Ein streng monotoner Effektivzinssatz

Rudolf Pleier
Juni 2015

Für die in der Praxis verbreitete Ansicht, dass bei einer Finanzierung höhere Kreditgebühren[1] bzw. höhere Rückzahlungen einen höheren Effektivzinsfaktor und umgekehrt Tilgungszuschüsse einen niedrigeren Effektivzinsfaktor bewirken, kann zunächst für **reguläre Finanzierungen** und dann noch für sog. **NU-Finanzierungen** eine mathematische Begründung gegeben werden. Dabei ist eine reguläre Finanzierung definitionsgemäß eine Finanzierung $\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 > 0$) mit genau einem Vorzeichenwechsel in der Zahlungsfolge $(X_j)_{j=0,\ldots,n}$: Es gibt einen Index $m \in \{1,\ldots,n\}$ mit

$$X_0 > 0, \quad X_j \geq 0 \text{ für } j = 1,\ldots,m\text{-}1,\ X_m < 0, \quad X_j \leq 0 \text{ für } j = m\text{+}1,\ldots,n.$$

Eine NU-Finanzierung besitzt für ihre Barwertfunktion $B_n(q) = B_n(\mathbf{X},q)$ genau eine positive Nullstelle q_X, die außerdem noch eine Vorzeichenwechselstelle ist. Aufgrund des Grenzwertverhaltens der Barwertfunktion an den Grenzen des Intervalls $]0,\infty[$ besitzt die Barwertfunktion die Vorzeichenverteilung

$$B_n(\mathbf{X},q) < 0 \text{ für } q \in\ ]0,q_\mathrm{X}[\text{ und } B_n(\mathbf{X},q) > 0 \text{ für } q \in\ ]q_\mathrm{X},\infty[.$$

Bei der (strengen) Monotonie der Effektivzinsfaktor-Funktion (Interner Zinsfaktor-Funktion) $q_{int}(\mathbf{X})$ werden nur Argumente (unabhängige Variable) $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet, die mittels der natürlichen Halbordnung $\geq$ (bzw. der strengen Halbordnung $\gneq\ = \geq \cap \neq$) verglichen werden können.

Satz 1 Die streng monotone Abhängigkeit des Effektivzinssatzes einer regulären Finanzierung von Gebühren bzw. von Tilgungszuschüssen

1) Erhält man bei einer vorgegebenen regulären Finanzierung $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($Y_0 > 0$) durch die Vereinbarung von zu allen Zeitpunkten $j = 0,\ldots,n$ möglichen zusätzlichen Gebühren $G_j \geq 0$ wieder eine reguläre Finanzierung

   $$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D},\ \ \mathbf{D} = -\,\mathbf{G} \lneq \mathbf{O},$$

   so erhöht sich der nominelle Kreditzinsfaktor (Nominalzinsfaktor, interne Zinsfaktor) $q_\mathrm{Y} = q_{int}(\mathbf{Y})$ des nominellen Zahlungsstroms $\mathbf{Y}$ auf den größeren Effektivzinsfaktor $q_\mathrm{X} = q_{int}(\mathbf{X})$ des effektiven Zahlungsstroms $\mathbf{X}$:

   $$q_\mathrm{X} > q_\mathrm{Y}.$$

2) Werden dagegen zur regulären Finanzierung $\mathbf{Y}$ noch zusätzlich Tilgungszuschüsse $B_j \geq 0$ vereinbart und ist auch der resultierende Zahlungsstrom

   $$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{D},\ \ \mathbf{D} = +\,\mathbf{B} \gneq \mathbf{O},$$

   noch eine reguläre Finanzierung, so erniedrigt sich der Kreditzinsfaktor $q_\mathrm{Y} = q_{int}(\mathbf{Y})$ von $\mathbf{Y}$ auf den kleineren Effektivzinsfaktor $q_\mathrm{X} = q_{int}(\mathbf{X})$ von $\mathbf{X}$:

   $$q_\mathrm{X} < q_\mathrm{Y}.$$

Die gleichzeitige Hinzunahme von Gebühren und Zuschüssen ist hier nicht zugelassen.

3) Insgesamt erhält man aus 1) und 2) für direkt vergleichbare reguläre Finanzierungen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$) und ihre eindeutig bestimmten positiven internen Zinsfaktoren $q_\mathrm{X} = q_{int}(\mathbf{X})$ und $q_\mathrm{Y} = q_{int}(\mathbf{Y})$ die Aussagen:

[1] Kreditgebühren treten auf mit der Bezeichnung Auszahlungsabschlag (Disagio, Damnum, Abgeld, Zins vorab, einmalige Gebühr), Provision, Schätzkosten, Bereitstellungszinsen, Aufgeld (Agio) auf die Tilgungsraten, Verwaltungskosten, Kontoführungsgebühren, Restschuldversicherung, Darlehensgebühr, Vermittlungsgebühr, Abschlussgebühr, Abwicklungsgebühr und als sogenannte einmalige Kosten.

i) $\mathbf{X} \underset{\cdot}{<} \mathbf{Y} \Leftrightarrow q_X > q_Y$;
ii) $\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{Y} \Leftrightarrow q_X < q_Y$.

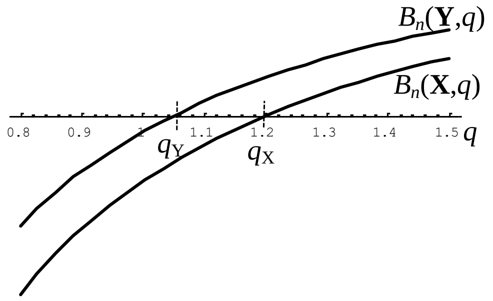

Abb. 1 Die Graphen der Barwertfunktionen $B_n(\mathbf{X},q)$ und $B_n(\mathbf{Y},q)$ der direkt vergleichbaren regulären Finanzierungen **X** und **Y** mit $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$ und den internen Zinsfaktoren $q_X = q_{int}(\mathbf{X}) > q_Y = q_{int}(\mathbf{Y})$

Ein analoger Satz kann auch für direkt vergleichbare **reguläre Investitionen** (Anlagen, $X_0 < 0$) mit Gebühren oder Sparzuschüssen (Boni) formuliert werden. Insgesamt ist dann sowohl für reguläre Finanzierungen als auch für reguläre Investitionen die **Interner Zinsfaktor-Funktion streng monoton**. Sie ist für reguläre Finanzierungen streng monoton fallend und für reguläre Investitionen streng monoton steigend.

Für diesen Satz werden nun zwei **Beweise** angegeben. Ein erster kurzer und einfacher Beweis verwendet die Vorzeichenverteilung der Barwertfunktion einer regulären Finanzierung auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$. Mit diesem ersten Beweisweg lässt sich der Satz auch verallgemeinern auf **NU-Finanzierungen Z** ($Z_0 > 0$) bzw. **NU-Investitionen Z** ($Z_0 < 0$). Für eine NU-Finanzierung **Z** hat die Barwertfunktion $B_n(q) := B_n(\mathbf{Z},q)$ genau die im Beweis beschriebene Vorzeichenverteilung auf der positiven Halbachse: $B_n(q)$ besitzt also genau eine positive Nullstelle. Diese ist noch eine Vorzeichenwechselstelle bzw. eine **N**ullstelle von **u**ngerader Vielfachheit (Ordnung). Durch Beispiele kann gezeigt werden, dass die Aussage des Satzes für einen Zahlungsstrom, der nicht eine NU-Finanzierung oder eine NU-Investition ist, im Allgemeinen nicht gültig ist.
Ein zweiter aufwendigerer Beweis verwendet den Satz über implizite Funktionen, um die Existenz und strenge Monotonie der lokalen Interner Zinsfaktor-Funktion nachzuweisen. Weiter verwendet er, dass die Menge Φ der regulären Finanzierungen wegzusammenhängend ist und je zwei direkt vergleichbare Punkte **X** und **Y** dieser Menge Φ durch eine monoton steigende Kurve verbunden werden können. Der zweite Beweisweg liefert auch noch weitere Aussagen über die lokale Interner Zinsfaktor-Funktion.

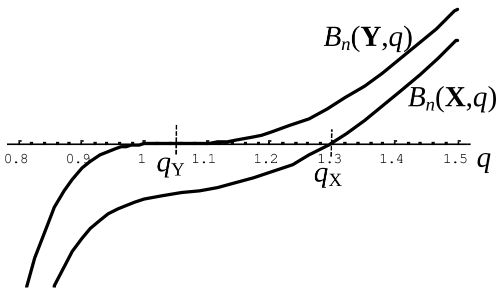

Abb. 2 Die Graphen der Barwertfunktionen $B_n(\mathbf{X},q)$ und $B_n(\mathbf{Y},q)$ der direkt vergleichbaren NU-Finanzierungen **X** und **Y** mit $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \underset{\cdot}{<} \mathbf{O}$ und den internen Zinsfaktoren $q_X = q_{int}(\mathbf{X}) > q_Y = q_{int}(\mathbf{Y})$

1. Beweis für die strenge Monotonie der Interner Zinsfaktor-Funktion bei regulären Finanzierungen bzw. für die Konsistenz des N-Vergleichs (direkten Vergleichs mit der natürlichen Halbordnung) mit dem IV-Vergleich für direkt vergleichbare reguläre Finanzierungen: Für reguläre Finanzierungen **X** und **Y**, die noch (mittels der natürlichen Halbordnung ≥) direkt vergleichbar sind, wird bewiesen, dass aus der Relation $\mathbf{X} \underset{\cdot}{<} \mathbf{Y}$ auch die strenge Ungleichung $q_{int}(\mathbf{X}) > q_{int}(\mathbf{Y})$ folgt. Dies ist die Aussage 1) bzw. 3 i) von Satz 1. Nach den Ergebnissen des Abschnitts 7.1.4 im Buch des Autors für eine reguläre Investition ergibt sich nämlich analog für eine reguläre Finanzierung **Z** die folgende Vorzeichenverteilung für deren Barwertfunktion $B_n(\mathbf{Z},q) = \mathbf{P}(q)^\top\mathbf{Z}$ ($\mathbf{P}(q) = (1,1/q,\ldots,1/q^n)^\top > 0$) auf der positiven Halbachse:

$$B_n(\mathbf{Z},q) > 0 \text{ für } q \in\,]q_{int}(\mathbf{Z}),\infty[,$$
$$B_n(\mathbf{Z},q) < 0 \text{ für } q \in\,]0,q_{int}(\mathbf{Z})[.$$

Für zwei reguläre Finanzierungen **Y** und **X** = **Y** + **D** mit $\mathbf{D} \underset{\cdot}{<} 0$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} B_n(\mathbf{X},q) &= B_n(\mathbf{Y},q) + B_n(\mathbf{D},q) \\ &= B_n(\mathbf{Y},q) + \mathbf{P}(q)^\top\mathbf{D} \\ &< B_n(\mathbf{Y},q)\ \forall\, q > 0. \end{aligned}$$

Da dann insbesondere $B_n(\mathbf{X},q_{int}(\mathbf{Y})) < B_n(\mathbf{Y},q_{int}(\mathbf{Y})) = 0$ gilt, folgt aufgrund der obigen Vorzeichenverteilung für $B_n(\mathbf{X},q)$ dann für die internen Zinsfaktoren die Ungleichung

$$q_{int}(\mathbf{Y}) < q_{int}(\mathbf{X}).$$ □

2. Beweis für die Konsistenz des N-Vergleichs (direkten Vergleichs mit der natürlichen Halbordnung) mit dem IV-Vergleich für direkt vergleichbare reguläre Finanzierungen: Es wird die Aussage 2) bzw. 3 ii) des Satzes 1 für die strenge Monotonie der Interner Zinsfaktor-Funktion für (direkt vergleichbare) reguläre Finanzierungen bewiesen. In Teil a) des Beweises wird gezeigt, dass die Vereinigung zweier aufeinanderfolgender Orthanten der Menge Φ der regulären Finanzierungen wegzusammenhängend ist, in Teil b) wird gezeigt, dass die gesamte Menge Φ der regulären Finanzierungen wegzusammenhängend ist. In Teil c) wird bewiesen, dass die lokale Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}$ partiell streng monoton abnehmend ist. In Teil d) wird bewiesen, dass die globale Interner Zinsfaktor-Funktion q_{int} auf Φ streng monoton abnehmend ist.

a) Eine reguläre Finanzierung **X** mit ihrem einzigen Vorzeichenwechsel in der Zahlungsfolge $(X_j)_{j=0,..,n}$ befindet sich in genau einem der folgenden n Orthanten O_m, $m \in \{1,\ldots,n\}$:

$$O_m := \{\mathbf{X} = (X_0,\ldots,X_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1} : X_0 > 0, X_1 \geq 0, .., X_{m-1} \geq 0, X_m < 0, X_{m+1} \leq 0, .., X_n \leq 0\}.$$

Die Menge Φ der regulären Finanzierungen ist die disjunkte Vereinigung dieser n Orthanten O_m:

$$\Phi := \bigcup_{m=1}^{n} O_m\,.$$

Die Menge Φ ist eine (kurvenweise, pfad-, weg-)zusammenhängende Menge, da je zwei in der Nummerierung aufeinander folgende Orthanten O_m und O_{m+1} ($m = 1,\ldots,n$-1) eine zusammenhängende Vereinigungsmenge $O_m \cup O_{m+1}$ liefern: Zum Beweis wird zu beliebigen zwei Punkten

$$\mathbf{Y} \in O_m \ = \{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1} : Y_0 > 0, Y_1 \geq 0, .., Y_{m-1} \geq 0, Y_m < 0, Y_{m+1} \leq 0, Y_{m+2} \leq 0,.., Y_n \leq 0\},$$

$$\mathbf{X} \in O_{m+1} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : X_0 > 0, X_1 \geq 0, .., X_{m-1} \geq 0, X_m \geq 0, X_{m+1} < 0, X_{m+2} \leq 0, .., X_n \leq 0\}$$

ein Verbindungsweg aus Strecken innerhalb $O_m \cup O_{m+1}$ konstruiert. Man geht dazu aus von $\mathbf{Y} \in O_m$ mit $Y_m < 0$, $Y_{m+1} \leq 0$ und ändert zunächst auf einer Verbindungsstrecke innerhalb des konvexen Orthanten O_m für die Indizes $j = 0,\ldots,m$-1, m+2,…,n die Koordinaten von Y_j in X_j. Man erhält den Zwischenpunkt $\mathbf{Z}^0 \in O_m$ mit $Z_j^0 = X_j$ für $j = 0,\ldots,m$-1,m+2,…,n und unveränderten $Z_j^0 = Y_j$ für $j = m,m$+1. Dann ändert man auf jeder der drei nachfolgenden Strecken jeweils nur eine der Koordinaten Z_m und Z_{m+1}. Im ersten Schritt verändert man innerhalb O_m die Koordinate $Z_{m+1}^0 = Y_{m+1} \leq 0$ in $Z_{m+1}^1 = X_{m+1} < 0$ und erreicht den Punkt $\mathbf{Z}^1 \in O_m$ mit unveränderten $Z_m^1 = Y_m < 0$, $Z_j^1 = X_j$ für $j \neq m,m$+1. In den nächsten beiden Schritten wird die Koordinate Z_m verändert. Im zweiten Schritt verändert man $Z_m^1 = Y_m < 0$ in $Z_m^2 = 0$ und erreicht $\mathbf{Z}^2$ mit unveränderten $Z_{m+1}^2 = X_{m+1} < 0$, $Z_j^2 = X_j$ für

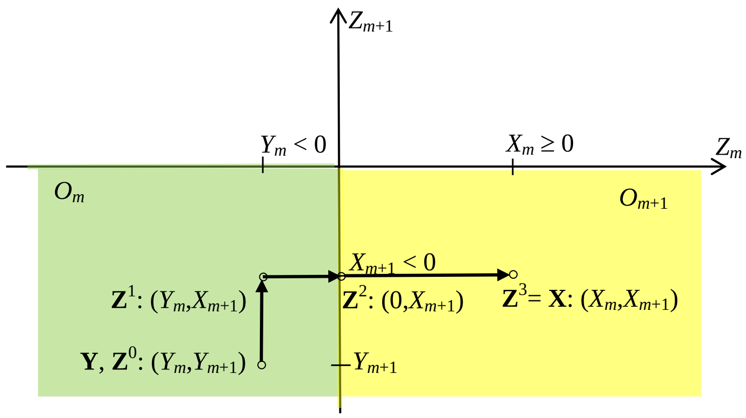

Abb. 3 Ein Verbindungsweg für die zusammenhängenden Orthanten O_m und O_{m+1}

$j \neq m,m+1$. Dies ist ein Randpunkt von O_m und ein Punkt von O_{m+1}. Im dritten Schritt verändert man innerhalb O_{m+1} die Koordinate $Z_m^2 = 0$ in $Z_m^3 = X_m \geq 0$ und gelangt zum Punkt $\mathbf{Z}^3$ mit unveränderten $Z_{m+1}^3 = X_{m+1} < 0$, $Z_j^3 = X_j$ für $j \neq m,m+1$, also zum Punkt $\mathbf{X} \in O_{m+1}$.

b) Weiter wird für die Menge Φ gezeigt, dass zwei direkt vergleichbare Punkte $\mathbf{Y}, \mathbf{X} \in \Phi$, o. E. mit $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$, durch eine innerhalb Φ verlaufende (bezüglich der natürlichen Halbordnung $\geq$) monoton steigende Kurve verbunden werden können.

α) Als Erstes betrachtet man dazu den spezielleren Fall, dass $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}$ im selben Orthanten O_m liegen. Auf Grund der Konvexität des Orthanten liegt dann auch die gesamte Verbindungsstrecke in O_m. Die Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke von $\mathbf{Y}$ nach $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{Y} + \mu\mathbf{D},\ \mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y},\ \mu \in I = [0,1],$$

ist eine stetig differenzierbare Funktion mit $\mathbf{W}(0) = \mathbf{Y}$, $\mathbf{W}(1) = \mathbf{X}$ und $\mathbf{W}'(\mu) = \mathbf{D} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$. Die Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ ist monoton steigend, da für $0 \leq \mu \leq \mu' \leq 1$ die Ungleichung $\mathbf{W}(\mu') - \mathbf{W}(\mu) = (\mu' - \mu)\mathbf{D} \geq \mathbf{O}$ erfüllt ist.

β) Als Zweites wird der allgemeinere Fall behandelt, dass $\mathbf{Y}, \mathbf{X} \in \Phi$, o. E. mit $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$, in verschiedenen Orthanten O_m und O_k ($m \neq k$) liegen. Es ist zu zeigen, dass die direkt vergleichbaren $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}$ durch eine innerhalb Φ verlaufende monoton steigende Kurve mit einer stetigen Parameterdarstellung

$$\mathbf{W} : \mu \in I = [0,1] \mapsto \mathbf{W}(\mu) \in \Phi,\ \mathbf{W}(0) = \mathbf{Y},\ \mathbf{W}(1) = \mathbf{X},$$

verbunden werden können. Aus $\mathbf{Y} \leq \mathbf{X}$,

$$\mathbf{Y} \in O_m:\quad Y_0 > 0,\quad Y_j \geq 0 \text{ für } j = 1,..,m\text{-}1,\quad Y_m < 0,\quad Y_j \leq 0 \text{ für } j = m+1,..,n,$$
$$\mathbf{X} \in O_k:\quad X_0 > 0,\quad X_j \geq 0 \text{ für } j = 1,..,k\text{-}1,\quad X_k < 0,\quad X_j \leq 0 \text{ für } j = k+1,..,n,$$

folgt insbesondere $Y_k \leq X_k < 0$, aufgrund der Vorzeichenverteilung der Y_j also $k \geq m$ und wegen $k \neq m$ dann $k > m$. Für die Indizes $j \in \{m,\ldots,k\text{-}1\}$ gilt $Y_j \leq 0$ und $X_j \geq 0$, für $j = k$ gilt $Y_k < 0$ und $X_k < 0$. Für einen Induktionsbeweis bestimmt man nun die Indizes $p \in \{m,\ldots,k\}$ mit $Y_p < 0$ und erhält die durchnummerierte Menge $\{p_0,p_1,\ldots,p_r\}$ von Indizes mit $p_0 = m < p_1 < \ldots < p_r = k$. Für die anderen Indizes $q \in \{m,\ldots,k\} \setminus \{p_0,\ldots, p_r\}$ ist also $Y_q = 0$.

In einem vorbereitenden Schritt geht man innerhalb des konvexen Orthanten O_m auf der Verbindungsstrecke von $\mathbf{Y}$ zum Punkt $\mathbf{V}^0$ über, wobei für die Indizes $j = 0,\ldots,m\text{-}1$ die Komponenten $Y_j \geq 0$ in $V_j^0 = X_j \geq 0$ und für die Indizes $j = k+1,\ldots,n$ die Komponenten $Y_j \leq 0$ in $V_j^0 = X_j \leq 0$ jeweils monoton ansteigend geändert werden ($X_j = Y_j + D_j \geq Y_j$). Für die Indizes $j = m,\ldots,k$ bleiben die Komponenten Y_j noch unverändert:

$$\mathbf{V}^0 = (X_0,..,X_{m\text{-}1},Y_m,..,Y_k,X_{k+1},..,X_n)^\mathsf{T} \in O_m.$$

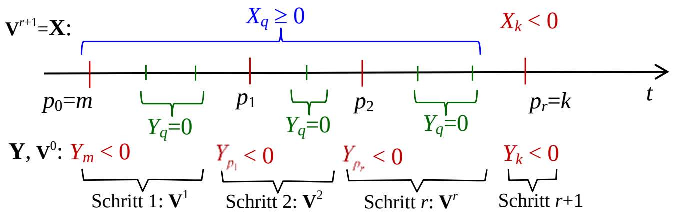

Abb. 4 Die Vorzeichenverteilung der Komponenten Y_q und X_q für $q = m,\ldots,k$

Dann wird für $s = 1,\ldots,r$ sukzessive von $\mathbf{V}^{s\text{-}1} \in O_{p_{s-1}}$ zu $\mathbf{V}^s \in O_{p_s}$ übergegangen. Beispielhaft wird dies ausgeführt für $s = 1$ mit den ersten beiden Indizes $p_0 = m$ und $p_1 =: p$, den Komponenten Y_m, $Y_p < 0$ und $Y_q = 0$ für $m < q < p$. Von $\mathbf{V}^0$ aus geht man (wie oben von $\mathbf{Z}^1$ über $\mathbf{Z}^2$ zu $\mathbf{Z}^3$) auf der Verbindungsstrecke zu $\mathbf{V}^1$ über, wobei zuerst $V_m^0 = Y_m < 0$ über den Wert 0 in $V_m^1 = X_m \geq 0$ und dann für $q = m+1,\ldots,p\text{-}1$ die $V_q^0 = Y_q = 0$ in $V_q^1 = X_q \geq 0$ monoton ansteigend geändert werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^0 = \;& (X_0,..,X_{m\text{-}1},Y_m,0,..,0,Y_p,..,Y_k,X_{k+1},..,X_n)^\mathsf{T} \in O_m\\ \longrightarrow\;& (X_0,..,X_{m\text{-}1},0,0,..,0,Y_p,..,Y_k,X_{k+1},..,X_n)^\mathsf{T} \in O_p\\ \longrightarrow\;& (X_0,..,X_{m\text{-}1},X_m,X_{m+1}..,X_{p\text{-}1},Y_p,..,Y_k,X_{k+1},..,X_n)^\mathsf{T} = \mathbf{V}^1 \in O_p.\end{aligned}$$

Die Komponente $V_p^1 = V_p^0 = Y_p < 0$ wird dabei noch nicht geändert. Durch den einzigen Vorzeichenwechsel beim Übergang von Y_m (< 0) zu X_m (≥ 0) gelangt man dabei innerhalb Φ durch den Randbereich $Z_m = Z_{m+1} = \ldots = Z_{p\text{-}1} = 0$ von O_m, …, $O_{p\text{-}1}$ in den Orthanten O_p. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion erreicht man nach r Schritten innerhalb Φ monoton ansteigend den Punkt $\mathbf{V}^r \in O_k$ mit $V_k^r = Y_k < 0$.

In einem abschließenden (r+1)-ten Schritt erreicht man innerhalb O_k von $\mathbf{V}^r \in O_k$ aus den Punkt $\mathbf{V}^{r+1} = \mathbf{X} \in O_k$, indem man $V_k^r = Y_k < 0$ monoton ansteigend in $V_k^{r+1} = X_k < 0$ ändert. Damit hat man insgesamt eine monoton steigende Verbindungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ von $\mathbf{Y}$ nach $\mathbf{X}$ konstruiert.

c) Als Nächstes werden nun mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen besondere Eigenschaften der global auf Φ definierten VK-Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ hergeleitet, die durch den jeweils eindeutig bestimmten positiven VK-Zinsfaktor (Kreditzinsfaktor, Darlehenszinsfaktor) $q_{int}(\mathbf{X})$ der regulären Finanzierung $\mathbf{X} \in \Phi$ gegeben ist:

$$q_{int} : \mathbf{X} \in \Phi \mapsto q_{int}(\mathbf{X}) \in \,]0,\infty[.$$

Dazu wird die Übereinstimmung der globalen VK-Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ mit einer lokalen impliziten Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ genutzt. Die Endwertfunktion

$$f(X_0,...,X_n,q) = f(\mathbf{X},q) := E_n(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j}$$

ist als Funktion der Variablen $X_j \in \mathbb{R}$ ($j = 0,\ldots,n$) und $q \in \mathbb{R}$ im ganzen Raum $\mathbb{R}^{n+2}$ stetig und (beliebig oft) stetig partiell differenzierbar mit den ersten partiellen Ableitungen

$$f_{X_j}(\mathbf{X},q) = q^{n-j} \qquad (j = 0,1,\ldots,n),$$

$$f_q(\mathbf{X},q) = E_n'(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n-1}(n-j)X_j q^{n-j-1}.$$

Für den positiven VK-Zinsfaktor $q_0 := q_{int}(\mathbf{X}^0)$ einer beliebigen regulären Finanzierung

$$\mathbf{X}^0 = (X_0^0, X_1^0,..., X_n^0)^\top \in \Phi$$

ergibt sich aus der Nichtnegativität der Horner-Schema-Werte $E_j(q_0) = E_j(\mathbf{X}^0,q_0)$ die Positivität der ersten Ableitung der Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X}^0,q)$: Aus der Darstellung der Endwertfunktion

$$E_n(q) = (q - q_0)P_{n-1}(q)$$

mit dem zur Stelle q_0 gehörigen Quotientenpolynom

$$P_{n-1}(q) = a_0q^{n-1} + \ldots + a_{n-1}, \qquad a_j = E_j(q_0) \geq 0 \text{ für } j = 0,\ldots,n-1,$$

erhält man nämlich für deren erste Ableitung die Darstellung

$$E_n'(q) = P_{n-1}(q) + (q - q_0)P_{n-1}'(q)$$

und

$$E_n'(q_0) = P_{n-1}(q_0) \geq a_0q_0^{n-1} = X_0q_0^{n-1} > 0.$$

Da $\mathbf{X}^0 \in \Phi$ beliebig gewählt war, ist somit an den Stellen $(\mathbf{X},q_{int}(\mathbf{X}))$, $\mathbf{X} \in \Phi$, des Graphen

$$\text{graph } q_{int} := \{(\mathbf{X},q_{int}(\mathbf{X})) \in \mathbb{R}^{n+2} : \mathbf{X} \in \Phi\}$$

der VK-Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ die partielle Ableitung der Funktion f nach q von Null verschieden:

$$f_q(\mathbf{X},q_{int}(\mathbf{X})) = E_n'(\mathbf{X},q_{int}(\mathbf{X})) > 0.$$

Wählt man nun wieder eine beliebig fixierte Finanzierung $\mathbf{X}^0 = (X_0^0, X_1^0,..., X_n^0)^\top \in \Phi$ und dazu den VK-Zinsfaktor $q_0 := q_{int}(\mathbf{X}^0) > 0$, so ist also

$$f(\mathbf{X}^0,q_0) = 0 \text{ und } f_q(\mathbf{X}^0,q_0) > 0.$$

Auf Grund der Stetigkeit von $f_q(\mathbf{X},q)$ ist dann $f_q(\mathbf{X},q)$ auch in einer Umgebung W des Punktes $(\mathbf{X}^0,q_0) \in \mathbb{R}^{n+2}$ von Null verschieden und hat dasselbe Vorzeichen wie an der Stelle $(\mathbf{X}^0,q_0)$. Für jedes feste $\bar{\mathbf{X}}$ ist dann $f_q(\bar{\mathbf{X}},q) \neq 0$ und damit $f(\bar{\mathbf{X}},q)$ eine streng monotone Funktion von q, solange $(\bar{\mathbf{X}},q)$ in dieser Umgebung W ist.

Mittels des Satzes über implizite Funktionen aus der Differenzialrechnung folgt, dass es zu q_0 und $\mathbf{X}^0$ Umgebungen $V(q_0)$ und $U(\mathbf{X}^0)$ derart gibt, dass genau eine Funktion

$$\tilde{q} : U(\mathbf{X}^0) \to V(q_0)$$

existiert mit

$$\tilde{q}(\mathbf{X}^0) = q_0,$$

$$f(\mathbf{X},\tilde{q}(\mathbf{X})) = 0 \text{ für alle } \mathbf{X} \in U(\mathbf{X}^0).$$

Die Gleichung $f(\mathbf{X},q) = 0$ mit Anfangswert $\tilde{q}(\mathbf{X}^0) = q_0$ ist also in einer Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ von $\mathbf{X}^0$ eindeutig nach q auflösbar, wenn die Funktionswerte auf eine beliebig klein vorgegebene Umgebung von q_0 begrenzt werden. Die Gleichung definiert auf $U(\mathbf{X}^0)$ eine sogenannte implizite (unentwickelte, nicht explizite) Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$. Die Einzigkeit der Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ auf $U(\mathbf{X}^0)$ ergibt sich aus der konstruktiven Forderung im Beweis des Satzes, dass man die Variable q auf eine beliebig klein vorgebbare Umgebung von q_0 einschränkt. Weiter ergibt sich auch die Stetigkeit der Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ an der Stelle $\mathbf{X}^0$ mit dem vorgegebenen Funktionswert q_0. Man sagt, dass die nachgewiesene lokale implizite Funktion sich durch stetige Fortsetzung aus dem Anfangswert $\tilde{q}(\mathbf{X}^0) = q_0$ ergibt.

Weiter gilt nach diesem Satz, dass diese lokale Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ in der Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ stetig und stetig partiell differenzierbar ist. Durch partielle Differenziation der Gleichung $f(\mathbf{X},\tilde{q}(\mathbf{X})) \equiv 0$ nach X_j erhält man nach der Kettenregel für die Differenziation zusammengesetzter Funktionen noch, dass die Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q} = \tilde{q}(\mathbf{X})$ und ihre partiellen Ableitungen

$$\tilde{q}_{X_j} = \tilde{q}_{X_j}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial X_j}(\mathbf{X})$$

in $U(\mathbf{X}^0)$ die folgenden partiellen Differenzialgleichungen 1. Ordnung erfüllen:

$$f_{X_j}(\mathbf{X},\tilde{q}(\mathbf{X})) + f_q(\mathbf{X},\tilde{q}(\mathbf{X}))\cdot \tilde{q}_{X_j}(\mathbf{X}) = 0 \text{ bzw.}$$

$$\tilde{q}_{X_j} = -\frac{f_{X_j}(\mathbf{X},\tilde{q})}{f_q(\mathbf{X},\tilde{q})} \qquad (j = 0,1,\ldots,n).$$

Den Satz über implizite Funktionen samt Beweis findet man beispielsweise in den Analysis-Lehrbüchern von Erwe, Bd. I (1962), S. 322–333, Grauert und Fischer, Bd. II (1968), S. 92–96, Mangoldt und Knopp, Bd. II (1974), S. 358–378, Köhler (2006), S. 398–402 und Deiser (2014), S. 294–299. Andere Beweise verwenden ein Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differenzialgleichung oder ein Fixpunktproblem, das mittels des Newton-Verfahrens für die Gleichung $f(\mathbf{X},q) = 0$ formuliert wird. Die Kettenregel findet man beispielsweise in den Analysis-Lehrbüchern von Erwe, Bd. I (1962), S. 309f., Grauert und Fischer, Bd. II (1968), S. 54, 80, und Mangoldt und Knopp, Bd. II (1974), S. 343.

Man kann nun wegen $q_0 > 0$ die Umgebung $V(q_0)$ von q_0 so klein wählen, dass sie ganz auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ liegt, und aufgrund der Stetigkeit der Funktion $\tilde{q}\,(\mathbf{X})$ dazu die Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ so weit verkleinern, dass deren Bild wieder in $V(q_0)$ liegt:

$$\tilde{q}\,(U(\mathbf{X}^0)) \subseteq V(q_0) \subseteq\ ]0,\infty[.$$

Für jedes $\mathbf{X} \in U(\mathbf{X}^0) \cap \Phi$ sind also die Funktionswerte $\tilde{q}(\mathbf{X})$ und $q_{int}(\mathbf{X})$ jeweils eine im Intervall $]0,\infty[$ gelegene Nullstelle der zu $\mathbf{X}$ gehörigen Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$. Da $q_{int}(\mathbf{X})$ die einzige positive Nullstelle ist, gilt somit

$$\tilde{q}(\mathbf{X}) = q_{int}(\mathbf{X}) \quad \forall\, \mathbf{X} \in U(\mathbf{X}^0) \cap \Phi.$$

Damit ist auch die globale VK-Zinsfaktor-Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ auf Φ stetig und stetig partiell differenzierbar bezüglich der auf die Definitionsmenge Φ eingeschränkten Topologie (des Umgebungsbegriff) des $\mathbb{R}^{n+1}$. In den Randpunkten $\mathbf{X}^0 \in \Phi$ besitzt $q_{int}(\mathbf{X})$ sogar eine stetige Fortsetzung als Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ auf eine Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ im $\mathbb{R}^{n+1}$. In den Punkten $\mathbf{X} \in \Phi$ besitzt die Funktion $q_{int}(\mathbf{X})$ wegen $q_{int}(\mathbf{X}) > 0$ und $E_n'(q_{int}(\mathbf{X})) > 0$ negative partielle Ableitungen:

$$q_{int,X_j}(\mathbf{X}) = -\frac{f_{X_j}(\mathbf{X}, q_{int}(\mathbf{X}))}{f_q(\mathbf{X}, q_{int}(\mathbf{X}))} = -\frac{q_{int}(\mathbf{X})^{n-j}}{E_n'(q_{int}(\mathbf{X}))} < 0 \qquad (j = 0,1,\ldots,n).$$

Demnach ist der für $\mathbf{X} \in \Phi$ definierte interne Zinsfaktor

$$q_{int}(\mathbf{X}) = q_{int}(X_0,..,X_j,...,X_n) = \Phi_j(X_j)$$

als Funktion von der einen Variablen X_j (bei fest fixierten anderen Variablen X_k, $k \neq j$) eine streng monoton abnehmende Funktion.

d) Als Anwendung dieser Eigenschaft kann man nun die in der obigen Aussage 2) bzw. 3 ii) des Satzes behauptete Abhängigkeit der internen Zinsfaktoren für direkt vergleichbare reguläre Finanzierungen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ beweisen.

Als Erstes betrachtet man dazu den spezielleren **Fall α)**, dass $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ im selben Orthanten O_m liegen und o. E. $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \gtrdot \mathbf{O}$ gilt. Auf Grund der Konvexität des Orthanten liegt dann auch die gesamte Verbindungstrecke in O_m. Die Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke,

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{Y} + \mu\mathbf{D},\ \mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y},\ \mu \in I = [0,1],$$

ist eine stetig differenzierbare Funktion mit $\mathbf{W}(0) = \mathbf{Y}$, $\mathbf{W}(1) = \mathbf{X}$ und $\mathbf{W}'(\mu) = \mathbf{D} \gtrdot \mathbf{O}$. Für den internen Zinsfaktor längs dieser Strecke erhält man die zusammengesetzte Funktion

$$\varphi(\mu) = q_{int}(\mathbf{W}(\mu))$$

mit $\varphi(0) = q_{int}(\mathbf{Y})$ und $\varphi(1) = q_{int}(\mathbf{X})$. Für deren Ableitung $\varphi'(\mu)$ ergibt sich nach der Kettenregel für die Differenziation einer zusammengesetzten Funktion

$$\varphi'(\mu) = \sum_{j=0}^{n} q_{int,X_j}(\mathbf{W}(\mu)) \cdot W_j'(\mu) = \sum_{j=0}^{n} q_{int,X_j}(\mathbf{W}(\mu)) \cdot D_j < 0.$$

Die Ableitung $\varphi'(\mu)$ ist negativ, da die partiellen Ableitungen q_{int,X_j} im Bereich $O_m \subseteq \Phi$ negativ und der Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D}$ schwach positiv ist. Daher ist die Funktion $\varphi(\mu)$ im Intervall $[0,1]$ streng monoton fallend und man erhält für die Funktionswerte an den Intervallgrenzen die Ungleichung

$$q_{int}(\mathbf{X}) = \varphi(1) < \varphi(0) = q_{int}(\mathbf{Y}),$$

also die richtige Ungleichung für die internen Zinsfaktoren von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$.

Als Zweites wird nun der allgemeinere **Fall β)** behandelt, dass $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Phi$ o. E. mit $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \gtrdot \mathbf{O}$ in verschiedenen Orthanten O_m und O_k liegen. Oben wurde bereits begründet, dass $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}$ durch eine innerhalb Φ verlaufende (bezüglich der natürlichen Halbordnung $\geq$) monoton steigende Kurve mit einer stetigen Parameterdarstellung

$$\mathbf{W} : \mu \in I = [0,1] \mapsto \mathbf{W}(\mu) \in \Phi,\ \mathbf{W}(0) = \mathbf{Y},\ \mathbf{W}(1) = \mathbf{X},$$

verbunden werden können. Die Spur $\mathbf{W}(I) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Kurve $\mathbf{W}(\mu)$ ist als das stetige Bild des kompakten (abgeschlossenen und beschränkten) Intervalls I nach einem Satz der Analysis ebenfalls kompakt, also auch überdeckungskompakt (nach Heine-Borel; siehe z. B. Hildebrandt (2003), Bd. 2, S. 94). Nach den obigen Ergebnissen, die mittels des Satzes über implizite Funktionen hergeleitet wurden, existiert zu jedem Kurvenpunkt $\mathbf{W}(\mu) \in \Phi$ eine offene ε-Umgebung $U_{\varepsilon_\mu}(\mathbf{W}(\mu))$, $\varepsilon_\mu > 0$, mit der darin jeweils definierten Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$.

Aus dieser offenen Überdeckung von **W**(I) lässt sich eine endliche Überdeckung auswählen, die zu den Kurvenparametern μ_k ($k = 0,\ldots,m$) mit $\mu_0 = 0$ und $\mu_m = 1$ gehört. Auf Grund der Einzigkeit der lokalen impliziten Funktion in der jeweiligen Umgebung, stimmen die impliziten Funktionen $\tilde{q}_k(\mathbf{X})$ in der Schnittmenge aufeinanderfolgender Umgebungen überein. Damit ist auch auf der monoton ansteigenden Verbindungsstrecke der Kurvenpunkte $\mathbf{W}(\mu_k)$ und $\mathbf{W}(\mu_{k+1})$ die lokale Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ eindeutig definiert und als partielle Funktion der Variablen X_j monoton abnehmend. Analog zu dem vorher betrachteten Fall α) mit der globalen VK-Zinsfaktorfunktion $q_{int}(\mathbf{X})$ auf der Verbindungsstrecke von **X** und **Y** wird hier mit der lokalen Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ auf der Verbindungsstrecke von $\mathbf{W}(\mu_k)$ und $\mathbf{W}(\mu_{k+1})$ aus $\mathbf{D}^k = \mathbf{W}(\mu_{k+1}) - \mathbf{W}(\mu_k) \geq \mathbf{O}$ die folgende Ungleichung für die internen Zinsfaktoren geschlossen:

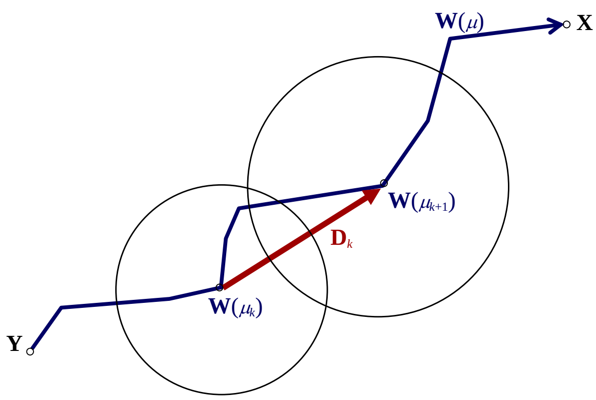

Abb. 5 Zwei aufeinanderfolgende ε-Umgebungen in der endlichen Überdeckung der Spur W(I) der monoton steigenden Verbindungskurve von Y und X

$$q_{int}(\mathbf{W}(\mu_{k+1})) = \tilde{q}(\mathbf{W}(\mu_{k+1})) \leq \tilde{q}(\mathbf{W}(\mu_k)) = q_{int}(\mathbf{W}(\mu_k)).$$

Dabei gilt wegen $\mathbf{X} \underset{\cdot}{>} \mathbf{Y}$ bei mindestens einem Index $k \in \{0,\ldots,m\text{-}1\}$ für den Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D}^k$ die strengere Ungleichung $\mathbf{D}^k \underset{\cdot}{>} \mathbf{O}$ und damit auch die entsprechende strenge Zinsfaktorungleichung. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion erhält man daraus die gewünschte richtige Ungleichung für die VK-Zinsfaktoren von **X** und **Y**, also einen zu dem direkten Vergleich der Zahlungsströme konsistenten I-Vergleich:

$$q_{int}(\mathbf{X}) = q_{int}(\mathbf{W}(\mu_m)) < q_{int}(\mathbf{W}(\mu_0)) = q_{int}(\mathbf{Y}). \qquad \square$$

Anmerkungen zur lokalen Interner Zinsfaktor-Funktion

1) **Existenz einer lokalen Interner Zinsfaktor-Funktion**

Für die obige Anwendung des Satzes über implizite Funktionen zum Nachweis einer lokalen Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ ist die entscheidende Voraussetzung, dass der betrachtete interne Zinsfaktor $q_0 \in \mathbb{R}$ von $\mathbf{X}^0$ ein einfacher interner Zinsfaktor ist, also die erste Ableitung $E_n'(\mathbf{X}^0,q)$ der Endwertfunktion des Zahlungsstroms $\mathbf{X}^0$ an der Stelle $q = q_0$ von Null verschieden ist:

$$E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) \neq 0.$$

Allein diese Voraussetzung genügt für die Existenz einer lokalen stetigen und stetig differenzierbaren Interner Zinsfaktor-Funktion mit Anfangswert q_0. Durch Beispiele wie

$$E_2(q) = (q - 1)^2 \text{ und}$$
$$E_3(q) = (q - 1)^3$$

kann man belegen, dass es bei einem zweifachen oder mehrfachen internen Zinsfaktor im Allgemeinen keine auf einer ganzen Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ definierte und eindeutig bestimmte stetige Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ als Auflösung der Gleichung $f(\mathbf{X},\tilde{q}(\mathbf{X})) = 0$ mit Anfangswert $\tilde{q}(\mathbf{X}^0) = q_0$ gibt.

2) a) **Nullstellenfreie und partiell streng monotone Interner Zinsfaktor-Funktion**

Ist außerdem noch $q_0 \neq 0$, so bleiben in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ von $\mathbf{X}^0$ das Vorzeichen der Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ und auch die Vorzeichen ihrer partiellen Ableitungen $\tilde{q}_{X_j}(\mathbf{X})$ erhalten:

$$\operatorname{sgn} \tilde{q}(\mathbf{X}) = \operatorname{sgn} q_0 \neq 0,$$
$$\operatorname{sgn} \tilde{q}_{X_j}(\mathbf{X}) = -(\operatorname{sgn} q_0)^{n-j} \cdot \operatorname{sgn} E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) \neq 0 \qquad (j = 0,\ldots,n).$$

Bei dem speziellen einfachen internen Zinsfaktor $q_0 = 0$ jedoch kann man durch die Beispiele

$$E_1(q) = q \text{ und}$$
$$E_2(q) = q(q - 1)$$

zeigen, dass in jeder Umgebung von $\mathbf{X}^0$ die Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ das Vorzeichen wechseln kann.

b) **Positive und partiell streng monoton abnehmende Interner Zinsfaktor-Funktion**

Speziell bei

$$q_0 > 0 \text{ und } E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) > 0$$

ist die lokale Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}^0$ in $U(\mathbf{X}^0)$ in $U(\mathbf{X}^0)$ positiv und

$$\Phi_j(X_j) = \tilde{q}(X_0,..,X_j,...,X_n)$$

jeweils als Funktion nur der einen Variablen X_j streng monoton abnehmend. Die Positivität der beiden Größen

q_0 und E_n‘($\mathbf{X}^0$,q_0) wird benötigt, um das gleiche Vorzeichen der partiellen Ableitungen $\tilde{q}_{X_j}(\mathbf{X}^o)$ für alle Indizes $j = 0,\ldots,n$ zu sichern. Analog ist bei

$$q_0 > 0 \text{ und } E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) < 0$$

die lokale Interner Zinsfaktor-Funktion $\Phi_j(X_j)$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{X}^0$ in $U(\mathbf{X}^0)$ jeweils als Funktion der einen Variablen X_j streng monoton zunehmend.

3) **Relevanter interner Zinsfaktor**

Nach dem Vorbild eines positiven Kreditzinsfaktors q_0 einer Finanzierung $\mathbf{X}^0$ ($X_0^0 > 0$, $\mathbf{E}(q_0) = (E_0(q_1),E_1(q_1),\ldots,E_n(q_1))^\top \geq \mathbf{O}$) bzw. eines positiven Anlagezinsfaktors q_0 einer Investition $\mathbf{X}^0$ ($X_0^0 < 0$, $\mathbf{E}(q_0) \leq \mathbf{O}$), für den die im obigen Satz beschriebene schöne Eigenschaft gilt, nämlich dass für alle Indizes $j = 0,\ldots,n$ die lokale Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ jeweils als Funktion einer der Variablen X_j streng monoton abnehmend bzw. zunehmend ist, wurde in der Literatur vorgeschlagen, beim Vorliegen von mehreren internen Zinsfaktoren mittels dieses Kriteriums einen für die Beurteilung der Vorteilhaftigkeit des Zahlungsstrom „brauchbaren“ auszuwählen. Dieser sollte eine sinnvolle Anwendung der Methode des internen Zinssatzes sichern. So wird ein interner Zinsfaktor q_0 einer Investition $\mathbf{X}^0$, für welchen die lokale Interner Zinsfaktor-Funktion jeweils als Funktion nur einer Variablen X_j streng monoton abnehmend ist, bei Herzberger (1999), S. 148f., mit Bezug auf den Artikel von Cannaday et al. (1986) als ein sogenannter **„relevanter“ interner Zinsfaktor** bezeichnet und die für ihn vorliegende Abhängigkeit von Änderungen der Zahlungsstromkomponenten als „ökonomisch richtig“ und „ökonomisch sinnvoll interpretierbar“ unterstellt. Dabei wird also als Richtschnur das Verhalten der Interner Zinsfaktor-Funktion einer regulären Investition $\mathbf{X}^0$ genommen, für welche die Ableitung E_n‘($\mathbf{X}^0$,q_0) der Endwertfunktion an der Stelle des positiven internen Zinsfaktors q_0 negativ ist und somit die partiellen Ableitungen $\tilde{q}_{X_j}(\mathbf{X})$ in der Umgebung von $\mathbf{X}^0$ positiv sind. Analog wird für eine Finanzierung das Verhalten der Interner Zinsfaktor-Funktion einer regulären Finanzierung $\mathbf{X}^0$ als Richtschnur genommen, für welche die Ableitung E_n‘($\mathbf{X}^0$,q_0) der Endwertfunktion an der Stelle des positiven internen Zinsfaktors q_0 positiv ist und somit die partiellen Ableitungen $\tilde{q}_{X_j}(\mathbf{X})$ in einer Umgebung von $\mathbf{X}^0$ negativ sind.

Da jedoch ab einer Laufzeit $n \geq 3$ auch mehrere „relevante“ interne Zinsfaktoren auftreten können, liefert dieses Unterscheidungskriterium für die Auswahl eines einzigen „brauchbaren“ internen Zinsfaktors auch keine Lösung. Dass für eine nichtreguläre Finanzierung auch ein irrelevanter interner Zinsfaktor auftreten kann, zeigen die **Beispiele** der Endwertfunktionen

$$E_2(q) = (q - 1)(q - 2),$$
$$E_3(q) = (q - 1)(q - 2)(q - 3) \text{ und}$$
$$E_2(q) = (q - 1)^2,$$

dass dabei mehrere relevante interne Zinsfaktoren auftreten können, zeigt das zweite Beispiel $E_3(q)$.

a) Für die zur Endwertfunktion

$$E_2(q) = (q - 1)(q - 2)$$

gehörige Finanzierung $\mathbf{X}^0 = (1,-3,+2)^\top$ ist $q_2 = 2$ wegen $E_2'(q_2) = 1 > 0$ ein relevanter interner Zinsfaktor und $q_1 = 1$ wegen $E_2'(q_1) = -1 < 0$ ein irrelevanter interner Zinsfaktor, zu dem zwar in einer Umgebung von $\mathbf{X}^0$ eine lokale Interner Zinsfaktor-Funktion existiert, diese aber die umgekehrte monotone Abhängigkeit von den Komponenten X_j aufweist. △

b) Für die zu

$$E_3(q) = (q - 1)(q - 2)(q - 3)$$

gehörige Finanzierung $\mathbf{X}^0 = (1,-6,+11,-6)^\top$ sind wegen $E_3'(q_1) = 2 > 0$, $E_3'(q_2) = -1 < 0$, $E_3'(q_3) = 2 > 0$ die internen Zinsfaktoren $q_1 = 1$ und $q_3 = 3$ relevant und der interne Zinsfaktor $q_2 = 2$ irrelevant. △

c) Für die zu

$$E_2(q) = (q - 1)^2 = q^2 - 2q + 1$$

gehörige Finanzierung $\mathbf{X}^0 = (1,-2,+2)^\top$ ist $q_0 = 1$ ein zweifacher und irrelevanter interner Zinsfaktor: In jeder Umgebung U($\mathbf{X}^0$) von $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{R}^3$ gibt es nämlich Punkte auf der Geraden

$$\mathbf{X}^\delta = (X_0^\delta, X_1^\delta, X_2^\delta)^\top = (1,-2,1-\delta)^\top = (1,-2,1)^\top - \delta(0,0,1)^\top, \quad \delta \in \mathbb{R},$$

für welche die jeweils zugehörige Endwertfunktion (ein quadratisches Polynom)

$$E_2^\delta(q) = q^2 - 2q + 1 - \delta = (q - q_1^\delta)(q - q_2^\delta)$$

entweder keine reelle Nullstelle oder mehr als eine reelle Nullstelle besitzt: Die beiden komplexwertigen Lösungen der Nullstellengleichung $E_2^\delta(q) = 0$ sind nämlich gegeben durch den Wurzelausdruck

$$q_{1,2}^\delta = \frac{1}{2X_0^\delta}\left[-X_1^\delta \pm \sqrt{\Delta_\delta}\right] = 1 \pm \sqrt{\delta} \in \mathbb{C}$$

mit der Diskriminante

$$\Delta_\delta = (X_1^\delta)^2 - 4X_0^\delta X_2^\delta = 4 - 4(1 - \delta) = 4\delta.$$

Die Diskriminante Δ_δ ist für $\delta < 0$ negativ bzw. für $\delta > 0$ positiv und $E_2^\delta(q)$ besitzt somit keine reelle Nullstelle bzw. zwei reelle Nullstellen. In jeder Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ von $\mathbf{X}^0$ gibt es also Punkte $\mathbf{X} = \mathbf{X}^\delta$, $\delta < 0$, für welche die Gleichung

$$f(\mathbf{X},q) := E_2(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{2} X_j q^{2-j} = 0$$

für kein $q \in \mathbb{R}$ lösbar ist. Darüber hinaus gibt es für jede (beliebig klein wählbare) Umgebung $V(q_0)$ von $q_0 = 1$ und jede (beliebig klein wählbare) Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ von $\mathbf{X}^0$ Werte $q = q_{1,2}^\delta = 1 \pm \sqrt{\delta} \in V(q_0)$, $\delta > 0$, $q_1^\delta \neq q_2^\delta$, und dazu Punkte $\mathbf{X}^\delta \in U(\mathbf{X}^0)$, die verschiedene Lösungen $(\mathbf{X}^\delta, q_1^\delta)$ und $(\mathbf{X}^\delta, q_2^\delta)$ der Gleichung $f(\mathbf{X},q) = 0$ liefern. Eine dieser Feststellungen genügt schon, um zu folgern, dass die Gleichung $f(\mathbf{X},q) = 0$ in keiner Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ von $\mathbf{X}^0$ eindeutig nach q auflösbar ist, wenn dabei die Funktionswerte auf eine beliebig klein vorgegebene Umgebung von q_0 begrenzt werden. Es gibt also keine auf ganz $U(\mathbf{X}^0)$ definierte und eindeutig bestimmte stetige Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ als Auflösung der Gleichung $f(\mathbf{X}, \tilde{q}(\mathbf{X})) = 0$ und mit Anfangswert $\tilde{q}(\mathbf{X}^0) = q_0$. Zum Zahlungsstrom $\mathbf{X}^0$ gibt es also keine lokale stetige interne Zinsfaktorfunktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ mit Anfangswert $\tilde{q}(\mathbf{X}^0) = q_0$. △

In Abschnitt 7.5 des Buchs ‚Finanzmathematik' des Autors wird gezeigt, dass die Auswahl eines für die I-Beurteilung brauchbaren IB-konsistenten internen Zinsfaktors dennoch gelingt, wenn man für die Gesamtvielfachheit der Nullstellen im Intervall $]q_K,\infty[$ überprüft, ob diese ungerade oder gerade ist. Außerdem wird dort begründet, warum der Versuch, mit einem relevanten internen Zinsfaktor einen für den I-Vergleich brauchbaren internen Zinsfaktor zu finden, nicht zum Ziel führt.

4) **Charakterisierung eines relevanten internen Zinsfaktors einer Finanzierung**

Will man sichern, dass an der Stelle $\mathbf{X}^0$ eine lokale Interner Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ existiert, so wird also nach den obigen Ausführungen die Voraussetzung $E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) \neq 0$ benötigt. Soll nun außerdem in einer Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ von $\mathbf{X}^0$ der direkte Vergleich $\mathbf{X} \geq \mathbf{X}^0$ der Finanzierungen $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^0$ mit der „richtigen" Zinsfaktorungleichung $\tilde{q}(\mathbf{X}) \leq \tilde{q}(\mathbf{X}^0)$ einhergehen, so folgt die Nichtpositivität aller partiellen Ableitungen:

$$-(\operatorname{sgn} q_0)^{n-j} \cdot \operatorname{sgn} E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) = \operatorname{sgn} \tilde{q}_{X_j}(\mathbf{X}) \leq 0 \text{ für } j = 0,\ldots,n.$$

Speziell mit dem Index $j = n$ erhält man daraus für die Ableitung der Endwertfunktion die Ungleichung $E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) > 0$ und dann mit dem Index $j = n-1$ für den internen Zinsfaktor die Ungleichung $q_0 \geq 0$. Setzt man für den internen Zinsfaktor q_0 noch $q_0 \neq 0$ voraus, so erhält man die Bedingungen $q_0 > 0$ und $E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) > 0$. Unter den Voraussetzungen $E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) \neq 0$ und $q_0 \neq 0$ wird ein relevanter interner Zinsfaktor q_0 einer Finanzierung $\mathbf{X}^0$ also durch die folgenden beiden Bedingungen charakterisiert:

$$q_0 > 0 \text{ und } E_n'(\mathbf{X}^0,q_0) > 0.$$

5) a) **Positive lokale VK-Zinsfaktor-Funktion**

Ist darüber hinaus $q_0 > 0$ ein VK-Zinsfaktor (Verrechnungskonto-Zinsfaktor, Kreditzinsfaktor, Darlehenszinsfaktor) der Finanzierung $\mathbf{X}^0$ mit positiven Restschulden im Zeitraum $[0,n-1]$,

$$R_j = E_j(\mathbf{X}^0,q_0) > 0 \text{ für } j = 0,1,\ldots,n-1,$$

so existiert eine lokale positive, stetige und stetig differenzierbare VK-Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ mit positiven Restschulden $E_j(\mathbf{X}, \tilde{q}(\mathbf{X}))$ $(j = 0,1,\ldots,n-1)$.

b) **Lokale VK-Zinsfaktor-Funktion**

Ist $q_0 \leq 0$ ein einfacher Kreditzinsfaktor mit positiven Restschulden, dann existiert eine lokale (nicht notwendig negative) stetige und stetig differenzierbare VK-Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ mit positiven Restschulden.

c) **Negative lokale VK-Zinsfaktor-Funktion**

Falls noch $q_0 < 0$ gesichert ist, so existiert eine negative lokale VK-Zinsfaktor-Funktion $\tilde{q}(\mathbf{X})$ mit positiven Restschulden. Falls aber auch nur eine der Restschulden $R_j = E_j(\mathbf{X}^0,q_0)$, $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ den Wert Null aufweist, existiert im Allgemeinen nur eine lokale stetige Interner Zinsfaktor-Funktion und keine VK-Zinsfaktor-Funktion. Dies kann durch das Beispiel der zur Finanzierung $\mathbf{X}^0 = (1,-1,0)^T$ gehörigen Endwertfunktion

$$E_2(q) = q^2 - q$$

mit dem VK-Zinsfaktor $q_0 = 1$ und der ersten Restschuld $E_1(q_0) = 0$ belegt werden. Beweise dieser Aussagen werden in einem noch unveröffentlichten Skript des Autors über die Tilgungsrechnung gegeben.

Literatur

Cannaday R.E., Colwell P.F., Paley H. (1986), Relevant and Irrelevant Internal Rates of Return, The Engineering Economist, Volume 32 - Number 1.

Deiser O. (2014), Analysis 2, Mathematik für das Lehramt, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg. http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis2. Zugegriffen am 23.08.2020.

Erwe F. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Grauert H., Fischer W. (1968), Differential- und Integralrechnung II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Grauert H., Lieb I. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Herzberger J. (1999), Einführung in die Finanzmathemartik, Oldenbourg Verlag, München Wien.

Hildebrandt S. (2006), Analysis 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Köhler G. (2006), Analysis, Heldermann Verlag, Lemgo.

Mangoldt H.v., Knopp K. (1974), Einführung in die Höhere Mathematik, Band 2, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, 2. Auflage, Tredition, Hamburg.