf{u} \in \text{cone } A,$$
$$\text{d. h. für alle } \mathbf{u} = A\mathbf{x} \text{ mit } \mathbf{x} \geq \mathbf{o}.$$

Es ist nämlich $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{u} \leq 0$ für alle $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$ genau dann, wenn $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j \leq 0$ für $j = 1,..,n$ bzw. wenn $\mathbf{z}^\mathsf{T}A \leq \mathbf{o}^\mathsf{T}$ ist. Im Falle (I) wird also der Punkt $\mathbf{b}$ vom Kegel cone A durch die Hyperebene $H_{\mathbf{z},0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 0\}$ derart getrennt, dass der Punkt $\mathbf{b}$ im offenen Halbraum $H^>_{\mathbf{z},0}$ und der Kegel cone A im abgeschlossenen Halbraum $H^\leq_{\mathbf{z},0}$ liegt (Lexikon der Mathematik, Bd. 2 (2001), S. 132):

$$\mathbf{b} \in H^>_{\mathbf{z},0} \;\wedge\; \text{cone } A \subseteq H^\leq_{\mathbf{z},0}.$$

Die inhomogene Version des Satzes von Stiemke dagegen bedeutet geometrisch, dass der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ entweder gemäß (2“) im Bild des positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o}\}$ bei der durch $A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ vermittelten linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ liegt,

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \in A(\mathbb{R}^n_+) &= \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{o}\} \\ &= \{x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n : x_j > 0 \text{ für } j = 1,\ldots,n\},\end{aligned}$$

oder gemäß (1“) sich von diesem Bild derart trennen lässt, dass eine Hyperebene $H_{\mathbf{z},0}$ existiert mit

$$\alpha)\ \mathbf{b} \in H^>_{\mathbf{z},0} \;\wedge\; A(\mathbb{R}^n_+) \subseteq H^\leq_{\mathbf{z},0} \quad \text{oder}$$
$$\beta)\ \mathbf{b} \in H^\geq_{\mathbf{z},0} \;\wedge\; A(\mathbb{R}^n_+) \subseteq H^<_{\mathbf{z},0}.$$

Im Fall (1“) sind die Mengen $\{\mathbf{b}\}$ und $A(\mathbb{R}^n_+)$ sogenannte eigentlich trennbare Mengen. Die Menge $A(\mathbb{R}^n_+)$ ist die Menge aller Positivkombinationen (positiven Linearkombinationen) der Spalten $\mathbf{a}_j$ der Matrix A, also ein konvexer linearer Kegel gemäß der Definition von Rockafellar (1970), S. 14 (konvexer linearer P-Kegel).
Während im Fall (I) des Minkowski-Farkas-Lemmas der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ nur im offenen Halbraum $H^>_{\mathbf{z},0}$ liegen kann, kann im entsprechenden Fall (1“) der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sowohl im offenen Halbraum $H^>_{\mathbf{z},0}$ (Fall 1“α) als auch im abgeschlossenen Halbraum $H^\geq_{\mathbf{z},0}$ (Fall 1“β) liegen.

Beweis für die geometrische Interpretation von Fall (1“β) in der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke: Es ist zu zeigen, dass die Vektorungleichung $\mathbf{z}^\mathsf{T}A \lneq \mathbf{o}^\mathsf{T}$ gleichbedeutend zur Mengeninklusion $A(\mathbb{R}^n_+) \subseteq H^<_{\mathbf{z},0}$.

„⇒“: Die Vektorungleichung bedeutet für die Komponenten $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j \leq 0$ für alle Indizes $j \in I_n = \{1,\ldots,n\}$

und $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_k < 0$ für mindestens einen Index $k \in I_n$. Daraus folgt für alle $\mathbf{x} > \mathbf{o}$ die Ungleichung $\mathbf{z}^\mathsf{T}A\mathbf{x} < 0$, d. h. $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{\mathbf{z},0}^<$.

„⇐“: Geht man umgekehrt von dieser Mengeninklusion $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{\mathbf{z},0}^<$ aus, so ist $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j \leq 0$ für alle $j \in I_n$ und $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_k < 0$ für mindestens ein $k \in I_n$ zu folgern: Aus der Annahme $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_m > 0$ für ein $m \in I_n$ ergibt sich für ein $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m,\ldots,x_n)^\mathsf{T} > \mathbf{o}$ mit

$$x_m = 1,\ \ 0 < x_j \leq \delta\ (j \neq m)$$

wegen $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j x_j \geq -\,|\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j| x_j \geq -\,|\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j|\delta\ (j \neq m)$ die Ungleichung

$$0 > \mathbf{z}^\mathsf{T}A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j x_j = \mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_m \cdot 1 + \sum_{j \neq m} \mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j x_j$$

$$\geq \mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_m - \delta \sum_{j \neq m} \left|\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j\right|.$$

Bei hinreichend kleiner Wahl von δ kann eine positive rechte Seite der Ungleichung und somit ein Widerspruch erreicht werden. Daher ist zunächst $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j \leq 0$ für alle $j \in I_n$ gezeigt. Darüber hinaus kann dabei der Fall $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_j = 0$ für alle $j \in I_n$ bzw. $\mathbf{z}^\mathsf{T}A = \mathbf{o}^\mathsf{T}$ nicht eintreten, da dann $\mathbf{z}^\mathsf{T}A\mathbf{x} = 0$ insbesondere auch für die $\mathbf{x} > \mathbf{o}$ wäre und somit $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{\mathbf{z},0}$ folgen würde, im Widerspruch zur Voraussetzung $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{\mathbf{z},0}^<$. Somit existiert mindestens ein Index $k \in I_n$ mit $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{a}_k < 0$. Insgesamt ist damit die Vektorungleichung $\mathbf{z}^\mathsf{T}A \lneq \mathbf{o}^\mathsf{T}$ gezeigt.

Analog lässt sich für die geometrische Interpretation des Falles (1“α) zeigen, dass die Vektorungleichung $\mathbf{z}^\mathsf{T}A \leq \mathbf{o}^\mathsf{T}$ gleichbedeutend mit der Inklusion $A(\mathbb{R}_+^n) \subseteq H_{\mathbf{z},0}^\leq$ ist. □

8.3 Beurteilungskurve eines Entscheiders

Es soll nun präzisiert werden, was unter *verschiedenen* Beurteilungskurven zu verstehen ist, die zur Beschreibung der Zielsetzung des Entscheiders im Sinne einer standardisierten Festlegung der Zeitpräferenz (Gerke und Steiner (1995), S. 984) verwendet werden. Eine ausführliche Behandlung des allgemeineren Begriffs Kurve (Weg) findet man in Analysis-Büchern wie zum Beispiel Köhler (2006), S. 313–317, Deiser (2014), S. 248f, Erwe, Bd. 1 (1967), S. 276ff, und Grauert und Fischer, Bd. 2 (1968), S. 5ff.

8.3.1 Definition einer Kurve

Eine Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist eine stetige Abbildung

$$\mathbf{W} : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

eines Intervalls $J \subset \mathbb{R}$ in den $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Menge aller auf einem festen Intervall J definierten und stetigen $\mathbb{R}^{n+1}$-wertigen Abbildungen $\mathbf{W}$ wird hier mit $C(J,\mathbb{R}^{n+1})$ und die Menge aller auf einem beliebigen Intervall J stetigen $\mathbb{R}^{n+1}$-wertigen Abbildungen $\mathbf{W}$ mit C^0 bezeichnet:

$$C^0 := \{\mathbf{W} \in C(J,\mathbb{R}^{n+1}) : J \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall}\}.$$

Zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W} : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{W}^* : J^* \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $J, J^* \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, heißen äquivalent, wenn es eine Parametertransformation als streng monoton steigende, surjektive und stetige Funktion

$$g : J^* \longrightarrow J$$

gibt, so dass $\mathbf{W}^*$ die Zusammensetzung $\mathbf{W} \circ g$ der Funktionen g und $\mathbf{W}$ ist:

$$\mathbf{W}^*(\mu^*) = \mathbf{W}(g(\mu^*)) \text{ für jedes } \mu^* \in J^*.$$

Mit der injektiven (bzw. streng monotonen) stetigen Funktion $g(\mu^*)$ ist nach einem Satz der Analysis auch die Umkehrfunktion $g^{-1}(\mu)$ stetig. Damit ist die Abbildung $g(\mu^*)$ ein Homöomorphismus (eine topologische Abbildung).

Einen Beweis dafür, dass eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist, findet man beispielsweise bei Erwe, Bd. 1 (1967), S. 116f (Satz 11), und Grauert und Lieb, Bd. 1 (1967), S.107. Einen Beweis für die Stetigkeit der Umkehrfunktion findet man beispielsweise bei Hildebrandt (2006), Bd. 1, S. 147, 153, und zwar auf Seite 147 für eine stetige injektive Funktion $f : K \to \mathbb{R}^n$ auf einer kompakten (abgeschlossenen und beschränkten) Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^m$ und damit insbesondere für ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $K = [c,d] \subseteq \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, und auf Seite 153 für eine stetige injektive Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem beliebigen (uneigentlichen, unendlichen, unbeschränkten oder eigentlichen, endlichen, beschränkten und dabei noch offenen, halboffenen oder abgeschlossenen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Den Satz von der Stetigkeit der Umkehrfunktion f^{-1} für eine streng monotone Funktion f auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ (ohne die Stetigkeit von f) findet man bei Deiser (2013), S. 193f.

Definiert man P als die Menge dieser Parametertransformationen $g : J^* \longrightarrow J$, wobei $J^*, J \subseteq \mathbb{R}$ beliebige Intervalle sind, so werden zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}^* \in C^0$ präziser genau dann als P-äquivalent bezeichnet,

$$\mathbf{W}^* \sim_P \mathbf{W},$$

wenn es eine Parametertransformation $g \in P$ gibt, mit der $\mathbf{W}^*$ die Zusammensetzung der Funktionen g und $\mathbf{W}$ ist:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W} \circ g.$$

Die Relation $\sim_P$ auf der Menge C^0 der Parameterdarstellungen der Kurven im $\mathbb{R}^{n+1}$, die eine Teilmenge $\sim_P$ des Mengenprodukts $C^0 \times C^0$ ist, stellt tatsächlich eine Äquivalenzrelation dar, also eine zweistellige Relation mit den Eigenschaften der Reflexivität, der Transitivität und der Symmetrie. Neben dieser P-Äquivalenzrelation $\sim_P$ wird in Abschnitt 8.3.6 speziell für die Parameterdarstellungen von Beurteilungskurven $\mathbf{W} \in B(L)$ (mit eindeutiger Duplizierung und Replizierung) noch eine weitere Äquivalenzrelation definiert, nämlich die L-Äquivalenzrelation $\sim_L$, welche diejenigen Beurteilungskurven identifiziert, welche die gleiche D- oder R-Präferenzordnung liefern.

Eine Kurve (ein Weg) W wird als eine P-Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen $\mathbf{W} : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definiert. Da sich die zugelassenen Parametertransformationen g auf streng monoton *steigende* stetige Funktionen beschränken, ist für die Kurve auch ein Durchlaufsinn (eine **Orientierung**) festgelegt. Die **Spur** (Trägermenge) der Kurve ist durch die Bildmenge $\mathbf{W}(J)$ einer seiner Parameterdarstellungen gegeben und unabhängig von der speziellen Parameterdarstellung:

$$\mathbf{W}^*(J^*) = \mathbf{W}(g(J^*)) = \mathbf{W}(J).$$

8.3.2 Festlegung eines festen Definitionsintervalls für die Parameterdarstellungen einer Kurve

Im Hinblick auf den Definitionsbereich $J =]a,b[$, $- \infty \leq a < b \leq + \infty$, einer Beurteilungskurve werden jetzt nur noch offene Intervalle J als Definitionsbereich der Parameterdarstellung betrachtet. Es wird jetzt begründet, dass ohne Einschränkung der Allgemeinheit für alle Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ einer Kurve als Definitionsbereich das gleiche Intervall J verwendet werden kann. Zu einer auf J^* definierten Parameterdarstellung $\mathbf{W}^*(\mu^*)$ kann nämlich stets auch eine auf J definierte Parameterdarstellung $\mathbf{W}^{**}(\mu)$ angegeben werden, die zu $\mathbf{W}^*(\mu^*)$ P-äquivalent ist und somit die gleiche Kurve als P-Äquivalenzklasse repräsentiert.

Beweis: Zur Begründung wird eine Parametertransformation $f : J \longrightarrow J^*$ mit $f \in P$ und dazu die auf J definierte Parameterdarstellung

$$\mathbf{W}^{**}(\mu) := \mathbf{W}^*(f(\mu)),\ \mu \in J,$$

angegeben. O. E. kann für das Intervall $J =]a,b[$ die Eigenschaft $0 \in J$ angenommen werden, da dies stets durch eine Transformation $t(\mu) = \mu - c$, $c \in J$ fest fixiert, erreicht werden kann und $t(\mu)$ eine in P gelegene Parametertransformation ist. Im Falle $a, b \in \mathbb{R}$ kann man das Intervall $J =]a,b[$ auf das Hilfsintervall $I :=]-1,1[$ abbilden durch die lineare Transformation

$$h(\mu) = - \mu/a \qquad \text{für } \mu \in]a,0[,$$
$$h(\mu) = \mu/b \qquad \text{für } \mu \in [0,b[.$$

Bei $a = - \infty$ wählt man im Teilintervall $]-\infty,0[$ die gebrochen lineare Transformation

$$h(\mu) = \mu/(1 - \mu)$$

und bei $b = + \infty$ im Teilintervall $[0,+\infty[$ die gebrochen lineare Transformation

$$h(\mu) = \mu/(1 + \mu).$$

In allen möglichen Fällen für a und b, $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$, gehört die Funktion $h : J \longrightarrow I$ zur Menge P der oben beschriebenen Parametertransformationen. Analog lässt sich das Intervall $J^* =]a^*,b^*[$ abbilden auf I mit einer Parametertransformation $h^* \in P$ und dann auch das Intervall J auf J^* durch die zusammengesetzte Parametertransformation

$$f := h^{*-1} \circ h \in P.$$

Statt der auf J^* definierten Parameterdarstellung $\mathbf{W}^*(\mu^*)$ kann man also stets auch eine auf dem Intervall J definierte Parameterdarstellung $\mathbf{W}^{**}(\mu)$ verwenden, welche die gleiche Kurve repräsentiert. □

8.3.3 Definition einer Beurteilungskurve als Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen

In den Kapiteln 4 und 5 wird bei den Konzepten der Duplizierung (Nachbildung, Synthetisierung, additiven Zerlegung) und der Replizierung (Glattstellung, additiven Ergänzung) zur Konstruktion einer $(n+1)$-dimensionalen Präferenzfunktion (Beurteilungsfunktion) und einer Präferenzordnung auf dem Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ die Zielsetzung des Entscheiders durch eine eindimensionale geordnete Mannigfaltigkeit beschrieben. Diese sogenannte **Beurteilungskurve** (Bewertungskurve, Zielsetzungskurve, Präferenzkurve) präzisiert, wie der Entscheider in Abhängigkeit von einem reellen Parameter $\mu \in J$ die bei der Duplizierung bzw. Replizierung des Zahlungsstroms auftretende Marge (Spanne, Differenz) als Margenzahlungsstrom (Differenzzahlungsstrom) $\mathbf{W}(\mu)$ in $n+1$ Komponenten $W_j(\mu)$ auf die Zahlungszeitpunkte $j = 0,1,\ldots,n$ verteilen will. Es handelt sich hier um eine zeitdiskrete deterministische

Beurteilungskurve, da die Indizes j der Zahlungen $W_j(\mu)$ die diskrete Zeitparametermenge $I = \{0,1,\ldots,n\}$ durchlaufen und die Zahlungen $W_j(\mu)$ deterministisch (sicher, zufallsunabhängig) sind. Eine grafische Darstellung einer derartigen Beurteilungskurve wird in Abbildung 8.6 gegeben. Definiert wird diese Beurteilungskurve W als eine P-Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen

$$\mathbf{W} : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$J =]a,b[\subseteq \mathbb{R} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}, a < 0 < b,$$
$$\mathbf{W}(\mu) \text{ stetig und}$$
$$\mathbf{W}(\mu) \text{ streng monoton steigend}$$

bezüglich der strengen Halbordnung $\dot{>}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^{n+1}$. Jede derartige inhomogene Parameterdarstellung $\mathbf{W}(\mu)$ lässt sich wegen $0 \in J$ darstellen als Summe

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$$

des festen Beurteilungskurvenpunkts $\mathbf{U} := \mathbf{W}(0)$ und der sogenannten zugehörigen homogenen Parameterdarstellung

$$\mathbf{V}(\mu) := \mathbf{W}(\mu) - \mathbf{U},$$

die durch den Nullpunkt $\mathbf{O}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ verläuft,

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{O},$$

und ebenfalls bezüglich $\dot{>}$ streng monoton steigend ist. Alle Kurvenpunkte $\mathbf{V}(\mu)$ der homogenen Beurteilungskurve sind daher auch beurteilbar, d. h. direkt mit $\mathbf{O}$ vergleichbar:

$$\mathbf{V}(\mu) \dot{<} \mathbf{O} \text{ für } \mu < 0, \mathbf{V}(0) = \mathbf{O},\ \mathbf{V}(\mu) \dot{>} \mathbf{O} \text{ für } \mu > 0.$$

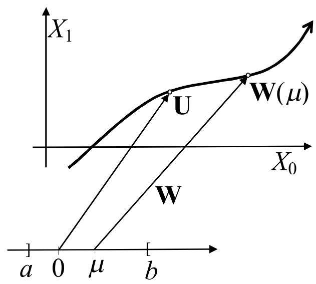


Abb. 8.6 Grafische Darstellung einer Beurteilungskurve $\mathbf{W} : \mu \in J \mapsto \mathbf{W}(\mu) \in \mathbb{R}^2$

Die Beurteilungskurve präzisiert die Zielsetzung des Entscheiders, nämlich wie dieser in streng monoton steigender Abhängigkeit von einem reellen Parameter $\mu \in J$ die bei der Duplizierung bzw. Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auftretende Marge (Spanne, Differenz) als Margenzahlungsstrom (Differenzzahlungsstrom, Beurteilungszahlungsstrom) $\mathbf{W}(\mu)$ in n+1 Komponenten $W_j(\mu)$ auf die Zahlungszeitpunkte $j = 0,1,\ldots,n$ verteilen will.

Da die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ einer inhomogenen Beurteilungskurve W streng monoton steigend sind, hat jede inhomogene Beurteilungskurve die gleiche Orientierung. Über die Orientierung hinausgehend ist die Spur $\mathbf{W}(J)$ einer Beurteilungskurve W mit der **totalen Ordnung**(srelation) $\geq$ versehen, die man durch die Einschränkung der natürlichen Halbordnung $\geq$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ auf die Spur $\mathbf{W}(J)$ erhält. Mit der zur Ordnung $\geq$ auf $\mathbf{W}(J)$ gehörigen Äquivalenzrelation, die mit der Gleichheitsrelation übereinstimmt, und der zugehörigen strengen Halbordnung $\gtrdot$ gilt auch auf der Menge $\mathbf{W}(J)$ das Trichotomiegesetz (Dreiteilung der Ordnung in drei Relationen): Für beliebige Punkte $\mathbf{W}(\mu)$, $\mathbf{W}(\mu') \in \mathbf{W}(J)$ gilt genau eine der drei Relationen

$$\mathbf{W}(\mu) \gtrdot \mathbf{W}(\mu'),\ \ \mathbf{W}(\mu) = \mathbf{W}(\mu'),\ \ \mathbf{W}(\mu') \gtrdot \mathbf{W}(\mu).$$

Für die nachfolgende Charakterisierung der als Äquivalenzklasse definierten Beurteilungskurve werden weitere Eigenschaften der homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ noch nicht verwendet. Dagegen wird für den Nachweis der Existenz einer eindeutigen Duplizierung bzw. Replizierung auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ für den vollkommenen Kapitalmarkt in den Abschnitten 4.1.5 und 4.2 und für den unvollkommenen Kapitalmarkt in Abschnitt 5.1.8 noch gefordert, dass die inhomogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ bzw. die homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ an beiden Intervallgrenzen a und b von J unbeschränkt ist:

$$\|\mathbf{W}(\mu)\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow a, \qquad \|\mathbf{W}(\mu)\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b,$$

$$\|\mathbf{V}(\mu)\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow a, \qquad \|\mathbf{V}(\mu)\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b.$$

Diese Unbeschränktheit von $\mathbf{V}(\mu)$ an den Intervallgrenzen ist gleichbedeutend zur Existenz von Indizes $p, m \in \{0,1,\ldots,n\}$ mit

$$V_p(\mu) \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b \text{ und}$$
$$V_m(\mu) \longrightarrow -\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow a$$

und somit zur Unbeschränktheit der mit einem strikt positiven Vektor $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gebildeten reellwertigen Funktion

$$\alpha(\mu) := \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu) = \sum_{j=0}^{n} d_j V_j(\mu)$$

an den Intervallgrenzen a und b:

$$\alpha(\mu) \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b,$$
$$\alpha(\mu) \longrightarrow -\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow a.$$

Die Bijektivität und strenge Monotonie der Funktion $\alpha(\mu)$ wird in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 zum Nachweis der Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung für jeden beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und jede beliebige Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ verwendet. Weiter kommt diese Eigenschaft in Abschnitt 8.3.5 beim Beweis der Übereinstimmung der D- bzw. R-Präferenzordnungen für L-äquivalente Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ zur Anwendung.

8.3.4 Charakterisierung einer Beurteilungskurve durch ihre Spur

Es wird nun die Vielfalt der *Beurteilungs*kurven, also die Vielfalt der P-Äquivalenzklassen der Parameterdarstellungen von Beurteilungskurven, näher beschrieben. Dazu wird gezeigt, dass zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}: J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ und

$\mathbf{W}^* : J^* \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ von Beurteilungskurven genau dann die gleiche Kurve liefern, wenn ihre **Spuren gleich** sind:

$$\mathbf{W}^* \sim_P \mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{W}^*(J^*) = \mathbf{W}(J).$$

Oben wurde bereits für die P-äquivalenten Parameterdarstellungen einer beliebigen Kurve gezeigt, dass ihre Spuren übereinstimmen. Es ist also nur noch zu zeigen, dass es zu zwei Parameterdarstellungen

$$\mathbf{W} : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\mathbf{W}^* : J^* \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

von Beurteilungskurven mit der gleichen Spur

$$\mathbf{W}^*(J^*) = \mathbf{W}(J)$$

eine Parametertransformation $g : J^* \longrightarrow J$ mit den oben angegebenen Eigenschaften gibt und somit die Parameterdarstellungen zur gleichen Äquivalenzklasse gehören, also die gleiche Kurve repräsentieren.

Definiert man ausgehend von den bijektiven Funktionen $\mathbf{W} : J \longrightarrow \mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{W}^* : J^* \longrightarrow \mathbf{W}^*(J^*)$ mit $\mathbf{W}^*(J^*) = \mathbf{W}(J)$ die Funktion $g : J^* \longrightarrow J$ durch

$$g(\mu^*) := \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^*(\mu^*)) = \mathbf{W}^{-1} \circ \mathbf{W}^*(\mu^*) \quad \text{für } \mu^* \in J^*,$$

so ist g als Zusammensetzung der bijektiven Funktionen $\mathbf{W}^* : J^* \longrightarrow \mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{W}^{-1} : \mathbf{W}(J) \longrightarrow J$ ebenfalls bijektiv und es gilt

$$\mathbf{W}(g(\mu^*)) = \mathbf{W}^*(\mu^*).$$

Da die Funktionen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ auf J bzw. J^* streng monoton steigend sind, ist auch die Umkehrfunktion $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{X})$ auf der Spur $\mathbf{W}(J) = \mathbf{W}^*(J)$ streng monoton steigend und die zusammengesetzte Funktion $g(\mu^*) = \mathbf{W}^{-1} \circ \mathbf{W}^*(\mu^*)$ auf dem Intervall J^* streng monoton steigend. Falls noch gesichert ist (Beweis folgt unten), dass die Umkehrfunktion $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{X})$ auf der Spur $\mathbf{W}(J)$ stetig ist, so ist auch die Funktion $g(\mu^*)$ als eine Zusammensetzung von stetigen Funktionen stetig und damit eine im oben angegebenen Sinne zulässige Parametertransformation. Eine weitere Begründung für die Stetigkeit von g kann mit dem Satz von der Stetigkeit der Umkehrfunktion zu einer streng monotonen Funktion auf einem Intervall (Deiser 2013, S. 193f) erfolgen: Es ist nämlich auch $g^{-1}(\mu) = \mathbf{W}^{*-1} \circ \mathbf{W}(\mu)$ streng monoton steigend auf dem Intervall J, sodass nach diesem Satz die zugehörige Umkehrfunktion $g = (g^{-1})^{-1}$ auf $J^* = g^{-1}(J)$ stetig ist. Insgesamt ist dann gezeigt, dass die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ die gleiche Beurteilungskurve W als P-Äquivalenzklasse repräsentieren. Zwei Parameterdarstellungen von Beurteilungskurven liefern also genau dann die gleiche Kurve, wenn ihre Spuren gleich sind.

Beweis für die Stetigkeit der Umkehrfunktion $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{X})$ von $\mathbf{W}(\mu)$: Im Allgemeinen ist für eine bijektive stetige Abbildung $f : R \longrightarrow S$ eines topologischen Raumes R in den topologischen Raum S nicht auch noch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig (Franz (1968), Bd. I, 34f.). Für die hier betrachtete streng monoton steigende stetige Parameterdarstellung

$$\mathbf{W} : J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

einer Beurteilungskurve kann jedoch die Stetigkeit der Umkehrfunktion

$$\mathbf{W}^{-1} : \mathbf{W}(J) \longrightarrow J$$

aus dem bei Hildebrandt, Band 1 (2006), S. 147, angegebenen und insbesondere für ein kompaktes Intervall $K = [c,d] \subseteq \mathbb{R}$ gültigen Satz der Analysis gefolgert werden: Zu jedem Punkt $\mathbf{W}(\mu_0) \in \mathbf{W}(J)$

gibt es nämlich ein kompaktes Intervall $K = [c,d]$, $a < c < \mu_0 < d < b$, auf dem $\mathbf{W}(\mu)$ stetig und injektiv ist, so dass nach diesem Satz die Stetigkeit der Umkehrfunktion $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{X})$ in $\mathbf{W}(\mu_0) \in \mathbf{W}(K)$ folgt. □

Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung bezüglich der Beurteilungskurve als Äquivalenzklasse

Als Folgerung der Charakterisierung einer Beurteilungskurve durch ihre Spur erhält man eine Aussage zur Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung der Zahlungsströme des $\mathbb{R}^{n+1}$ für eine als P-Äquivalenzklasse gegebene Beurteilungskurve W:

Ist für ein fest vorgegebenes Supplementsystem $L \subseteq K$ des unvollkommenen Kapitalmarkts die Existenz und Einzigkeit der in Abschnitt 5.1.7 betrachteten Duplizierung bzw. Replizierung für alle beliebigen Parameterdarstellungen $\mathbf{W}: J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ der inhomogenen Beurteilungskurve W gesichert ($\mathbf{W} \in B(L)$ gemäß Abschnitt 8.3.5), so tritt auch für verschiedene Repräsentanten $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}^*$ der Beurteilungskurve W bei der Duplizierung bzw. Replizierung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ derselbe Beurteilungskurvenpunkt

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J) = \mathbf{W}^*(J^*) \text{ bzw.}$$
$$\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J) = \mathbf{W}^*(J^*)$$

und dasselbe Supplement

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{X})) = \mathbf{S}^*(\mathbf{X}) \text{ bzw.}$$
$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\nu(\mathbf{X})) - \mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{W}^*(\nu^*(\mathbf{X})) - \mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{S}'^*(\mathbf{X})$$

auf: Verschiedene D-Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}^*(J) = \mathbf{W}(J)$ der Kurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu)$ liefern nämlich für $\mathbf{X}$ auch verschiedene D-Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ und $\mathbf{W}(\mu'(\mathbf{X})) = \mathbf{W}^*(\mu^*(\mathbf{X}))$ auf der Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ und damit verschiedene Duplizierungen von $\mathbf{X}$ bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$, im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Duplizierung von $\mathbf{X}$. Analoges gilt für die Replizierung. Ist die inhomogene Beurteilungskurve W nur als P-Äquivalenzklasse bzw. durch ihre Spur vorgegeben und dazu keine Parameterdarstellung $\mathbf{W}(\mu)$ festgelegt, so ist zum Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ bei der Duplizierung bzw. der Replizierung also jeweils ein Supplement in der zulässigen Supplementmenge und ein Beurteilungskurvenpunkt auf der Spur der Kurve W, aber nicht der Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ und der Beurteilungsvektor $\mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) - \mathbf{U}$ bestimmt. Wie durch das folgende Beispiel illustriert wird, hängen diese Größen von der speziell verwendeten Parameterdarstellung $\mathbf{W}(\nu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\nu)$ und insbesondere von der durch den Bezugspunkt $\mathbf{U}$ gegebenen Nulllinie ab.

Beispiel 8.3.1 Abhängigkeit der Beurteilungsparameter und der Beurteilungsvektoren von der verwendeten Parameterdarstellung der Beurteilungskurve

Für die Laufzeit $n = 1$ ergeben sich durch die Festlegung

$$\mathbf{U}' = \mathbf{O} = (0,0)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{V}'(\nu') = \nu'\cdot(1,1)^{\mathsf{T}},$$
$$\mathbf{U}'' = (1,1)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{V}''(\nu'') = \nu''\cdot(2,2)^{\mathsf{T}},$$

ν', $\nu'' \in J = \mathbb{R}$, zwei P-äquivalente Parameterdarstellungen $\mathbf{W}'(\nu')$ und $\mathbf{W}''(\nu'')$ mit der Parametertransformation

$$\nu' = g(\nu'') = 1 + 2\cdot\nu''.$$

Bei einem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ erhält man für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (1,1)^{\mathsf{T}} \in \mathbf{W}'(\mathbb{R}) = \mathbf{W}''(\mathbb{R})$$

sowohl bei der Replizierung als auch bei der Duplizierung (unabhängig vom Supplementsystem L) die verschiedenen Beurteilungsparameter

$$v'(\mathbf{X}) = 1 \text{ und } v''(\mathbf{X}) = 0$$

und die verschiedene Beurteilungsvektoren

$$\mathbf{V}'(v'(\mathbf{X})) = (1,1)^{\mathsf{T}} \text{ und } \mathbf{V}''(v''(\mathbf{X})) = \mathbf{O}.$$ △

8.3.5 *L*-Äquivalenz von Beurteilungskurven

In Abschnitt 5.3 wird die Vielfalt der Präferenzordnungen untersucht, die mit dem Konzept der Duplizierung bzw. der Replizierung bei fest vorgegebenem Supplementsystem L (Definition siehe Abschnitte 5.1.3 bis 5.1.7) des unvollkommenen Kapitalmarkts K durch unterschiedliche Beurteilungskurven des Entscheiders erzeugt wird. Vorausgesetzt wird dabei, dass zum fest vorgegebenen Supplementsystem L für die betrachteten Beurteilungskurven $\mathbf{W} \in B = B(L)$ die eindeutige Duplizierung und Replizierung auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ gesichert ist:

$$B(L) = \{\mathbf{W} \in C(J,\mathbb{R}^{n+1}) : \mathbf{W} \text{ ist Beurteilungskurve mit eindeutiger Duplizierung und eindeutiger Replizierung auf } \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Es wird nach einer Relation $\sim_L$, der L-Äquivalenz, für diejenigen Beurteilungskurven $\mathbf{W} \in B(L)$ gesucht, welche die gleiche D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ bzw. die gleiche R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ liefern.

Auf der Suche nach einer derartigen L-Äquivalenz wird nun zuerst nach einer notwendigen Bedingung dafür gesucht, dass zu einem fest vorgegebenen Supplementsystem $L \subseteq K$ für zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven die beiden (mittels Duplizierung gewonnenen) D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$ übereinstimmen. Aus der Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen folgt notwendig auch die Übereinstimmung der zugehörigen D-Indifferenzrelationen $\simeq_{\mathrm{D}W}$ und $\simeq_{\mathrm{D}W'}$ für Zahlungsströme in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\simeq_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \cap \trianglelefteq_{\mathrm{D}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{D}W'} \cap \trianglelefteq_{\mathrm{D}W'} = \simeq_{\mathrm{D}W'} \; (\subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}).$$

Letztere Bedingung ist gleichbedeutend mit der Übereinstimmung der zu $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ gehörigen D-Indifferenzklassen in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W'}(\mathbf{Y}) \; (\subseteq \mathbb{R}^{n+1}) \text{ für jedes } \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Diese Bedingung wird nun speziell für jeden beliebigen Kurvenpunkt $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ $(\subseteq \mathbb{R}^{n+1})$ noch näher untersucht. Für $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ hat man bezüglich der Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ die Duplizierungen

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{O} + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{O} \in C_{M^n},$$

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n}.$$

Zur geometrischen Veranschaulichung der Lage der Kurvenpunkte $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{Y}^{0\prime} := \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)) \in \mathbf{W}'(J)$ kann man die Abbildung 5.8 in Abschnitt 5.3 heranziehen.

Zur Bezeichnungsweise für das Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{Y})$ ist anzumerken, dass hier bei der Duplizierung von $\mathbf{Y}$ mit zwei auftretenden Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ das

Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{Y})$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ und das Supplement $\mathbf{S}'(\mathbf{Y})$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ gehört. In den Abschnitten 5.1.5 bis 5.4.3 dagegen wurde die Bezeichnung $\mathbf{S}(\mathbf{Y})$ für das Supplement bei der Duplizierung mittels $\mathbf{W}(\mu)$ und die Bezeichnung $\mathbf{S}'(\mathbf{Y})$ für das Supplement bei der Replizierung mittels $\mathbf{W}(\mu)$ benutzt. Weiter unten treten dann noch die Supplemente $\mathbf{S}^*(\mathbf{Y})$ und $\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y})$ auf, die bei der speziellen Replizierung mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ bzw. zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ gehören.

Mit der in Abschnitt 5.2.2 hergeleiteten Darstellung der D-Indifferenzklasse und mit der Abkürzung $\mathbf{Y}^{0\prime} := \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)) \in \mathbf{W}'(J)$ erhält man für die zu den Beurteilungskurven $\mathbf{W}'(\mu)$ und $\mathbf{W}(\mu)$ gebildeten Indifferenzklassen von $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ die Minkowski-Summen bzw. affinen Kegel

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W'}(\mathbf{Y}^0) &= \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)) + C_{M^n} \\
&= \mathbf{Y}^{0\prime} + C_{M^n} \\
\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}^0) &= \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)) + C_{M^n} && (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)) \\
&= \mathbf{Y}^0 + C_{M^n} && (\text{Dupl. von } \mathbf{Y}^0 \text{ mittels } \mathbf{W}'(\mu)) \\
&= \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{Y}^{0\prime} + C_{M^n}\,,
\end{aligned}$$

und somit für die Übereinstimmung der beiden D-Indifferenzklassen des Kurvenpunkts $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ die Mengengleichung

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{Y}^{0\prime} + C_{M^n} = \mathbf{Y}^{0\prime} + C_{M^n}\,.$$

Zu beachten ist, dass bei dieser Darstellung der Indifferenzklassen als affine Kegel keine zusätzliche Voraussetzung zur Sicherung der Monotonie der Präferenzordnungen wie bei der entsprechenden Darstellung der Bessermengen benötigt wird.
Nach der Addition von $-\mathbf{Y}^{0\prime}$ auf beiden Seiten der Mengengleichung ergibt sich die für die Übereinstimmung der D-Indifferenzrelationen **notwendige Mengengleichung**

(LDÄ) $\quad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n}$ für jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$.

Dies bedeutet, dass die zulässige Supplementmenge C_{M^n} abgeschlossen ist bezüglich der Addition des bei der Duplizierung von $\mathbf{Y}^0$ mittels $\mathbf{W}'(\mu)$ erhaltenen Supplements $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0)$. Die Translationen

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto t_{\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0)}(\mathbf{X}) := \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0)$$

mit den Verschiebungsvektoren $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0)$ ($\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$) sind bijektive affine Abbildungen des $\mathbb{R}^{n+1}$ und bilden bei Vorliegen der Eigenschaft (LDÄ) jeweils den gesamten Transformationskegel C_{M^n} bijektiv auf sich ab:

$$t_{\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0)}(C_{M^n}) = C_{M^n}\,.$$

Als weitere Folgerung erhält man aus der Bedingung (LDÄ) nach der Subtraktion von $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0)$ auf beiden Seiten die Mengengleichung

$$C_{M^n} = -\,\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n}\,,$$

daraus wegen $\mathbf{O} \in C_{M^n}$ die Beziehung

$$- \mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0) = - \mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{O} \in - \mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n}$$

bzw.

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0) \in -C_{M^n}$$

und insgesamt unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts K die weitere notwendige Bedingung für die Übereinstimmung der D-Indifferenzrelationen:

(LDÄ1) $\quad \mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) = R_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0} \;\; \forall\, \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$.

Die hier verwendete Inklusion $R_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ mit einem positiven Normalenvektor $\mathbf{P}$ der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ wird schon zu Beginn von Abschnitt 5.3 begründet: Auf Grund der Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts K ($K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) und damit auch des Linienraums $V = K \cap (-K)$ von K ($V \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) gibt es nämlich nach dem Satz 8.2.3 b) (Alternativsatz) einen positiven Vektor $\mathbf{P} \in V^{\perp}$, sodass mit diesem die Inklusion $V \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ gilt. Wegen $R_{M^n} \subseteq V$ gilt dann auch $R_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$. Bei gegebener Bedingung (LDÄ) und Arbitragefreiheit liegen also alle die Kurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}’(\mu)$ verbindenden Supplemente $\mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0)$ im Linienkegel R_{M^n} der zulässigen Supplemente und damit auch in der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$. Diese Folgerung (LDÄ1) ist ein wichtiges Hilfsmittel bei dem unten folgenden Beweis, in dem gezeigt wird, dass die Bedingung (LDÄ) auch hinreichend für die Übereinstimmung der beiden D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W‘}$ ist.

Definition der *L*D-Äquivalenz

Die Eigenschaft (LDÄ) für die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}, \mathbf{W}’ \in B(L)$ und die Kurvenpunkte $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ kann in formaler Schreibweise auch als binäre Relation $\sim_{L\mathrm{D}}$ für die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}’(\mu)$ erfasst werden:

$$\mathbf{W} \sim_{L\mathrm{D}} \mathbf{W}‘ :\Leftrightarrow \text{(LDÄ)}.$$

Wenn $B = B(L)$ die Menge aller auf einem festen Intervall $J =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ gemäß Abschnitt 8.3.3 definierten Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ von Beurteilungskurven ist, für welche die eindeutige Duplizierung und eindeutige Replizierung auf $\mathbb{R}^{n+1}$ gesichert ist, so ist die Relation $\sim_{L\mathrm{D}}$ eine Teilmenge des Mengenprodukts $B \times B$:

$$\sim_{L\mathrm{D}} \subseteq B \times B.$$

Die Relation $\mathbf{W} \sim_{L\mathrm{D}} \mathbf{W}‘$ für die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}’(\mu)$ ist zunächst nur eine notwendige Bedingung für die Übereinstimmung der D-Indifferenzrelationen $\simeq_{\mathrm{D}W}$ und $\simeq_{\mathrm{D}W‘}$ bzw. für die Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W‘}$ in $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Es wird aber nachfolgend gezeigt, dass die Relation $\mathbf{W} \sim_{L\mathrm{D}} \mathbf{W}‘$ für die Beurteilungskurven **auch hinreichend für die Übereinstimmung** der D-Indifferenzrelationen $\simeq_{\mathrm{D}W}$ und $\simeq_{\mathrm{D}W‘}$ und unter der zusätzlichen Voraussetzung der Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts K auch noch hinreichend und somit charakteristisch für die Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W‘}$ ist. Da die Mengenidentität der

D-Indifferenzrelationen bzw. der D-Präferenzordnungen in $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ eine Äquivalenzrelation ist, ist dann auch die dazu gleichbedeutende Relation $\sim_{LD}$ in $B \times B$ eine Äquivalenzrelation, also eine reflexive, symmetrische und transitive Relation. Die durch das System (LDÄ) von Mengengleichungen in $\mathbb{R}^{n+1}$ beschriebene Relation $\sim_{LD}$ wird somit als *L*D-Äquivalenz für die Beurteilungskurven bezeichnet.

Definition 8.3.1 *L*D-Äquivalenz

1) Zwei Parameterdarstellungen

$$\mathbf{W}: \quad J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\mathbf{W}': \quad J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

von Beurteilungskurven (o.E. mit demselben Definitionsintervall *J*) mit eindeutiger Duplizierung und Replizierung in $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\mathbf{W}, \mathbf{W}' \in B(L)$) heißen ***L*D-äquivalent**,

$$\mathbf{W} \sim_{LD} \mathbf{W}',$$

wenn bei der Duplizierung der Kurvenpunkte $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ mittels der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ die Bedingung (LDÄ) erfüllt ist:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \text{für jedes } \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J).$$

2) Zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}, \mathbf{W}' \in B(L)$ heißen **trivial *L*D-äquivalent**, wenn das **S**'-Bild $\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J))$ der Spur $\mathbf{W}(J)$ von $\mathbf{W}(\mu)$ gleich dem Nullraum *O* ist:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) = O.$$

Es wird nachfolgend im Anschluss an den Beweis von Hilfssatz 8.3.2 noch gezeigt, dass diese triviale *L*D-Äquivalenz $\sim_{tLD}$ gleichbedeutend ist zur *P*-Äquivalenz der Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$,

$$\mathbf{W} \sim_P \mathbf{W}',$$

bzw. zur Spurengleichheit

$$\mathbf{W}(J) = \mathbf{W}'(J).$$

Die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ heißen **echt (nichttrivial) *L*D-äquivalent**, wenn sie *L*D-äquivalent und nicht trivial *L*D-äquivalent bzw. nicht *P*-äquivalent sind:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \forall\, \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J) \wedge \mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) \neq O.$$

3) Zwei Beurteilungskurven *W* und *W*', die als *P*-Äquivalenzklassen (bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_P$; siehe Abschnitt 8.3.1) von Parameterdarstellungen definiert sind, heißen *L*D-äquivalent

$$W \sim_{LD} W',$$

wenn es Repräsentanten $\mathbf{W} \in W$ und $\mathbf{W}' \in W'$ der *P*-Äquivalenzklassen gibt, die *L*D-äquivalent sind. Die Wohldefiniertheit dieses Begriffs, also die Unabhängigkeit der Definition von der Auswahl der Repräsentanten, wird nachfolgend noch gezeigt.

Anmerkung zur echten *L*D-Äquivalenz

Im Fall (LV) eines vollkommenen Supplementsystems $L = L_V$ stimmen nach Satz 5.2, 1) in Abschnitt 5.3.1 die D-Präferenzordnungen für alle Beurteilungskurven

$\mathbf{W}(\mu)$ überein. Wie nachfolgend gezeigt wird, bedeutet dies, dass alle Beurteilungskurven zueinander LD-äquivalent sind. Demzufolge sind in diesem Fall beliebige *verschiedene* Beurteilungskurven (mit verschiedenen Spuren) zueinander auch *echt* LD-äquivalent.
Für den Fall eines unvollkommenen Supplementsystems $L \neq L_V$ wird in Abschnitt 5.3.3 im Anschluss an Satz 5.5 begründet, dass die echte LD-Äquivalenz erst ab einer Laufzeit $n \geq 2$ auftritt. Für $n = 1$ und $L \neq L_V$ bietet nämlich der Raum $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^2$ nicht ausreichend Platz für das Auftreten eines nichttrivialen Linienkegels R_{M^n} und damit der echten LD-Äquivalenz ($O \neq \mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) \subseteq R_{M^n}$).

Charakterisierung der Übereinstimmung von D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und $\trianglerighteq_{DW'}$ mittels der LD-Äquivalenz $\sim_{LD}$

Es wird nun bewiesen, dass die Relation $\sim_{LD}$ für die Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ auch hinreichend für die Übereinstimmung der D-Indifferenzrelationen $\simeq_{DW}$ und $\simeq_{DW'}$ und unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts auch hinreichend für die Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und $\trianglerighteq_{DW'}$ ist. Anzumerken ist hier, dass bei dieser Charakterisierung der Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen durch die LD-Äquivalenz die Arbitragefreiheit (AF) von K also nur für die Beweisrichtung verwendet wird, bei der aus der LD-Äquivalenz auf die Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen geschlossen wird. Es gilt nun folgende Aussage:

Bei einem arbitragefreien Kapitalmarkt K und fest gewähltem Supplementsystem $L \subseteq K$ gilt für die Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ und die zugehörigen D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und $\trianglerighteq_{DW'}$:

$$\trianglerighteq_{DW} = \trianglerighteq_{DW'} \Leftrightarrow \mathbf{W} \sim_{LD} \mathbf{W}'.$$

Beweis für die Charakterisierung der Übereinstimmung von D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und $\trianglerighteq_{DW'}$ mittels der LD-Äquivalenz der verwendeten Beurteilungskurven, also durch die Gültigkeit der Bedingung (LDÄ). Da die Notwendigkeit der Bedingung bereits gezeigt wurde, ist nur noch zu beweisen, dass die Bedingung (LDÄ) auch hinreichend für die Übereinstimmung der zugehörigen D-Präferenzordnungen ist.

1) **Übereinstimmung der D-Indifferenzklassen**:
Dazu geht man von zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven aus, bei denen $\mathbf{W}(\mu)$ LD-äquivalent zu $\mathbf{W}'(\mu)$ ist und zeigt für ein beliebiges $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Übereinstimmung der D-Indifferenzklassen $\mathrm{Ind}_{DW}(\mathbf{Y})$ und $\mathrm{Ind}_{DW'}(\mathbf{Y})$. Mit der Duplizierung von $\mathbf{Y}$ mittels der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}) \in C_{M^n}, \qquad \mathbf{Y}^0 := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})),$$

und anschließender Duplizierung von $\mathbf{Y}^0$ mittels der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$,

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n}, \qquad \mathbf{Y}^{0\prime} := \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)),$$

erhält man unter Verwendung der Darstellung der Indifferenzklassen (nach Abschnitt 5.2.2) als affine Kegel und von (LDÄ) die Beziehung

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}) &= \mathrm{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}^0) && (\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) = \mathbf{Y}^0 = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)),\ \mathbf{Y} \simeq_{DW} \mathbf{Y}^0) \\
&= \mathbf{Y}^0 + C_{M^n} && (\text{Darst. von } \mathrm{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}^0)) \\
&= \mathbf{Y}^{0\prime} + \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} && (\text{Dupl. von } \mathbf{Y}^0 \text{ bzgl. } \mathbf{W}'(\mu))
\end{aligned}$$

$= \mathbf{Y}^{0‘} + C_{M^n}$ (LDÄ)

$= \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘})$ (Darst. von $\text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘})$),

also die Übereinstimmung der Indifferenzklassen

$$\text{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}) = \text{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}^0) = \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘}).$$

Weiter folgt aus der Inzidenz $\mathbf{Y} \in \text{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}) = \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘})$ die Relation $\mathbf{Y} \simeq_{DW‘} \mathbf{Y}^{0‘}$, die Übereinstimmung

$$\text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}) = \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘})$$

und somit die Übereinstimmung der Indifferenzklassen

$$\text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}) = \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘}) = \text{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}^0) = \text{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}).$$

Da $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig gewählt war, folgt die Übereinstimmung der Indifferenzrelationen $\simeq_{DW}$ und $\simeq_{DW‘}$.

Zur geometrischen Veranschaulichung der Lage der Kurvenpunkte $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$ kann man die Abbildung 5.8 in Abschnitt 5.3 heranziehen.

Als Folgerung aus der Übereinstimmung der oben aufgeführten Indifferenzklassen ist für den weiteren Beweisgang als wichtiges Ergebnis die Inzidenz

$$\mathbf{Y}, \mathbf{Y}^0 \in \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘})$$

und folglich die Relation

$$\mathbf{Y} \simeq_{DW‘} \mathbf{Y}^0$$

bzw. die entsprechende Gleichung für die Beurteilungspunkte der Zahlungsströme $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Y}^0$ festzuhalten:

$$\mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{Y}^0)) \text{ mit } \mathbf{Y}^0 := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})).$$

2) **Übereinstimmung der D-Bessermengen**:

Es wird nun für ein beliebiges $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Übereinstimmung der Bessermengen

$$W_{+D}(\mathbf{Y}) \;= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))\},$$
$$W‘_{+D}(\mathbf{Y}) \;= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}‘(\mu‘(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}‘(\mu‘(\mathbf{Y}))\}$$

bewiesen, welche gleichbedeutend zur Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und $\trianglerighteq_{DW‘}$ ist. Dazu ist für beliebige $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zu zeigen, dass die Ungleichung

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}))\}$$

gleichbedeutend zur Ungleichung

$$\mathbf{W}‘(\mu‘(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}‘(\mu‘(\mathbf{Y}))$$

ist. Wie oben schon für den Zahlungsstrom $\mathbf{Y}$ erhält man auch für $\mathbf{X}$ mittels zweier Duplizierungen die Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{X}^0 := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$, $\mathbf{X}^{0‘} := \mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{X}^0))$ und es gilt wegen der Übereinstimmung der oben aufgeführten Indifferenzklassen

$$\mathbf{X}, \mathbf{X}^0 \in \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{X}^{0‘}),$$
$$\mathbf{X} \simeq_{DW‘} \mathbf{X}^0,$$
$$\mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{X})) = \mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{X}^0)).$$

Damit erhält man für die Beurteilungskurvenpunkte die Vektorgleichung

$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) - \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \;= \mathbf{X}^0 - \mathbf{Y}^0$ (Dupl. von $\mathbf{X}^0$, $\mathbf{Y}^0$ mittels $\mathbf{W}’(\mu)$)

$= \mathbf{S}‘(\mathbf{X}^0) + \mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{X}^0)) - \mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0) - \mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{Y}^0))$ ($\mathbf{X} \simeq_{DW‘} \mathbf{X}^0$, $\mathbf{Y} \simeq_{DW‘} \mathbf{Y}^0$)

$= \mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{X})) - \mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{Y})) + \mathbf{S}‘(\mathbf{X}^0) - \mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0)$

Nun folgt ein wichtiger Beweisschritt, bei dem unter Voraussetzung der **Arbitragefreiheit** des Kapitalmarkts K mit Hilfe des positiven Normalenvektors $\mathbf{P}$ zum Linienraum V der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte die Übereinstimmung der Präferenzordnungen gezeigt wird. Auf Grund der Arbitragefreiheit des Linienraums V von K ($V \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) gibt es nämlich nach dem Alternativsatz 8.2.3 b) einen positiven Vektor $\mathbf{P} \in V^{\perp}$ mit $V \subseteq H_{\mathbf{P},0}$. Wegen der Voraussetzung von (LDÄ) und der daraus gefolgerten Bedingung (LDÄ1) gilt für die Supplemente von $\mathbf{X}^0$ und $\mathbf{Y}^0$:

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}^0), \mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0) \in R_{M^n} \subseteq V \subseteq H_{\mathbf{P},0}.$$

Nach Linksmultiplikation der Vektorgleichung der Beurteilungskurvenpunkte mit dem Normalenvektor $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ ergibt sich dann wegen

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}‘(\mathbf{X}^0) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}‘(\mathbf{Y}^0) = 0,$$
$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}(\mu) \;= \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}(\mu) \;= \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U} + \alpha(\mu),$$
$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}‘(\mu) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U}‘ + \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}‘(\mu) \;= \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{U}‘ + \alpha‘(\mu)$$

die reellwertige Gleichung

(*) $\alpha(\mu(\mathbf{X})) - \alpha(\mu(\mathbf{Y})) = \alpha'(\mu'(\mathbf{X})) - \alpha'(\mu'(\mathbf{Y}))$.

Mittels dieser Gleichung und der strengen Monotonie der Funktionen $\mathbf{W}(\mu)$, $\mathbf{W}'(\mu)$, $\alpha(\mu) := \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu)$, $\alpha'(\mu) := \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}'(\mu)$ ($\mathbf{P} > \mathbf{O}$) erhält man die Schlusskette

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y} &\Leftrightarrow \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \\ &\Leftrightarrow \mu(\mathbf{X}) \geq \mu(\mathbf{Y}) \\ &\Leftrightarrow \alpha(\mu(\mathbf{X})) \geq \alpha(\mu(\mathbf{Y})) && \text{(Verwendung von (*))} \\ &\Leftrightarrow \alpha'(\mu'(\mathbf{X})) \geq \alpha'(\mu'(\mathbf{Y})) \\ &\Leftrightarrow \mu'(\mathbf{X}) \geq \mu'(\mathbf{Y}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y})) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W'} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Damit ist für ist ein beliebiges $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Übereinstimmung der Bessermengen $W_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ und $W'_{+\mathrm{D}}(\mathbf{Y})$ und insgesamt die Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$ bewiesen. Die Bedingung (LDÄ) bzw. die Relation $\mathbf{W} \sim_{LD} \mathbf{W}'$ ist unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit also auch hinreichend und dann insgesamt charakteristisch für die Übereinstimmung der D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$.

Zum Überblick über den Beweis ist festzustellen, dass für die Übereinstimmung der Indifferenzklassen die Bedingung (LDÄ) der *L*D-Äquivalenz verwendet wurde und für die Übereinstimmung der Bessermengen neben der Übereinstimmung der Indifferenzklassen auch noch die Arbitragefreiheit von *K* und die Folgerung (LDÄ1) aus (LDÄ). □

Übereinstimmung der trivialen *L*D-Äquivalenz mit der *P*-Äquivalenz

Mit Ergebnissen der obigen Beweisführung erhält man noch den folgenden Hilfssatz, der feststellt, dass für *L*D-äquivalente Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ die Spuren $\mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{W}'(J)$ dieser Kurven mittels der Präferenzfunktionen $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W}$ und $\mathbf{w}_{\mathrm{D}W'}$ bijektiv einander zugeordnet sind und diese Zuordnungen streng monoton sind. Dieser Hilfssatz wird nachfolgend verwendet, um zu zeigen, dass aus der *P*-Äquivalenz auch die *L*D-Äquivalenz folgt bzw. genauer, dass die *P*-Äquivalenz identisch ist mit einer speziellen *L*D-Äquivalenz, nämlich der trivialen *L*D-Äquivalenz $\sim_{tLD}$. Zur präzisen Formulierung des Hilfssatzes betrachtet man zu den im Abschnitt 5.2.1 auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ definierten (n+1)-dimensionalen Präferenzfunktionen

$$\mathbf{w}_{\mathrm{D}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J),$$
$$\mathbf{w}_{\mathrm{D}W'} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}_{\mathrm{D}W'}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}'(J)$$

deren Einschränkungen auf die Spuren der Kurven:

$$\varphi := \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}|_{\mathbf{W}'(J)} : \mathbf{X} \in \mathbf{W}'(J) \mapsto \varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})),$$
$$\varphi' := \mathbf{w}_{\mathrm{D}W'}|_{\mathbf{W}(J)} : \mathbf{X} \in \mathbf{W}(J) \mapsto \varphi'(\mathbf{X}) = \mathbf{w}_{\mathrm{D}W'}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{X})).$$

Hilfssatz 8.3.2 Die Präferenzfunktionen als streng monoton steigende Bijektionen auf den Spuren von *L*D-äquivalenten Beurteilungskurven

Es liege ein Kapitalmarkt vor, bei dem die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Kapitalmarktgeschäfte ein konvexer linearer Kegel ist, der keine Arbitragegelegenheit enthält:

(AF) $K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$ (Arbitragefreiheit von *K*).

Für *L*D-äquivalente Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven,

$$\mathbf{W} \sim_{LD} \mathbf{W}‘,$$

liefern die Einschränkungen der Präferenzfunktionen $\mathbf{w}_{DW}$ und $\mathbf{w}_{DW'}$ auf die Spuren $\mathbf{W}‘(J)$ bzw. $\mathbf{W}(J)$ bijektive Funktionen (Bijektionen)

$$\varphi : \mathbf{W}‘(J) \longrightarrow \mathbf{W}(J) \text{ und}$$
$$\varphi‘ : \mathbf{W}(J) \longrightarrow \mathbf{W}‘(J),$$

bei denen die eine Funktion die Umkehrfunktion der anderen ist und die jeweils streng monoton steigend bezüglich der strengen Halbordnung $\underset{\cdot}{>}$ sind. Insbesondere gilt

$$\varphi‘(\mathbf{W}(J)) = \mathbf{W}‘(J) \text{ und } \varphi(\mathbf{W}‘(J)) = \mathbf{W}(J).$$

Beweis des Hilfssatzes:
Beweis der Bijektivität: Aus dem vorhergehenden Beweis ergibt sich auch, dass bei LD-äquivalenten Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}’(\mu)$ für ein beliebiges

$$\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J) \text{ und}$$
$$\mathbf{Y}^{0‘} := \mathbf{W}’(\mu‘(\mathbf{Y}^0)) = \varphi‘(\mathbf{Y}^0) \in \mathbf{W}’(J)$$

die entsprechenden Indifferenzklassen übereinstimmen:

$$\text{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}^0) = \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘}).$$

Da die LD-Äquivalenz $\sim_{LD}$ symmetrisch ist, erhält man analog durch Vertauschung der Rollen von $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}’(\mu)$ auch für

$$\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J) \text{ und}$$
$$\mathbf{Z}^0 := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0‘})) = \varphi(\mathbf{Y}^{0‘}) \in \mathbf{W}(J)$$

ebenfalls die Übereinstimmung der entsprechenden Indifferenzklassen:

$$\text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘}) = \text{Ind}_{DW}(\mathbf{Z}^0).$$

Aus beiden Aussagen zusammen erhält man

$$\text{Ind}_{DW}(\mathbf{Y}^0) = \text{Ind}_{DW‘}(\mathbf{Y}^{0‘}) = \text{Ind}_{DW}(\mathbf{Z}^0),$$

also

$$\mathbf{Y}^0 \simeq_{DW} \mathbf{Z}^0 \text{ bzw. } \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Z}^0))$$

und wegen $\mathbf{Y}^0 = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0))$, $\mathbf{Z}^0 = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Z}^0)) \in \mathbf{W}(J)$ dann

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{Z}^0$$

und damit

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{Z}^0 = \varphi(\mathbf{Y}^{0‘}) = \varphi(\varphi‘(\mathbf{Y}^0)).$$

Da $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ beliebig war, folgt als Erstes, dass die Funktion φ surjektiv ist:

$$\mathbf{W}(J) = \varphi(\mathbf{W}‘(J)).$$

Da aus dem φ'-Bild $\varphi‘(\mathbf{Y}^0)$ von $\mathbf{Y}^0$ mittels φ eindeutig das Urbild $\mathbf{Y}^0$ bestimmt werden kann, folgt als Zweites, dass die Funktion φ' injektiv ist und die Funktion φ auf der Bildmenge $\varphi‘(\mathbf{W}(J))$ die Umkehrfunktion von $\varphi‘$ ist.

Analog lässt sich ausgehend von einem beliebigen Kurvenpunkt $\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$ mittels der Kurvenpunkte

$$\mathbf{Z}^0 := \varphi(\mathbf{Y}^{0‘}) = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0‘})) \in \mathbf{W}(J) \text{ und}$$
$$\mathbf{W}^0 := \varphi'(\mathbf{Z}^0) = \mathbf{W}‘(\mu‘(\mathbf{Z}^0)) \in \mathbf{W}‘(J)$$

folgern, dass

$$\mathbf{Y}^{0‘} = \mathbf{W}^0 = \varphi'(\mathbf{Z}^0) = \varphi‘(\varphi(\mathbf{Y}^{0‘}))$$

gilt, die Funktion φ' surjektiv ist,

$$\mathbf{W}‘(J) = \varphi‘(\mathbf{W}(J)),$$

die Funktion φ injektiv und die Funktion $\varphi‘$ auf der Bildmenge $\varphi(\mathbf{W}‘(J))$ die Umkehrfunktion von φ ist. Insgesamt ergibt sich, dass die beiden Funktionen

$$\varphi : \mathbf{W}‘(J) \longrightarrow \mathbf{W}(J),$$
$$\varphi‘ : \mathbf{W}(J) \longrightarrow \mathbf{W}‘(J)$$

bijektiv sind, die Funktion φ auf $\mathbf{W}‘(J) = \varphi‘(\mathbf{W}(J))$ die Umkehrfunktion von φ' ist und die Funktion $\varphi‘$ auf $\mathbf{W}(J) = \varphi(\mathbf{W}‘(J))$ die Umkehrfunktion von φ':

$$\varphi = \varphi'^{-1} \text{ und } \varphi' = \varphi^{-1}.$$

Beweis der strengen Monotonie: Zum Beweis der strengen Monotonie der Funktion φ' ist für beliebige $\mathbf{X}^0$, $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ mit der Ungleichung $\mathbf{X}^0 \underset{\cdot}{>} \mathbf{Y}^0$ zu zeigen, dass auch die Funktionswerte $\varphi'(\mathbf{X}^0) =: \mathbf{X}^{0'}$ und $\varphi'(\mathbf{Y}^0) =: \mathbf{Y}^{0'}$ die entsprechende Ungleichung erfüllen:

$$\mathbf{X}^{0'} \underset{\cdot}{>} \mathbf{Y}^{0'}.$$

Die Ungleichung für die Argumente $\mathbf{X}^0 = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}^0))$, $\mathbf{Y}^0 = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0))$ der Funktion φ' ist gleichbedeutend zur Relation $\mathbf{X}^0 \rhd_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}^0$, also zu

$$\mathbf{X}^0 \unrhd_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}^0 \ \wedge\ \mathbf{X}^0 \not\simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}^0.$$

Dementsprechend ist für die Funktionswerte die Relation $\mathbf{X}^{0'} \rhd_{\mathrm{D}W'} \mathbf{Y}^{0'}$ zu zeigen, also

$$\mathbf{X}^{0'} \unrhd_{\mathrm{D}W'} \mathbf{X}^{0'} \ \wedge\ \mathbf{X}^{0'} \not\simeq_{\mathrm{D}W'} \mathbf{Y}^{0'}.$$

Aus dem vorhergehenden Beweis ergeben sich für $\mathbf{X}^0 = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}^0))$, $\mathbf{Y}^0 = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)) \in \mathbf{W}(J)$ die Übereinstimmung von Indifferenzklassen

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}^0) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W'}(\mathbf{X}^{0'}),$$
$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}^0) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W'}(\mathbf{Y}^{0'}),$$

so dass aus $\mathbf{X}^0 \not\simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}^0$ auch

$$\mathbf{X}^{0'} \not\simeq_{\mathrm{D}W'} \mathbf{Y}^{0'}$$

folgt: Aus $\mathbf{X}^{0'} \simeq_{\mathrm{D}W'} \mathbf{Y}^{0'}$ würde nämlich $\mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}^0) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W'}(\mathbf{X}^{0'}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W'}(\mathbf{Y}^{0'}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{Y}^0)$, also $\mathbf{X}^0 \simeq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}^0$ folgen.

Weiter erhält man aus dem vorhergehenden Beweis mit $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0$ die Schlusskette

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^0 \unrhd_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}^0 \quad &\Leftrightarrow \mathbf{X}^0 = \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}^0)) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{Y}^0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X}^{0'} = \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{X}^0)) \geq \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{Y}^{0'} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{X}^{0'} \unrhd_{\mathrm{D}W'} \mathbf{Y}^{0'}.\end{aligned}$$

Insgesamt ist also $\mathbf{X}^{0'} \rhd_{\mathrm{D}W'} \mathbf{Y}^{0'}$ bzw. $\mathbf{X}^{0'} \underset{\cdot}{>} \mathbf{Y}^{0'}$ nachgewiesen und der Beweis für die strenge Monotonie der Funktion φ' erbracht. Der Beweis für die strenge Monotonie der Funktion φ ergibt sich aus der strengen Monotonie der Umkehrfunktion $\varphi' = \varphi^{-1}$. □

Beweis von Aussagen in der Definition 8.3.1 der *L*D-Äquivalenz:

Zu 2): **Übereinstimmung der trivialen *L*D-Äquivalenz mit der *P*-Äquivalenz**:

„⇒“: Falls zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven P-äquivalent sind,

$$\mathbf{W} \sim_P \mathbf{W}',$$

stimmen nach Abschnitt 8.3.4 deren Spuren überein:

$$\mathbf{W}(J) = \mathbf{W}'(J).$$

Für ein beliebiges $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J) = \mathbf{W}'(J)$ gelten also wegen der Eindeutigkeit der Duplizierung

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)),\ \ \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n},$$

von $\mathbf{Y}^0$ mittels der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ die Gleichungen

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)),\ \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{O}.$$

Da $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ beliebig gewählt war, gilt

$$\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) = O.$$

Demnach ist die Bedingung (LDÄ) trivialerweise erfüllt,

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = \mathbf{O} + C_{M^n} = C_{M^n} \ \ \forall\, \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J),$$

und die beiden Parameterdarstellungen sind trivial LD-äquivalent:

$$\mathbf{W} \sim_{tL\mathrm{D}} \mathbf{W}'.$$

„⇐“: Sind umgekehrt $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ trivial LD-äquivalent, so gilt $\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) = O$, also für jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ in der Duplizierung bezüglich $\mathbf{W}'(\mu)$ die Bedingung $\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{O}$ und damit

$$\mathbf{Y}^0 = \mathbf{W}'(\mu'(\mathbf{Y}^0)) = \varphi'(\mathbf{Y}^0),$$

sodass φ' die identische Abbildung auf $\mathbf{W}(J)$ ist: $\varphi' = \mathrm{id}_{\mathbf{W}(J)}$. Zusammen mit Hilfssatz 8.3.2 folgt dann

$$\mathbf{W}(J) = \varphi'(\mathbf{W}(J)) = \mathbf{W}'(J),$$

sodass nach Abschnitt 8.3.4 die Parameterdarstellungen P-äquivalent sind. Insgesamt ist damit gezeigt, dass die beiden Relationen $\sim_P$, $\sim_{tL\mathrm{D}} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ übereinstimmen:

$$\sim_P = \sim_{tL\mathrm{D}} \ (\subseteq \sim_{L\mathrm{D}}).$$

Da die P-Äquivalenz $\sim_P$ eine Äquivalenzrelation ist, ist auch die triviale LD-Äquivalenz $\sim_{tL\mathrm{D}}$ eine Äquivalenzrelation.

Zu 3): **Wohldefiniertheit der LD-Äquivalenz für Beurteilungskurven**:
Zum Nachweis der Wohldefiniertheit der Definition der LD-Äquivalenz von Beurteilungskurven W und W' wählt man je zwei verschiedene Repräsentanten der P-Äquivalenzklassen: $\mathbf{W}, \mathbf{W}^* \in W$, $\mathbf{W}', \mathbf{W}'^* \in W'$ mit

$$\mathbf{W} \sim_P \mathbf{W}^*, \mathbf{W}' \sim_P \mathbf{W}'^*.$$

Nach der eben in Beweisteil „$\Rightarrow$" bewiesenen Inklusion $\sim_P \subseteq \sim_{LD}$ gilt dann auch

$$\mathbf{W} \sim_{LD} \mathbf{W}^*, \mathbf{W}' \sim_{LD} \mathbf{W}'^*.$$

Aus der LD-Äquivalenz $\mathbf{W} \sim_{LD} \mathbf{W}'$ der Repräsentanten $\mathbf{W}$ und $\mathbf{W}'$ folgen dann die Relationen

$$\mathbf{W}^* \sim_{LD} \mathbf{W} \sim_{LD} \mathbf{W}' \sim_{LD} \mathbf{W}'^*$$

und wegen der Transitivität von $\sim_{LD}$ auch die LD-Äquivalenz $\mathbf{W}^* \sim_{LD} \mathbf{W}'^*$ der Repräsentanten $\mathbf{W}^*$ und $\mathbf{W}'^*$. Damit ist die Unabhängigkeit der Definition von der Auswahl der Repräsentanten gezeigt. □

Die Definition der *L*R-Äquivalenz und der *L*-Äquivalenz

Analog zur Charakterisierung der Übereinstimmung von zwei D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{DW}$ und $\trianglerighteq_{DW'}$ durch die LD-Äquivalenz der Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ wird nun eine entsprechende Aussage für die R-Präferenzordnungen bewiesen. Ausgegangen wird wieder von einem fest vorgegebenen Supplementsystem $L \subseteq K$ im arbitragefreien Kapitalmarkt K, einem beliebigen festen Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ und zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven, wofür die eindeutige Replizierung auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ gesichert ist.
Es wird nun wieder zuerst nach einer notwendigen Bedingung für die Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen gesucht. Aus der Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{RW}$ und $\trianglerighteq_{RW'}$ folgt auch die Übereinstimmung der zugehörigen R-Indifferenzrelationen $\simeq_{RW}$ und $\simeq_{RW'}$,

$$\simeq_{RW} = \trianglerighteq_{RW} \cap \trianglelefteq_{RW} = \trianglerighteq_{RW'} \cap \trianglelefteq_{RW'} = \simeq_{RW'},$$

und daraus notwendig die Übereinstimmung der Indifferenzklassen

$$\mathrm{Ind}_{RW}(\mathbf{Y}) = \mathrm{Ind}_{RW'}(\mathbf{Y}) \text{ für jedes } \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Für $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ erhält man zu den Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ die Replizierungen

$$\mathbf{B} + \mathbf{Y} + \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) \in C_{M^n},$$
$$\mathbf{B} + \mathbf{Y} + \mathbf{S}°'(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}°'(\mathbf{Y}) \in C_{M^n}.$$

Zur Bezeichnungsweise für die Supplemente $\mathbf{S}°(\mathbf{Y})$ und $\mathbf{S}°'(\mathbf{Y})$ ist anzumerken, dass hier bei der Replizierung mittels zwei auftretenden Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ das Supplement $\mathbf{S}°(\mathbf{Y})$ zur Replizierung auf die Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ und das Supplement $\mathbf{S}°'(\mathbf{Y})$ zur Replizierung auf die Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ gehört. Der Index ° beim Supplement weist auf das Konzept der Replizierung hin zur Unterscheidung vom Konzept der Duplizierung. In den Abschnitten 5.1.5 bis 5.4.3 dagegen wurde die Bezeichnung $\mathbf{S}'(\mathbf{Y})$ für das Supplement bei der Replizierung auf $\mathbf{W}(\mu)$ und die Bezeichnung $\mathbf{S}(\mathbf{Y})$ für das Supplement bei der Duplizierung mittels $\mathbf{W}(\mu)$ benutzt.
Nach Abschnitt 5.2.2 ergeben sich die Indifferenzklassen von $\mathbf{Y}$ als Minkowski-Summen zu

$$\mathrm{Ind}_{RW}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n} = \mathbf{Y} + \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) - C_{M^n},$$
$$\mathrm{Ind}_{RW'}(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n} = \mathbf{Y} + \mathbf{S}°'(\mathbf{Y}) - C_{M^n}$$

und für deren Übereinstimmung die Mengengleichung

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n} \quad = \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{Y} + \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) - C_{M^n} \quad = \mathbf{Y} + \mathbf{S}°'(\mathbf{Y}) - C_{M^n} .$$

Zu beachten ist, dass bei dieser Darstellung der Indifferenzklassen als affine Kegel keine zusätzliche Voraussetzung zur Sicherung der Monotonie der Präferenzordnungen wie bei der entsprechenden Darstellung der Bessermengen benötigt wird.
Speziell für Punkte $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0$ mit $\mathbf{Y}^0 + \mathbf{B} \in \mathbf{W}(J)$ erhält man wegen der Eindeutigkeit der Replizierung die Anteile $\mathbf{S}°(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{O}$, $\mathbf{Y}^0 + \mathbf{B} = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}^0))$ und damit die für die Übereinstimmung der R-Indifferenzrelationen notwendige Mengengleichung

$$\mathbf{Y}^0 - C_{M^n} = \mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}°'(\mathbf{Y}^0) - C_{M^n} .$$

Nach der Subtraktion von $\mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}°'(\mathbf{Y}^0)$ auf beiden Seiten der Mengengleichung und anschließender Multiplikation der Gleichung mit - 1 ergibt sich die Gleichung

$$\mathbf{S}°'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \text{für jedes } \mathbf{Y}^0 \text{ mit } \mathbf{Y}^0 + \mathbf{B} \in \mathbf{W}(J).$$

Da die Übereinstimmung der Präferenzordnungen für jeden vorher beliebig fixierten Basiszahlungsstrom **B** gelten soll, so kann man die speziell zum Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ resultierende **notwendige Bedingung** auswählen:

(LRÄ) $\quad \mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad$ für jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$.

Bei der Bezeichnungsweise ist hier zu beachten, dass die in dieser Gleichung (LRÄ) auftretenden Supplemente $\mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0)$ mit den oberen Indizes * und ' zur speziellen Replizierung der Kurvenpunkte $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ (beim Supplement wird der Index ° durch * ersetzt) und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ gehören:

$$\mathbf{O} + \mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) \quad = \mathbf{W}'(v^*'(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n} .$$

Eine konkrete Berechnung für die zwei vorgegebene Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ verbindenden Supplemente $\mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0)$ und den Nachweis der mengentheoretischen Bedingung (LRÄ) für die *L*R-Äquivalenz findet man beispielsweise in Abschnitt 6.3.6 im Beweis von Satz 6.1, 2) zur Charakterisierung der Übereinstimmung von Zeitwert-Präferenzordnungen.

Analog zur obigen Betrachtung bei der Bedingung (LDÄ) erhält man aus (LRÄ)

$$- \mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} ,$$

$$- \mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) = - \mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) + \mathbf{O} \in - \mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} ,$$

$$\mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) \in - C_{M^n}$$

und dann unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit des Kapitalmarkts *K* für die die Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ verbindenden Supplemente $\mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{Y}^0 - \mathbf{W}'(v^*'(\mathbf{Y}^0))$ die weitere notwendige Bedingung

(LRÄ1) $\quad \mathbf{S}^*'(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n} \cap (-C_{M^n}) = R_{M^n} \subseteq H_{\mathbf{P},0}$ für jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$.

Formal kann die für die Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ notwendige Bedingung (LRÄ) als binäre Relation $\sim_{L\mathrm{R}}$ für die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven geschrieben werden:

$$\mathbf{W} \sim_{L\mathrm{R}} \mathbf{W}' :\Leftrightarrow (\mathrm{LRÄ}).$$

Im nachfolgenden Beweis (im Anschluss an Definition 8.3.3) wird gezeigt, dass $\mathbf{W}(\mu)$ genau dann zu $\mathbf{W}'(\mu)$ in der Relation $\sim_{L\mathrm{R}}$ steht, wenn $\mathbf{W}'(\mu)$ zu $\mathbf{W}(\mu)$ LD-äquivalent ist:

$$\mathbf{W} \sim_{L\mathrm{R}} \mathbf{W}' \;\Leftrightarrow\; \mathbf{W}' \sim_{L\mathrm{D}} \mathbf{W}.$$

Die Relation $\sim_{L\mathrm{R}}$ ist also die inverse Relation (Umkehrrelation) zur LD-Äquivalenz $\sim_{L\mathrm{D}}$:

$$\sim_{L\mathrm{R}} = \sim_{L\mathrm{D}}^{-1}.$$

Daraus ergeben sich einige wichtige Folgerungen und die Plausibilität der nachfolgenden Definition der L-Äquivalenz. Als inverse Relation der Äquivalenzrelation $\sim_{L\mathrm{D}}$ ist die Relation $\sim_{L\mathrm{R}}$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation, also eine reflexive, symmetrische und transitive Relation. Daher werden Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ mit der Relation $\mathbf{W} \sim_{L\mathrm{R}} \mathbf{W}'$ nun als LR-äquivalent und die Relation $\sim_{L\mathrm{R}}$ als ***L*R-Äquivalenz** bezeichnet. Wegen der Symmetrie der LD-Äquivalenz $\sim_{L\mathrm{D}}$ folgt außerdem, dass die Relation $\sim_{L\mathrm{R}}$ auch mit der Relation $\sim_{L\mathrm{D}}$ übereinstimmt: Es gilt nämlich

$$\mathbf{W} \sim_{L\mathrm{R}} \mathbf{W}' \;\Leftrightarrow\; \mathbf{W}' \sim_{L\mathrm{D}} \mathbf{W} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{W} \sim_{L\mathrm{D}} \mathbf{W}',$$

also

$$\sim_{L\mathrm{R}} = \sim_{L\mathrm{D}} =: \sim_{L}.$$

Es sind also die beiden Bedingungen (LRÄ) und (LDÄ) gleichwertig:

$$(\mathrm{LRÄ}) \Leftrightarrow (\mathrm{LDÄ}).$$

In der folgenden Definition werden daher die LD-Äquivalenz $\sim_{L\mathrm{D}}$ und die LR-Äquivalenz $\sim_{L\mathrm{R}}$ unabhängig vom Konzept der Duplizierung bzw. Replizierung auch als ***L*-Äquivalenz** $\sim_L$ bezeichnet. Bei der Betrachtung der R-Präferenzordnungen ist schließlich nur noch zu zeigen, dass für jeden beliebig fixierten Basiszahlungsstrom **B** die zunächst notwendige Bedingung der L-Äquivalenz $\sim_L$ **auch hinreichend** und damit insgesamt charakteristisch **für die Übereinstimmung** der R-Präferenzordnungen ist.

Wenn verschiedene Supplementsysteme $L, L' \subseteq K$ in die Betrachtungen mit einbezogen werden, so wäre statt von der L-Äquivalenz exakter von der C_{M^n} -Äquivalenz zu sprechen, da die Bedingung (LDÄ) bzw. (LRÄ) nur von der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} abhängt und verschiedene Supplementsysteme L, L' mit gleicher zulässiger Supplementmenge

$$C_{M^n}(L) = C_{M^n}(L')$$

dieselbe Bedingung (LDÄ) ergeben. Da aber meist das Supplementsystem L fest fixiert ist, wird hier der kürzeren Bezeichnung der Vorzug gegeben.

Definition 8.3.3 L-Äquivalenz

1) Zwei Parameterdarstellungen

$$\mathbf{W} : J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\mathbf{W}' : J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

von Beurteilungskurven (o.E. mit demselben Definitionsintervall J) heißen ***L*-äquivalent**,

$$\mathbf{W} \sim_L \mathbf{W}',$$

wenn bei der Duplizierung der Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ mittels der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ die Bedingung

(LDÄ) $\qquad \mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n}$ für jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$,

erfüllt ist oder gleichbedeutend dazu bei der Replizierung der Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ die Bedingung

(LRÄ) $\qquad \mathbf{S}^*{}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n}$ für jedes $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$

erfüllt ist. Die L-Äquivalenz $\sim_L$ ist auf der Menge der Parameterdarstellungen von Beurteilungskurven eine Äquivalenzrelation.

2) Zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ von Beurteilungskurven heißen **trivial *L*-äquivalent**, wenn die folgende Mengengleichung erfüllt ist:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) = O \ \text{ bzw. } \ \mathbf{S}^*{}'(\mathbf{W}(J)) = O.$$

Die triviale L-Äquivalenz $\sim_{tL}$ stimmt mit der P-Äquivalenz $\sim_P$ überein.
Die Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ heißen **echt (nichttrivial) *L*-äquivalent**, wenn sie L-äquivalent und nicht trivial L-äquivalent bzw. nicht P-äquivalent sind:

$$\mathbf{S}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \forall\, \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J) \wedge \mathbf{S}'(\mathbf{W}(J)) \neq O$$

bzw.

$$\mathbf{S}^*{}'(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = C_{M^n} \quad \forall\, \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J) \wedge \mathbf{S}^*{}'(\mathbf{W}(J)) \neq O.$$

3) Zwei Beurteilungskurven W und W', die als P-Äquivalenzklassen (bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_P$; siehe Abschnitt 8.3.1) von Parameterdarstellungen definiert sind, heißen L-äquivalent,

$$W \sim_L W',$$

wenn es Repräsentanten $\mathbf{W} \in W$ und $\mathbf{W}' \in W'$ der P-Äquivalenzklassen gibt, die L-äquivalent sind.

Beweis des Zusammenhangs zwischen den Relationen $\sim_{LR}$ und $\sim_{LD}$:

$$\mathbf{W} \sim_{LR} \mathbf{W}' \Leftrightarrow \mathbf{W}' \sim_{LD} \mathbf{W}.$$

„⇒“: Die Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ stehe in der Relation $\sim_{LR}$ zur Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$. Zu zeigen ist, dass dann $\mathbf{W}'(\mu)$ LD-äquivalent zu $\mathbf{W}(\mu)$ ist. Dazu ist für die eindeutig bestimmte Duplizierung eines beliebigen Kurvenpunkts $\mathbf{Y}^{0\prime} \in \mathbf{W}'(J)$ mittels der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$,

$$\mathbf{Y}^{0\prime} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0\prime})),\ \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}) \in C_{M^n},$$

die Bedingung

(LDÄ') $\qquad \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0\prime}) + C_{M^n} = C_{M^n}$

(mit vertauschten Rollen von **W** und **W‘** in (LDÄ‘) im Vergleich zu (LDÄ)) nachzuweisen. Man verwendet hierzu, dass die obige Duplizierungsgleichung des Kurvenpunkts $\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$ auch die Replizierungsgleichung

$$\mathbf{O} + \mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{W}‘(\nu^{*}‘(\mathbf{Y}^0)),\ \ \mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n}\ ,$$

des Kurvenpunkts

$$\mathbf{Y}^0 := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0‘})) \in \mathbf{W}(J)$$

beim Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ und bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}’(\mu)$ ist mit dem eindeutig bestimmten Beurteilungskurvenpunkt

$$\mathbf{W}‘(\nu^{*}‘(\mathbf{Y}^0)) = \mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$$

und dem Supplement

$$\mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘}).$$

Da die Relation $\mathbf{W} \sim_{LR} \mathbf{W}’$ gilt und somit für $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ die Bedingung (LRÄ) erfüllt ist, folgt damit für $\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$ die Bedingung (LDÄ‘):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘}) + C_{M^n} &= \mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} && (\mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘})) \\ &= C_{M^n} && (\text{LRÄ}). \end{aligned}$$

Da $\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$ beliebig gewählt war, gilt die Relation $\mathbf{W}‘ \sim_{LD} \mathbf{W}$. Aus der Relation $\mathbf{W} \sim_{LR} \mathbf{W}‘$ folgt also die Relation $\mathbf{W}‘ \sim_{LD} \mathbf{W}$.

Als Nebenresultat hat man hier noch für beliebiges $\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$ die Gleichung $\mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘}) = \mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0)$ mit einem $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$, also insgesamt die Inklusion

$$\mathbf{S}(\mathbf{W}‘(J)) \subseteq \mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{W}(J)).$$

„⇐“: Umgekehrt sei jetzt **W’** *L*-äquivalent zu **W**. Zu zeigen ist, dass die Relation $\mathbf{W} \sim_{LR} \mathbf{W}‘$ gilt. Für die Replizierung eines beliebigen Kurvenpunkts $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ bei Verwendung des Basiszahlungsstroms $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}’(\mu)$,

$$\mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{W}‘(\nu^{*}‘(\mathbf{Y}^0)),\ \ \mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n}$$

ist also die Bedingung (LRÄ) nachzuweisen. Nun ist diese Replizierungsgleichung von $\mathbf{Y}^0$ auch die Duplizierungsgleichung

$$\mathbf{Y}^{0‘} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0‘})),\ \ \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘}) \in C_{M^n}\ ,$$

des Kurvenpunkts

$$\mathbf{Y}^{0‘} := \mathbf{W}‘(\nu^{*}‘(\mathbf{Y}^0)) \in \mathbf{W}‘(J)$$

bezüglich der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ mit

$$\mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y}^{0‘})) = \mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J) \text{ und}$$
$$\mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘}) = \mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0).$$

Da $\mathbf{W}’ \sim_{LD} \mathbf{W}$ gilt und somit für $\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$ die Bedingung

(LDÄ‘) $$\mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘}) + C_{M^n} = C_{M^n}$$

gilt, folgt für $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ die Bedingung (LRÄ):

$$\mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) + C_{M^n} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘}) + C_{M^n} = C_{M^n}\ .$$

Da $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ beliebig gewählt war, gilt die Relation $\mathbf{W} \sim_{LR} \mathbf{W}‘$. Aus der Bedingung (LDÄ‘) folgt also die Bedingung (LRÄ). Insgesamt ist damit die Gleichwertigkeit der Bedingungen (LRÄ) und (LDÄ’) und die Übereinstimmung der Relation $\sim_{LR}$ mit der inversen Relation von $\sim_{LD}$ gezeigt.

Als Nebenresultat hat man hier noch für beliebiges $\mathbf{Y}^0 \in \mathbf{W}(J)$ die Gleichung $\mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{S}(\mathbf{Y}^{0‘})$ mit einem $\mathbf{Y}^{0‘} \in \mathbf{W}‘(J)$, also insgesamt die Inklusion

$$\mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{W}(J)) \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{W}‘(J)).$$

Zusammen mit dem entsprechenden Nebenresultat im ersten Teil des Beweises erhält man die Übereinstimmung der Bilder $\mathbf{S}(\mathbf{W}‘(J))$ und $\mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{W}(J))$:

$$\mathbf{S}^{*}‘(\mathbf{W}(J)) = \mathbf{S}(\mathbf{W}‘(J)).$$

Analog erhält man durch Vertauschung der Rollen von **W** und **W‘** in den Relationen $\sim_{LR}$ und $\sim_{LD}$ die Gleichung

$$\mathbf{S}^{*}(\mathbf{W}‘(J)) = \mathbf{S}‘(\mathbf{W}(J)).$$

Bei der Bezeichnung der Supplemente und der zugehörigen Abbildungen ist zu beachten, dass sich **S** und **S**‘ auf die Duplizierung mittels der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ bzw. $\mathbf{W}'(\mu)$ beziehen und **S*** und **S***‘ auf die spezielle Replizierung mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ und der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ bzw. $\mathbf{W}'(\mu)$. □

Charakterisierung der Übereinstimmung von R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ mittels der *L*-Äquivalenz $\sim_L$

Als Drittes wird nun noch bewiesen, dass eine der beiden gleichwertigen Bedingungen (LRÄ) und (LDÄ) jeweils auch hinreichend für die Übereinstimmung der beiden R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ ist. Damit ist jede dieser beiden Bedingungen für sich charakteristisch sowohl für die Übereinstimmung der beiden D-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W'}$ als auch charakteristisch für die Übereinstimmung der beiden R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$. Dieses Ergebnis wird im mathematischen Satz 5.5 in Abschnitt 5.3.3 festgehalten, der die Vielfalt der durch die Konzepte der Duplizierung und Replizierung erzeugten Präferenzordnungen zu festem Supplementsystem *L* und verschiedenen Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ beschreibt. Anzumerken ist hier, dass bei diesen Charakterisierungen die Arbitragefreiheit (AF) von *K* nur für die Beweisrichtung verwendet wird, bei der aus der *L*-Äquivalenz auf die Übereinstimmung der D- bzw. R-Präferenzordnungen geschlossen wird.

Bei einem arbitragefreien Kapitalmarkt *K* und fest gewähltem Supplementsystem $L \subseteq K$ gilt für die Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ und die zugehörigen R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$:

$$\begin{aligned}\trianglerighteq_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W'} \quad &\Leftrightarrow \mathbf{W} \sim_{L\mathrm{R}} \mathbf{W}' \\ &\Leftrightarrow \mathbf{W} \sim_{L} \mathbf{W}'.\end{aligned}$$

Beweis für die Charakterisierung der Übereinstimmung von R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ mittels der *L*-Äquivalenz der verwendeten Beurteilungskurven, also durch die Gültigkeit von einer der beiden gleichwertigen Bedingungen (LDÄ) und (LRÄ). Da die Notwendigkeit der beiden Bedingungen oben bereits gezeigt wurde, ist nur noch zu beweisen, dass beispielsweise die Bedingung (LRÄ) der *L*R-Äquivalenz der Beurteilungskurven auch hinreichend für die Übereinstimmung der zugehörigen R-Präferenzordnungen ist.

1) **Übereinstimmung der R-Indifferenzklassen**:
Dazu geht man von zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$ aus, bei denen **W** *L*R-äquivalent zu **W**’ (mit Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$) ist, und zeigt als Erstes für ein beliebiges $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Übereinstimmung der R-Indifferenzklassen $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y})$ und $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Y})$. Als Zweites wird dann die Übereinstimmung der R-Bessermengen bewiesen. Zu beachten ist, dass die R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ und die zugehörigen R-Indifferenzklassen sich auf einen fest fixierten Basiszahlungsstrom **B** beziehen. Mit der Replizierung von **Y** mittels Basiszahlungsstrom **B** und Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$,

$$\mathbf{B} + \mathbf{Y} + \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})), \qquad \mathbf{S}°(\mathbf{Y}) \in C_{M^n}, \quad \mathbf{Y}^0 := \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})),$$

und anschließender spezieller Replizierung von $\mathbf{Y}^0 := \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}))$ mittels Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ und Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$,

$$\mathbf{O} + \mathbf{Y}^0 + \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{Y}^0)), \qquad \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) \in C_{M^n}, \quad \mathbf{Y}^{0\prime} := \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{Y}^0)),$$

erhält man unter Verwendung von (LRÄ) bzw. der umgeformten Bedingung

$$-\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) - C_{M^n} = -C_{M^n}$$

und der in Abschnitt 5.2 bewiesenen Darstellung der R-Indifferenzklassen die Beziehung

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) \quad = \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) - \mathbf{B} - C_{M^n} \qquad \text{(Darst. von } \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}),\ \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) =: \mathbf{Y}^0\text{)}$$

$$= \mathbf{Y}^0 - \mathbf{B} - C_{M^n} \qquad \text{(Repliz. von } \mathbf{Y}^0\text{, } \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{Y}^0)) =: \mathbf{Y}^{0\prime}\text{)}$$
$$= \mathbf{Y}^{0\prime} - \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) - \mathbf{B} - C_{M^n} \qquad \text{(LRÄ)}$$
$$= \mathbf{Y}^{0\prime} - \mathbf{B} - C_{M^n}$$
$$= \mathbf{W}'(v(\mathbf{Z})) - \mathbf{B} - C_{M^n} \qquad \text{(Begründung folgt)}$$
$$= \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Z}) \qquad \text{(Darst. von } \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Z})\text{)}$$

mit dem Hilfspunkt $\mathbf{Z} := \mathbf{Y}^{0\prime} - \mathbf{B}$: Die Replizierung von $\mathbf{Z}$ mit Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ auf die Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$,

$$\mathbf{W}'(v'(\mathbf{Z})) = \mathbf{B} + \mathbf{Z} + \mathbf{S}°'(\mathbf{Z}) \qquad (\mathbf{S}°'(\mathbf{Z}) \in C_{M^n})$$
$$= \mathbf{Y}^{0\prime} + \mathbf{S}°'(\mathbf{Z})$$
$$= \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{Y}^0)) + \mathbf{S}°'(\mathbf{Z})$$

ist wegen der Einzigkeit der Replizierung gegeben durch $\mathbf{S}°'(\mathbf{Z}) = \mathbf{O}$ und $\mathbf{W}'(v'(\mathbf{Z})) = \mathbf{Y}^{0\prime}$.
Aus der Inzidenz $\mathbf{Y} \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Z})$ folgt die Relation

$$\mathbf{Y} \simeq_{\mathrm{R}W'} \mathbf{Z}$$

und die Übereinstimmung $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Y}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Z})$, dann mit $\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Z})$ die Übereinstimmung der Indifferenzklassen

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Y}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W'}(\mathbf{Z}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{Y}).$$

Da $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig gewählt war, folgt die Übereinstimmung der Indifferenzrelationen $\simeq_{\mathrm{R}W}$ und $\simeq_{\mathrm{R}W'}$.
Als wichtiges Ergebnis für den weiteren Beweisgang ist die Relation $\mathbf{Y} \simeq_{\mathrm{R}W'} \mathbf{Z}$ bzw. die folgende Gleichung festzuhalten:

$$\mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Z})) = \mathbf{Y}^{0\prime} = \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{Y}^0)).$$

2) **Übereinstimmung der R-Bessermengen**:
Als Zweites wird nun für ein beliebiges $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Übereinstimmung der R-Bessermengen

$$W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}))\},$$
$$W'_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{W}'(v'(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}))\}$$

bewiesen, welches gleichbedeutend zur Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ ist.
Dazu ist für beliebige $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zu zeigen, dass die Ungleichung $\mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(v(\mathbf{Y}))\}$ gleichbedeutend zur Ungleichung $\mathbf{W}'(v'(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}))$ ist.
Wie oben schon für den Zahlungsstrom $\mathbf{Y}$ erhält man analog für $\mathbf{X}$ mittels der Replizierung von $\mathbf{X}$ mit Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ und Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ den Beurteilungskurvenpunkt

$$\mathbf{X}^0 := \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J),$$

dann mittels spezieller Replizierung von $\mathbf{X}^0$ mit Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}^* = \mathbf{O}$ und Beurteilungskurve $\mathbf{W}'(\mu)$ den Beurteilungskurvenpunkt

$$\mathbf{X}^{0\prime} := \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{X}^0)) \in \mathbf{W}'(J)$$

und die Gleichung

$$\mathbf{W}'(v'(\mathbf{X})) = \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{X}^0)).$$

Damit ergibt sich für die Beurteilungskurvenpunkte von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ die Vektorgleichung

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{X})) - \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{X}^0 - \mathbf{Y}^0 \qquad \text{(Repliz. von } \mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^0 \text{ mit } \mathbf{B}^* = \mathbf{O} \text{ u. } \mathbf{W}'(\mu)\text{)}$$
$$= - \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{X}^0) + \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{X}^0)) + \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) - \mathbf{W}'(v^{*\prime}(\mathbf{Y}^0))$$
$$= \mathbf{W}'(v'(\mathbf{X})) - \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y})) - \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{X}^0) + \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0)$$

Nun folgt ein wichtiger Beweisschritt, bei dem mit Hilfe des positiven Normalenvektors $\mathbf{P}$ zum Linienraum V der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte die Übereinstimmung der Präferenzordnungen gezeigt wird. Auf Grund der **Arbitragefreiheit** des Linienraums V von K ($V \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) gibt es nämlich nach dem Satz 8.2.3 b) einen positiven Normalenvektor[4] $\mathbf{P} \in V^{\perp}$ mit $V \subseteq H_{\mathbf{P},0}$.

[4] Der positive Normalenvektor $\mathbf{P} = (1,P_1,\ldots,P_n)^{\mathrm{T}}$ von V bzw. von $H_{\mathbf{P},0}$ kann als Preisvektor der reinen Wertpapiere (Arrow-Debreu-Papiere) $\breve{\mathbf{D}}^j = \mathbf{e}_{j+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ von Abschnitt 4.1.4 bzw. der zu deren Erwerb gehörigen Kassageschäfte $\mathbf{D}^j = (-P_j,0,..,0,1,0,..,0)^{\mathrm{T}} \in H_{\mathbf{P},0}$ ($j = 1,\ldots,n$) bezeichnet werden: Die Komponente P_j von $\mathbf{P}$ ist der Preis des reinen Wertpapiers $\breve{\mathbf{D}}^j$. Nur wenn K die Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ ($\mathbf{P} > \mathbf{O}$) umfasst (z. B. bei einem vollkommenen arbitragefreien Kapitalmarkt K mit $\dim K = n$) und

Wegen der vorausgesetzten Bedingung (LRÄ), der Arbitragefreiheit (AF) von K und der Folgerung (LRÄ1) gilt für die Supplemente von $\mathbf{X}^0$ und $\mathbf{Y}^0$:

$$\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{X}^0), \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) \in R_{M^n} \subseteq V \subseteq H_{\mathbf{P},0}.$$

Im Spezialfall (LU) ist $R_{M^n} = O$, so dass unmittelbar $\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{X}^0) = \mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) = \mathbf{O}$, die Vektorgleichung

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{X})) - \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) = \mathbf{W}'(v'(\mathbf{X})) - \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y}))$$

und daraus die Übereinstimmung der Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ folgt.
Im allgemeinen Fall erhält man nach Linksmultiplikation der Vektorgleichung der Beurteilungskurvenpunkte mit dem Normalenvektor $\mathbf{P}^\mathsf{T}$ der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ wegen

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{X}^0) &= \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{Y}^0) = 0, \\
\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{W}(v) &= \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{U} + \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}(v) &&= \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{U} + \alpha(v), \\
\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{W}'(v) &= \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{U}' + \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}'(v) &&= \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{U}' + \alpha'(v)
\end{aligned}$$

die reellwertige Gleichung

$$\alpha(v(\mathbf{X})) - \alpha(v(\mathbf{Y})) = \alpha'(v'(\mathbf{X})) - \alpha'(v'(\mathbf{Y})).$$

Mittels dieser Gleichung und der strengen Monotonie der Funktionen $\mathbf{W}(\mu)$, $\mathbf{W}'(\mu)$, $\alpha(\mu)$ und $\alpha'(\mu)$ ($\mathbf{P} > \mathbf{O}$) erhält man die Schlusskette von äquivalenten Aussagen

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y} &\Leftrightarrow \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) \\
&\Leftrightarrow v(\mathbf{X}) \geq v(\mathbf{Y}) \\
&\Leftrightarrow \alpha(v(\mathbf{X})) \geq \alpha(v(\mathbf{Y})) \\
&\Leftrightarrow \alpha'(v'(\mathbf{X})) \geq \alpha'(v'(\mathbf{Y})) \\
&\Leftrightarrow v'(\mathbf{X}) \geq v'(\mathbf{Y}) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{W}'(v'(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}'(v'(\mathbf{Y})) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W'} \mathbf{Y}.
\end{aligned}$$

Damit ist für ein beliebiges $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Übereinstimmung der Bessermengen $W_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ und $W'_{+\mathrm{R}}(\mathbf{Y})$ und insgesamt die Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ bewiesen. Die Bedingung (LRÄ) bzw. die L-Äquivalenz $\mathbf{W} \sim_L \mathbf{W}'$ ist also auch hinreichend und dann insgesamt charakteristisch für die Übereinstimmung der R-Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$ und $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$.

Für einen Überblick über den Beweis ist noch festzuhalten, dass für die Übereinstimmung der Indifferenzklassen die Bedingung (LRÄ) der LR-Äquivalenz verwendet wurde und für die Übereinstimmung der Bessermengen neben der Übereinstimmung der Indifferenzklassen auch die Arbitragefreiheit und die Folgerung (LRÄ1) aus (LRÄ), nämlich dass die Menge $\mathbf{S}^{*\prime}(\mathbf{W}(J))$ der die Beurteilungskurven verbindenden Supplemente in der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ liegt. Die **Arbitragefreiheit** (AF) von K wurde somit nur für die Beweisrichtung verwendet, bei der aus der L-Äquivalenz der verwendeten Beurteilungskurven $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}'(\mu)$, also der Bedingung (LRÄ), die Übereinstimmung der Präferenzordnungen $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W} = \trianglerighteq_{\mathrm{R}W'}$ geschlossen wurde. □

8.4 Duplizierung und Replizierung mit speziellen Supplementsystemen von Termin- und Kassageschäften

Nachfolgend werden noch Supplementsysteme spezieller Termingeschäfte und spezieller Kassageschäfte angegeben, für welche jeweils die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. der Replizierung für jede beliebige Beurteilungskurve gesichert ist. Diese Supplementsysteme L besitzen positive Normalenvektoren $\mathbf{P_E}$ für die Hyperebenen $H_\mathbf{E} = \mathrm{lin}\, L_\mathbf{E}$ ($\mathbf{E} \in M^n$; Bezeichnungen siehe Kapitel 5). Die mit ihnen erzeugten D- und R-Präferenzordnungen sind alle monoton, besitzen stetige Nutzen-

somit alle n Kassageschäfte $\mathbf{D}^j$ enthält ($\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{D}^j = 0$), kann für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Barwert $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} = X_0 + P_1X_1 + \ldots + P_nX_n$ als Preis interpretiert werden und dann $\mathbf{P}$ als Preisvektor des Kapitalmarkts K bezeichnet werden.

funktionen und sind auch selbst stetig. Dabei wird beispielsweise die D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ genau dann als stetig bezeichnet, wenn es zu drei Zahlungsströmen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Relation

$$\mathbf{X} \vartriangleright_{DW} \mathbf{Y} \vartriangleright_{DW} \mathbf{Z}$$

auch einen Zahlungsstrom

$$\mathbf{X}(\alpha) := \mathbf{Z} + \alpha(\mathbf{X} - \mathbf{Z}),\ \alpha \in\ ]0,1[,$$

auf der (bezüglich der Relativtopologie offenen) Verbindungsstrecke $]\mathbf{Z},\mathbf{X}[$ der Zahlungsströme $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{X}$ gibt, der zu $\mathbf{Y}$ DW-indifferent ist:

$$\mathbf{X} \vartriangleright_{DW} \mathbf{Y} \vartriangleright_{DW} \mathbf{Z}\ \Rightarrow\ \exists\, \alpha \in\ ]0,1[\ \text{mit}\quad \mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{Z} + \alpha(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \simeq_{DW} \mathbf{Y}.$$

Die Definition der Stetigkeit einer Präferenzordnung für allgemeinere Alternativen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ findet man beispielsweise bei Kruschwitz (1999), S. 30, und Jarrow (1988), S. 10. Die **Beweise** für die Aussagen über diese Supplementsysteme findet man auf der Website www.pleier-r.de des Autors in einer PDF-Datei zum Download. Beim Beweis, dass die Duplizierung bzw. Replizierung auf genau eine Weise möglich ist, ergibt sich hier auch eine Berechnungsmöglichkeit der Duplizierung bzw. Replizierung über die iterative Nullstellenbestimmung einer Hilfsfunktion.

Supplementsystem aus Termingeschäften

Das Supplementsystem L aus Termingeschäften setzt sich zusammen aus n Investitionen

$$\mathbf{I}^j = \mathbf{S}_H^j = \mathbf{T}_H^j$$

und n Finanzierungen

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{S}_S^j = -\ \mathbf{T}_S^j$$

mit der durch die elementaren Zahlungsströme $\mathbf{T}_{E_j}^j$ festgelegten Zahlungsstromstruktur:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{E_1}^1 &= (-1, T_{E_1,1}^1, \ldots, T_{E_1,n}^1)^\mathsf{T},\\
\mathbf{T}_{E_2}^2 &= (0,-1, T_{E_2,2}^2, \ldots, T_{E_2,n}^2)^\mathsf{T},\\
&\ldots\\
\mathbf{T}_{E_j}^j &= (0,..,0,-1, T_{E_j,j}^j, .., T_{E_j,n}^j)^\mathsf{T},\\
&\ldots\\
\mathbf{T}_{E_n}^n &= (0,\ldots\ldots,0,-1, T_{E_n,n}^n)^\mathsf{T},
\end{aligned}$$

mit den Komponenten $T_{E_j,k}^j = 0$ für $k = 0,\ldots,j$-2, $T_{E_j,j-1}^j = -\,1$ und den Vorzeichenbedingungen $T_{E_j,j}^j > 0$, $T_{E_j,k}^j \geq 0$ für $k = j+1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n$, $E_j \in M = \{H,S\}$. Die hier vom Zinssatztyp $E_j = H$, S abhängigen (n-j+1)-**periodischen Termingeschäft**e $\mathbf{T}_{E_j}^j$ sind eine Verallgemeinerung der von Kruschwitz (1998), *S*. 48f, verwendeten **einperiodischen Termingeschäfte**

$$\mathbf{T}_{E_j}^j = (0,\ldots,0,-1,+q_{jE_j},0,\ldots,0)^\mathsf{T} = -\,\mathbf{e}_j + q_{jE_j}\,\mathbf{e}_{j+1} \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

mit

$$T^{j}_{E_j,j-1} = -1,$$

$$T^{j}_{E_j,j} = q_{jE_j} = 1 + i_{jE_j} > 0,$$

$$T^{j}_{E_j,k} = 0 \text{ für } k = 0,\ldots,j\text{-}2 \text{ und für } k = j+1,\ldots,n.$$

Die zu einem Indexvektor $\mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) \in M^n$ aus den $\mathbf{T}^{j}_{E_j}$ gebildete $(n+1)\times n$-Matrix

$$T_{\mathbf{E}} = (\mathbf{T}^{1}_{E_1},\ldots,\mathbf{T}^{n}_{E_n})$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ T^{1}_{E_1,1} & -1 & 0 & & & . \\ . & T^{2}_{E_2,2} & -1 & . & & . \\ . & . & . & -1 & . & . \\ T^{1}_{E_1,j} & & . & T^{j}_{E_j,j} & -1 & 0 \\ . & & & . & . & -1 \\ T^{1}_{E_1,n} & . & . & . & . & T^{n}_{E_n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$$

hat eine „untere Dreiecksgestalt“. Die Bezeichnung ist nicht ganz exakt, da $T_{\mathbf{E}}$ keine quadratische Matrix, sondern eine $(n+1)\times n$-Matrix ist. Die Matrix $T_{\mathbf{E}}$ besteht aus n linear unabhängigen Spalten und hat somit Rang $T_{\mathbf{E}} = n$. Ebenso hat dann auch die zu $\mathbf{E}$ gehörige Matrix

$$L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}^{1}_{E_1},\ldots,\mathbf{S}^{n}_{E_n})$$

vollen Spaltenrang. Der Normalenvektor $\mathbf{P}_{\mathbf{E}} = (P_{\mathbf{E},0},\ldots,P_{\mathbf{E},n})^{\mathsf{T}}$ $(P_{\mathbf{E},n} := 1)$ der Hyperebene

$$H_{\mathbf{E}} = \text{lin } L_{\mathbf{E}} = \text{lin } T_{\mathbf{E}}$$

ist Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{\mathsf{T}} T_{\mathbf{E}} = \mathbf{O}$ und berechnet sich nach der Festlegung $P_{\mathbf{E},n} = 1$ sukzessive für $j = n\text{-}1,\ldots,0$ zu

$$P_{\mathbf{E},n-1} = T^{n}_{E_n,n} P_{\mathbf{E},n} > 0,$$

$$\ldots$$

$$P_{\mathbf{E},j-1} = T^{j}_{E_j,j} P_{\mathbf{E},j} + \ldots + T^{j}_{E_j,n} P_{\mathbf{E},n} > 0 \qquad (j = n,\ldots,1),$$

$$\ldots$$

$$P_{\mathbf{E},0} = T^{1}_{E_1,1} P_{\mathbf{E},1} + \ldots + T^{1}_{E_1,n} P_{\mathbf{E},n} > 0.$$

Supplementsystem aus Kassageschäften

Analog wird das Supplementsystem L aus j-**periodischen Kassageschäften** durch die folgenden Zahlungsstromstrukturen gebildet:

$$\mathbf{K}^{1}_{E_1} = (K^{1}_{E_1,0}, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}},$$

$$\mathbf{K}^{2}_{E_2} = (K^{2}_{E_2,0}, K^{2}_{E_2,1}, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}},$$

$$\ldots$$
$$\mathbf{K}_{E_j}^{j} = (K_{E_j,0}^{j}, K_{E_j,1}^{j}, \ldots, K_{E_j,j-1}^{j}, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}},$$
$$\ldots$$
$$\mathbf{K}_{E_n}^{n} = (K_{E_n,0}^{n}, K_{E_n,1}^{n}, \ldots, K_{E_n,n-1}^{n}, 1)^{\mathsf{T}},$$

mit den Vorzeichenbedingungen $K_{E_j,0}^{j} < 0$, $K_{E_j,k}^{j} \le 0$ für $k = 1,\ldots,j\text{-}1$, und den Komponenten $K_{E_j,j}^{j} = 1$, $K_{E_j,k}^{j} = 0$ für $k = j+1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n$, $E_j \in M = \{H,S\}$.
Als Spezialfall sind hier die j-periodischen Kassageschäfte

$$\mathbf{K}_{E_j}^{j} = (K_{E_j,0}^{j}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} = K_{E_j,0}^{j} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{j+1} \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

mit $K_{E_j,k}^{j} = 0$ für $k \ne 0, j$ enthalten, die in Abschnitt 6.2 bei der Replizierung eines Zahlungsstroms auf seinen Kapitalwert verwendet werden.

Die zu einem Indexvektor $\mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) \in M^n$ aus den $\mathbf{K}_{E_j}^{j}$ gebildete $(n+1)$xn-Matrix

$$K_{\mathbf{E}} = (\mathbf{K}_{E_1}^{1}, \ldots, \mathbf{K}_{E_n}^{n})$$
$$= \begin{pmatrix} K_{E_1,0}^{1} & K_{E_2,0}^{2} & . & . & . & K_{E_n,0}^{n} \\ 1 & K_{E_2,1}^{2} & . & & . & K_{E_n,1}^{n} \\ 0 & 1 & & & & . \\ . & . & 1 & K_{E_{j+1},j}^{j+1} & . & K_{E_n,j}^{n} \\ . & & . & . & & \\ . & & & . & 1 & K_{E_n,n-1}^{n} \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\mathsf{x}n}$$

hat eine „obere Dreiecksgestalt“. Die Bezeichnung ist nicht ganz exakt, da $K_{\mathbf{E}}$ keine quadratische Matrix, sondern eine $(n+1)$xn-Matrix ist. Die Matrix $K_{\mathbf{E}}$ besteht aus n linear unabhängigen Spalten und hat somit Rang $K_{\mathbf{E}} = n$. Ebenso hat dann auch die Matrix

$$L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}_{E_1}^{1}, \ldots, \mathbf{S}_{E_n}^{n})$$

vollen Spaltenrang. Der Normalenvektor $\mathbf{P}_{\mathbf{E}} = (P_{\mathbf{E},0},\ldots,P_{\mathbf{E},n})^{\mathsf{T}}$ ($P_{\mathbf{E},0} := 1$) der Hyperebene

$$H_{\mathbf{E}} = \text{lin } L_{\mathbf{E}} = \text{lin } K_{\mathbf{E}}$$

ist Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^{\mathsf{T}} K_{\mathbf{E}} = \mathbf{O}$ und berechnet sich nach der Festlegung $P_{\mathbf{E},0} := 1$ sukzessive für $j = 1,\ldots,n$ zu

$$P_{\mathbf{E},1} = -\, K_{E_1,0}^{1} P_{\mathbf{E},0} > 0,$$
$$P_{\mathbf{E},j} = -\, K_{E_j,0}^{j} P_{\mathbf{E},0} - K_{E_j,1}^{j} P_{\mathbf{E},1} \ldots - K_{E_j,j-1}^{j} P_{\mathbf{E},j\text{-}1} > 0 \qquad (j = 2,\ldots n).$$

Literaturverzeichnis

Klassische Finanzmathematik

Altrogge G. (1999), Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag, München Wien.

Caprano E., Gierl A. (1992), Finanzmathematik, Vahlen Verlag, München, 5. Auflage.

Caprano E., Wimmer K. (1999), Finanzmathematik, Vahlen Verlag, München, 6. Auflage.

Herzberger J. (1999), Einführung in die Finanzmathemartik, Oldenbourg Verlag, München Wien.

Kober J., Knöll H.-D., Rometsch U. (1992), Finanzmathematische Effektivzins-Berechnungsmethoden, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Wien Zürich.

Köhler H. (1992), Finanzmathematik, Hanser Verlag, München Wien, 3. Auflage.

Kruschwitz L. (2006), Finanzmathematik, Vahlen Verlag, München, 4. Auflage.

Locarek H. (1992), Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage.

Pfeifer A. (1995), Praktische Finanzmathematik, Harri Deutsch Verlag, Thun und Frankfurt am Main.

Tietze J. (1999), Einführung in die Finanzmathematik, Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden, 2. Auflage.

Stochastische Finanzmathematik

Bäuerle N., Rieder U. (2017), Finanzmathematik in diskreter Zeit, Springer Spektrum, Berlin.

Deck T. (2006), Der Itô-Kalkül, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Deutsch H.-P. (2008), Derivate und Interne Modelle, Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart.

Hausmann W., Diener K., Käsler J. (2002), Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection, Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden.

Hull J.C. (2012), Optionen, Futures und andere Derivate, Pearson Deutschland, 8. Auflage.

Kallsen J. (2009), Einführung in die zeitdiskrete Finanzmathematik, Vorlesungsskript der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel; http://www.math.uni-kiel.de/numerik/kallsen/lehre/ws-2009-2010/math-fin/MaFin_2008_WS_Skript.pdf, Stand 04.07.2014.

Korn R., Korn E. (1999), Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung, Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden.

Korn R. (2014), Moderne Finanzmathematik – Theorie und praktische Anwendung, Springer Spektrum, Wiesbaden.

Kremer J. (2006), Einführung in die Diskrete Finanzmathematik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1. Auflage.

Kremer J. (2011), Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Pleier R. (2018), Diskrete stochastische Finanzmathematik, Pro Business Verlag, Berlin.

Reitz S. (2011), Mathematik in der modernen Finanzwelt, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden.

Rudolph B., Schäfer K. (2010), Derivate Finanzinstrumente, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Sandmann K. (2010), Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Trautmann S. (2007), Investitionen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Investitions- und Finanzierungstheorie

Altrogge G. (1996), Investition, Oldenbourg Verlag, München Wien, 4. Auflage.

Blohm H., Lüder K. (1995), Investition, Vahlen Verlag, München, 8. Auflage.

Cannaday R.E., Colwell P.F., Paley H. (1986), Relevant and Irrelevant Internal Rates of Return, The Engineering Economist, Volume 32 – Number 1.

Eisenführ F. (1993), Beurteilungskriterien für Investitions- und Finanzierungsalternativen bei gegebenen Kapitalkosten, in Gebhart G., Gerke W., Steiner M. (HBF), S. 99–119.

Fisher I. (1932), Die Zinstheorie, Deutsche Übersetzung von H. Schulz, Gustav Fischer Verlag, Jena.

Gebhart G., Gerke W., Steiner M. (1993), Handbuch des Finanzmanagements (HBF), Beck Verlag, München.

Gerke W., Bank M. (1998), Finanzierung, Grundlagen für die Investitions- und Finanzierungsentscheidungen in Unternehmen, Kohlhammer Verlag, Stuttgart Berlin Köln.

Gerke W., Steiner M. (1995), Handwörterbuch des Bank- und Finanzwesens (HWF), Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 2. Auflage.

Götze U. (2008), Investitionsrechnung, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 6. Auflage.

Grob H.L. (1999), Einführung in die Investitionsrechnung, Vahlen Verlag, München, 3. Auflage.

Hax H. (1993), Investitionstheorie, Physika Verlag, Heidelberg, 5. Auflage.

Heister M. (1962), Rentabilitätsanalyse von Investitionen, Westdeutscher Verlag, Köln Opladen.

Jarrow R.A. (1988), Finance Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Kilger W. (1965), Zur Kritik am internen Zinsfuß, Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB) Band 35, S.765–798.

Kruschwitz L. (1976), Vermögensstreben und Einkommensstreben bei sich gegenseitig ausschließenden Investitionsalternativen, Diskussionspapier 19, hrsg. vom Institut für Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Berlin.

Kruschwitz L. (1998), Investitionsrechnung, Oldenbourg Verlag, München Wien, 7. Auflage; 15. Auflage 2019.

Kruschwitz L. (1999), Finanzierung und Investition, Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage.

Marusev A. W. (1988), Die Marktzinsmethode im Tagesgeschäft der Banken. In: Schierenbeck, Schimmelmann, Rolfes (Hrsg), Bank-Controlling 1988, Fritz Knapp Verlag, Frankfurt am Main, S. 59–68.

Schäfer D., Kruschwitz L., Schwake M. (1998), Studienbuch Finanzierung und Investition, Oldenbourg Verlag, München, 2. Auflage.

Schierenbeck H. (1994), Bank- und Versicherungslexikon, Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage.

Schierenbeck H., Schimmelmann W.v., Rolfes B. (1988), Bank-Controlling, Beiträge zum Münsteraner Controlling-Workshop, Fritz Knapp Verlag, Frankfurt am Main.

Sievi Ch. (1995), Kalkulation und Disposition, Gillardon Verlag, Bretten.

Uhlir H., Steiner P. (1994), Wertpapieranalyse, Physika Verlag, Heidelberg, 3. Auflage.

Entscheidungstheorie

Eisenführ F., Weber M. (2003), Rationales Entscheiden, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 4. Auflage.

Laux H. (2007), Entscheidungstheorie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 7. Auflage.

Mathematik

Aigner M., Ziegler G. M. (2004), Das Buch der Beweise, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Bauer H. (1992), Maß- und Integrationstheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 2. Auflage.

Bauer H. (2002), Wahrscheinlichkeitstheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 5. Auflage.

Borgwardt K.H. (2001), Optimierung, Operations Research, Spieltheorie, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin.

Bröcker T. (2004), Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Birkhäuser Verlag, Basel, 2. Auflage.

Collatz L., Wetterling W. (1971), Optimierungsaufgaben, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage.

Deiser O. (2013), Analysis 1, Mathematik für das Lehramt, 2. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg. http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis1_3_2_Z3. Zugegriffen am 04.08.2020

Deiser O. (2014), Analysis 2, Mathematik für das Lehramt, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg. http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis2. Zugegriffen am 23.08.2020.

Erwe F. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Faigle U. (2006), Einführung in die Mathematik des Operations Research, pdf-Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 2006, www.zaik.uni-koeln.de/AFS: Stand: 19.07.2011.

Faigle U. (2009), Einführung in die Mathematik des Operations Research, pdf-Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 2009, www.zaik.uni-koeln.de/AFS: Stand: 19.07.2011.

Franz W. (1968), Tolopogie Band I – Allgemeine Topologie, Sammlung Göschen, Walter de Gruyter Verlag, Berlin.

Grauert H., Fischer W. (1968), Differential- und Integralrechnung II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Grauert H., Lieb I. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Hildebrandt S. (2006), Analysis 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Jarre F., Stoer J. (2004), Optimierung, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Jungnickel D. (2008), Optimierungsmethoden, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Köhler G. (2006), Analysis, Heldermann Verlag, Lemgo.

Kowalsky H.-J. (1967), Lineare Algebra, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 3. Auflage.

Mangoldt H.v., Knopp K. (1974), Einführung in die Höhere Mathematik, Band 2, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.

Rockafellar R.T. (1970), Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton New Jersey.

Stoer J. (1994), Numerische Mathematik 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 7. Auflage.

Stoer J., Bulirsch R. (1990), Numerische Mathematik 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3. Auflage.

Stoer J., Witzgall C. (1970), Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Wagner R. (1981), Grundzüge der linearen Algebra, Teubner Verlag, Stuttgart.

Wolfram S. (1997), Das Mathematica-Buch, Addison-Wesley-Longman Verlag, 3. Auflage.

Lexika zur Mathematik

Arens T., Hettlich F., Karpfinger Ch., Kockelkorn U., Lichtenegger K., Stachel H. (2010), Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 2. Auflage.

Bronstein I.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Mühlig H. (1997), Taschenbuch der Mathematik; Harri Deutsch Verlag, Thun Frankfurt am Main, 3. Auflage.

dtv-Atlas zur Mathematik (1994), 2 Bände, Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 10. bzw. 9. Auflage.

Duden (1985), Rechnen und Mathematik, Das Lexikon für Schule und Praxis, Bibliographisches Institut, Mannheim, 4. Auflage.

Gellert W., Kästner H., Neuber S. (1990), Lexikon der Mathematik, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 5. Auflage.

Lexikon der Mathematik (2000–2003), Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin: Band 1 – 6.

Naas J., Schmid H.L. (1961), Mathematisches Wörterbuch Band I – II, Akademie Verlag Berlin und Teubner Verlag Leipzig.

Teubner-Taschenbuch der Mathematik (1996 u. 1995), Teubner Verlag; Stuttgart Leipzig: Teil 1 und 2.

Vieweg Mathematik Lexikon (1995), Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden, 3. Auflage.

Weitere Literatur

Bartsch G. (1994), Die NWO-Bewegung Silvio Gesells, Geschichtlicher Grundriss 1891–1992/93, Gauke Verlag, Lütjenburg.

Duden (2003), Das große Fremdwörterbuch, Duden-Verlag, Mannheim Leipzig.

Sachverzeichnis

A

B

C

D

G

H

I

J

K

L

M

S

T

U

V

W