# Liste mit Ergebnissen der zeitdiskreten stochastischen Finanzmathematik

*Rudolf Pleier*

*Juli 2018*

Es folgt eine Liste zur Übersicht über die im Buch hergeleiteten Ergebnisse der diskreten stochastischen Finanzmathematik für das Mehrperiodenmodell, das Mehrperiodenmodell der endfälligen Zahlungsprofile und das Einperiodenmodell. In der zweiten Spalte der Tabelle sind die Seitenzahlen angegeben, wo diese Ergebnisse im Buch zu finden sind. Es werden mathematische Strukturen der Marktmodelle dargestellt, wobei gezeigt wird, wie sich in den Vektorräumen $\mathcal{W}$ der zu bewertenden Zahlungsprofile und $\mathcal{H}_N$ der Handelsstrategien bestimmte Begriffe (Law of One Price, Vollständigkeit und Arbitragefreiheit) in den Lagebeziehungen spezieller Unterräume widerspiegeln.

## Mehrperiodenmodell

<table>
<tr>
<td>

**Darstellungsmatrix** der Abbildung $L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$, die den Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ $\mathcal{F}$-adaptierte reellwertige Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}$ zuordnet, ist die obere Blockbidiagonalmatrix

$$L = \begin{array}{c} \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_t & h_{t+1} & . & h_{T-1} & h_T \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} B_0^\delta & -B_0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & B_1^\delta & -B_1 & . & & & & . \\ . & . & B_2^\delta & -B_{t-1} & . & & & . \\ . & & . & B_t^\delta & -B_t & . & & . \\ . & & & . & B_{t+1}^\delta & . & . & . \\ . & & & & . & . & . & 0 \\ . & & & & & . & B_{T-1}^\delta & -B_{T-1} \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & B_T^\delta \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$$

($n_1 = k_0+k_1+\ldots+k_T$, $m = N\cdot(k_0+k_0+k_1+\ldots+k_{T-1})$) mit den Blöcken $B_t^\delta$ ($t = 0,\ldots,T$) in der Hauptdiagonalen und den Blöcken $-B_t$ ($t = 0,\ldots,T-1$) in der darüber gelegenen Diagonalen. Die Blöcke $B_t^\delta$ und $B_t$ wiederum sind Blockdiagonalmatrizen mit den Blöcken $C_t^\delta(A_{t-1,k})$ bzw. $S_t(A_{t,k})^\top$ in der Hauptdiagonalen:

$$B_t = \begin{array}{c} \begin{matrix} h_{t+1}(A_{t,1}) & h_{t+1}(A_{t,2}) & . & h_{t+1}(A_{t,k_t}) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} S_t(A_{t,1})^\top & 0 & . & 0 \\ 0 & S_t(A_{t,2})^\top & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & S_t(A_{t,k_t})^\top \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{k_t \times Nk_t},$$

$$B_t^\delta = \begin{array}{c} \begin{matrix} h_t(A_{t-1,1}) & h_t(A_{t-1,2}) & . & h_t(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} C_t^\delta(A_{t-1,1}) & 0 & . & 0 \\ 0 & C_t^\delta(A_{t-1,2}) & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & C_t^\delta(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{k_t \times Nk_{t-1}},$$

</td>
<td>S. 38–41</td>
</tr>
</table>

| | |
|---|---|
| $C_t^{\delta}(A_{t-1,k}) = \begin{pmatrix} S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\top} \\ . \\ S_t^{\delta}(A_{t,r})^{\top} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu(t,A_{t-1,k})\times N}$ $(A_{t,m}, \ldots, A_{t,r} \subseteq A_{t\text{-}1,k},\ k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1})$.<br>Einperiodenmodell ($T$ = 1):<br>$B_0^{\delta} = C_0^{\delta}(A_0) = S_0^{\delta}(\Omega)^{\top} = (S_0^{\delta,1}(\Omega),\ldots,S_0^{\delta,N}(\Omega))$,<br>$B_0 = S_0(\Omega)^{\top} = (S_0^{1}(\Omega),\ldots,S_0^{N}(\Omega))$,<br>$B_1^{\delta} = C_1^{\delta}(A_0) = D^{\top} = \begin{pmatrix} S_1^{\delta}(\omega_1)^{\top} \\ . \\ . \\ . \\ S_1^{\delta}(\omega_K)^{\top} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^{\delta,1}(\omega_1) & . & . & S_1^{\delta,N}(\omega_1) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ S_1^{\delta,1}(\omega_K) & . & . & S_1^{\delta,N}(\omega_K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K\times N}$,<br>$L = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\top} & -S_0^{\top} \\ 0 & D^{\top} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+K)\times 2N}$. | |
| Rekursive **Berechnung einer Duplikationsstrategie** $h$ (mit $L(h) = X$) unter Nutzung der oberen Blockbidiagonalstruktur von $L$ und der Blockdiagonalstruktur von $B_t^{\delta}$ und $B_t$ durch das Lösen des hinsichtlich des Zeitindexes $t \in \{T,\ldots,1,0\}$ und hinsichtlich der Partitionsmenge $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ $(k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1})$ gestaffelten linearen Gleichungssystems:<br>(DP$A_{t\text{-}1,k}$) $S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\top} h_t(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m})$ $(A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k})$,<br>$Z_t(A_{t,m}) := X_t(A_{t,m}) + S_t(A_{t,m})^{\top} h_{t+1}(A_{t,m})$, $t = T,\ldots,1$, $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$, $k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$<br>$(h_{T+1} = 0,\ Z_T(A_{T,m}) = X_T(A_{T,m}))$.<br>Die Blockstaffelung des Gleichungssystems ergibt sich, da die Matrix $L$ eine obere Blockbidiagonalstruktur und damit eine obere Blockdreiecksform aufweist.<br>Beispielsweise erhält man für $t = 1$ $(A_{1,m} \subseteq A_0 = \Omega,\ m = 1,\ldots,k_1,\ h_1(\Omega) = h_1 = (h_1^1,\ldots,h_1^N)$ $\in \mathbb{R}^N)$ das einzige Gleichungssystem $(\mathcal{P}_0 = \{\Omega\})$ für $h_1(\Omega)$:<br>(DP$A_{0,1}$) $S_1^{\delta}(A_{1,m})^{\top} h_1(\Omega) = Z_1(A_{1,m})$ $(A_{1,m} \subseteq \Omega)$,<br>bzw. in der Matrizenschreibweise<br>$D^{\top} h_1 = Z_1$.<br>Für $t = 0$ erhält man für $h_0(\Omega) = h_0 = (h_0^1,\ldots,h_0^N) \in \mathbb{R}^N$ nur die einzige Gleichung<br>(DP$A_{\text{-}1,1}$) $S_0^{\delta}(\Omega)^{\top} h_0(\Omega) = Z_0(\Omega)$,<br>die wegen der Voraussetzung $S_0^{\delta} \neq 0$ stets nach $h_0(\Omega)$ auflösbar. Im Falle $N > 1$ ist dabei die Lösung $h_0(\Omega)$ nicht eindeutig bestimmt. | S. 59–63 |
| **Charakterisierung des LOP** (Law of One Price, Gesetz des eindeutig bestimmten Preises),<br>(LOP) $\forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $v_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ ist konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$,<br>durch die Existenz eines **Bewertungsprozesses** $\Psi \in \mathcal{W}$ mit **Preisgleichungen** für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$:<br>(PG$\Psi$) $\Psi^{\top} L(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N$ $(v_0(h) = b^{\top} h = S_0^{\delta\top} h_0)$.<br>Charakterisierungen eines Bewertungsprozesses:<br>• $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Psi_0 = 1$ $(\mathcal{M} = L(\ker V_0))$, | S. 77–80<br>S. 87<br>S. 86 |

| | |
|---|---|
| • $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ $\qquad (b = (S_0^\delta, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T})$.<br><br>Nachweis eines Bewertungsprozesses bei gültigem LOP mittels<br>• Rieszschen Darstellungssatz,<br>• Alternativsatz der konvexen Geometrie (Satz 3.3),<br>• Unterraumstrukturen $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$, $\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \operatorname{lin} \Psi$ $\quad (\mathcal{V} = \{v_0(h)\mathbf{1}_{0,\Omega} : h \in \mathcal{H}_N\})$<br><br>Weitere Charakterisierungen des LOP in Satz 3.4 und Tabelle 3.1 | <br><br>S. 87<br>S. 85, 98<br>S. 99<br><br>S. 86, 133f |
| Für die rekursive **Berechnung eines Bewertungsprozesses** $\Psi$ verwendet man das lineare Gleichungssystem<br>$$\Psi^\mathsf{T} Z = 0 \;\forall\; Z \in \mathrm{M}$$<br>speziell mit dem endlichen Erzeugendensystem<br>$$Z = F^{t,j,k} = -S_{t-1}^j(A_{t-1,k})\mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\mathbf{1}_{t,A_{t,m}}$$<br>($t \in \{1,\ldots,T\}$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$) von M. Man erhält dann das endliche gestaffelte lineare Gleichungssystem<br>$$(\mathrm{GS}\Psi A_{t-1,k}) \qquad \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\Psi_t(A_{t,m}) = \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\, S_{t-1}^j(A_{t-1,k}) \qquad (j = 1,\ldots,N),$$<br>$t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$, mit der Anfangswertbedingung $\Psi_0(A_0) = 1$.<br>Beispielsweise erhält man für $t = 1$ nur das einzige lineare Gleichungssystem<br>$$(\mathrm{GS}\Psi A_0) \qquad \sum_{m=1}^{k_1} S_1^{\delta,j}(A_{1,m})\Psi_1(A_{1,m}) = 1 \cdot S_0^j(A_0) \qquad (j = 1,\ldots,N)$$<br>bzw. die Matrizengleichung<br>$$D\Psi_1 = S_0$$<br>mit dem Vektor $\Psi_1 = (\Psi_1(A_{1,1}), \ldots, \Psi_1(A_{1,k_1}))^\mathsf{T}$ und der Matrix<br>$$D := \left(S_1^\delta(A_{1,1}), \ldots, S_1^\delta(A_{1,k_1})\right) \in \mathbb{R}^{N \times k_1}.$$ | S. 105 |
| **Zusammenhang** zwischen dem LOP im Mehrperiodenmodell und dem LOP in den enthaltenen Einperiodenmodellen:<br><br>a) LOP in allen Einperiodenmodellen $\Rightarrow$ LOP im Mehrperiodenmodell<br>b) LOP im Mehrperiodenmodell $\wedge$ für Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ ist $\Psi_{t-1}(A_{t-1,k}) \neq 0$ für $t \in \{1,\ldots,T\}$, $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ $\Rightarrow$ LOP in den Einperiodenmodellen<br><br>Beispiel 3.4 belegt, dass im Fall $\Psi_{t-1}(A_{t-1,k}) = 0$ ($t > 1$) in dem zum Ausgangsknoten $A_{t-1,k}$ gehörigen Einperiodenmodell das LOP ungültig oder gültig sein kann. | S. 110<br><br><br><br><br><br>S. 112 |
| **Geometrische Bedeutung** der positiven Komponenten $\Psi_t(A_{t,k})$ des Bewertungsprozesses $\Psi$:<br>Nach einem Alternativsatz der konvexen Geometrie (Satz 3.6, S. 119) gilt<br>$$\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi) = \emptyset$$<br>für den Unterraum $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ der Kapitalmarktgeschäfte und den zu den positiven Komponenten $\Psi_t(A_{t,k})$ gehörigen punktierten konvexen Kegel<br>$$\mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi) := \operatorname{cone}\{\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} : (t, A_{t,k}) \text{ mit } \Psi_t(A_{t,k}) > 0\} \setminus \{0\}.$$<br>Damit kann der schrittweise Übergang vom LOP zur Arbitragefreiheit (AF) geometrisch veranschaulicht werden. Mit zunehmender Anzahl der positiven Komponenten $\Psi_t(A_{t,k})$ von $\Psi$ weicht die Hyperebene $\mathcal{M}$ von $L(\mathcal{H}_N)$ einem immer größer werdenden punktierten konvexen Kegel $\mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi)$ aus. Bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) ist dann schließlich $\Psi > 0$ und | S. 116f |

| | |
|---|---|
| $\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gtrdot 0} = \emptyset$<br>mit dem gesamten schwach positiven Orthanten<br>$\mathcal{W}_{\gtrdot 0} := \{X \in \mathcal{W} : X \gtrdot 0$, d. h. $X \geq 0 \wedge X \neq 0\}$.<br><br>Der hier verwendete **Alternativsatz** 3.6 erweist sich auch noch in spezielleren Fassungen (Satz 3.3, S. 85 und Satz 3.8, S. 127) als sehr nützlich mit der unmittelbaren Charakterisierung des LOP, der allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) und der spezielleren Arbitragefreiheit (AFsf): siehe Beweise der Sätze 3.4, 3.9, 5.4, 5.5 und Kap.6/S. 382. | S. 86f, 131, 246, 251 u. 382 |
| **Menge der Bewertungsprozesse** ist der affine Unterraum<br>$\mathcal{M}^{\perp 1} := \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1\} = L^{*-1}(\{b\}) = \Psi' + \ker L^*$<br>mit einem speziellen Bewertungsprozess $\Psi'$. | S. 120 |
| **Maximalzahl affin unabhängiger Bewertungsprozesse**: Es sei $p := \dim \ker L^*$ (= $\dim \mathcal{W} - \dim L^*(\mathcal{W})$). Unter der Voraussetzung des LOP ist $p + 1$ die Maximalzahl affin unabhängiger Bewertungsprozesse. | S. 121 |
| Spezialfall $p = 0$: Ein Marktmodell mit gültigem LOP ist genau dann vollständig, wenn genau ein Bewertungsprozess $\Psi$ existiert. | S. 123, Satz 3.7 |
| Die **Arbitragefreiheit**<br>(AF) $\quad \nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0 \wedge L(h) \gtrdot 0$<br>wird mengentheoretisch beschrieben durch die Disjunktheit des Unterraums $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ der Kapitalmarktgeschäfte und des schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\gtrdot 0}$:<br>$\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gtrdot 0} = \emptyset$. | S. 126 |
| Charakterisierung der Arbitragefreiheit mit dem **Fundamentalsatz der Preistheorie** (**Ersten Hauptsatz der Preistheorie**) im Mehrperiodenmodell durch die Existenz eines Prozesses $\Phi$ im Durchschnitt des (strikt) positiven Orthanten $\mathcal{W}_{>0} := \{X \in \mathcal{W} : X > 0\}$ und des orthogonalen Komplements $\mathcal{M}^{\perp}$ von $\mathcal{M}$:<br>(AF) $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0}$<br>(o. E. $\Phi_0 = 1$: Ex. e. **Diskontierungsprozesses = pos. Bew.proz.**) | S. 128 |
| Der Satz ist genau die Aussage eines Alternativsatzes der konvexen Geometrie (Satz 3.8), wenn man $\mathcal{M}$ als linearen Unterraum und $\mathcal{W}_{\gtrdot 0}$ als schwach positiven Orthanten wählt. Der verwendete Alternativsatz entspricht dem Satz von Stiemke über lineare Ungleichungssysteme. | S. 127 |
| Weitere Charakterisierungen der Arbitragefreiheit in Satz 3.9 und Tabelle 3.1 | S. 131, 133f |
| Arbitragefreiheit (AF) $\Rightarrow$ (LOP) | S. 89, 125 |
| **Menge der Diskontierungsprozesse** ist das teilweise offene konvexe Polyeder<br>$\mathcal{M}^{\perp 1+} := \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1, X > 0\}$. | |
| **Maximalzahl affin unabhängiger Diskontierungsprozesse** (positiver Bewertungsprozesse): Es sei $p := \dim \ker L^*$ (= $\dim \mathcal{W} - \dim L^*(\mathcal{W})$). Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) ist $p + 1$ die Maximalzahl affin unabhängiger Diskontierungsprozesse. | S. 121 |
| Spezialfall $p = 0$: Charakterisierung der **Vollständigkeit** (VS) eines arbitragefreien Marktmodells mit dem **Zweiten Hauptsatz der Preistheorie** im Mehrperiodenmodell durch die Existenz von genau einem Diskontierungsprozess $\Phi$: | S. 132 Satz 3.10 |

| | |
|---|---|
| $(\mathrm{AF}) \wedge (\mathrm{VS}) \Leftrightarrow \exists_1\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0}$. | |
| Der Unterraum $\mathcal{M}$ als lineare Hülle der einperiodischen Termingeschäfte $$F^{t,j,k} = -S_{t-1}^{j}(A_{t-1,k})\mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + \sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\mathbf{1}_{t,A_{t,m}}$$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$, Erzeugendensystem für $\mathcal{M}$).<br>Bei gültigem LOP ist der Unterraum $\mathcal{M}$ die **Menge der Kapitalmarktgeschäfte** mit dem Preis Null: $$\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) \cap \{\pi(X) = 0\} = L(\mathcal{H}_N) \cap \{\Psi\}^{\perp}.$$ | S. 140<br>S. 139 |

## Mehrperiodenmodell mit endfälligen Zahlungsprofilen

Definition einiger Unterräume:

$$\mathcal{W}(T) := \{X \in W : X_t(A_{t,k}) = 0 \text{ für alle } t \in \{0,\ldots,T\text{-}1\},\ A_{t,k} \in \mathcal{P}_t\}$$

$$= \{X = (0,\ldots,0,X_T)^{\mathrm{T}} : X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}\}$$

= Menge der endfälligen ($\mathcal{F}$-adaptierten) Zahlungsprofile,

$$\mathcal{H}_N^{sf} := \{h \in \mathcal{H}_N : L_0(h) = \ldots = L_{T\text{-}1}(h) = 0\}$$

= Menge der selbstfinanzierenden Handelsstrategien,

$$\mathcal{M}(T) := \mathcal{M} \cap \mathcal{W}(T) = L(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0)$$

= Menge der endfälligen Kapitalmarktgeschäfte, der NE-Geschäfte mit Nulleinsatz zu allen Zeitpunkten $t < T$,

$$\mathcal{V}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \ (\subseteq \mathbb{R}^{\Omega})$$

= Menge der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile,

$$\mathcal{M}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0)$$

= Menge der NE-Zahlungsprofile,

$$\mathcal{V}_0 := \{v_0(h)\mathbf{1}_{\Omega} : h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} \subseteq \operatorname{lin} \mathbf{1}_{\Omega} =: \mathcal{E}_T$$

= Menge der Startkapitaleinsätze der selbstfin. Handelsstrategien

S. 207, 209f

---

**Wichtiger Vorteil** im relativen Marktmodell mit seinem auf $I \times \Omega$ konstanten Numéraire $\tilde{B} = \tilde{S}^N = 1$ oder allgemeiner in einem beliebigen ursprünglichen Marktmodell mit konstantem Numéraire $B = S^N$ gegenüber einem ursprünglichen Marktmodell ohne konstanten Numéraire bei der Arbeit mit selbstfinanzierenden Handelsstrategien:

Der relative kumulierte Gewinn

$$\tilde{K}_T(h) = \sum_{s=1}^{T} \tilde{G}_s(h) = \sum_{s=1}^{T} \Delta \bar{S}_s^{\delta} \cdot \bar{h}_s =: \bar{K}_T(\bar{h})$$

ist nur vom Nichtnumérairenanteil $\bar{h} = (h^1,\ldots,h^{N\text{-}1})^{\mathrm{T}}$ und nicht vom Numéraireanteil $h^N$ der Handelsstrategie $h = (\bar{h}, h^N)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}_N$ abhängig. Demzufolge ist bei beliebiger Wahl der reellen Zahl $\tilde{v}_0$ und der Nichtnuméraire-Handelsstrategie $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N\text{-}1}$ (mit passender Festlegung des Numéraireanteils $h^N$ durch $h_t^N = \tilde{V}_0(h) + \bar{K}_t(\bar{h}) - \bar{S}_t^{\delta} \cdot \bar{h}_t$) die Summe des relativen Startkapitaleinsatzes $\tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega}$ und des relativen kumulierten Gewinns $\bar{K}_T(\bar{h})$ der Handelsstrategie $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N\text{-}1}$ gleich dem relativen Vermögenswert $\tilde{V}_T(h)$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h = (\bar{h}, h^N)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}_N^{sf}$:

$$(\tilde{v}_0, \bar{h}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{N-1} \mapsto \tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \bar{K}_T(\bar{h}) = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$$

mit einem $h = (\bar{h}, h^N)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}_N^{sf}$.

S. 223–226

Als **Folgerung** aus diesem Vorteil des relativen Marktmodells ergibt sich, dass im *dividendenlosen* relativen Marktmodell ein W-Maß $\tilde{Q}$ genau dann ein Martingalmaß (bezüglich des relativen Preisprozesses $\tilde{S}$ und der Filtration $\mathcal{F}$) ist, wenn $\tilde{Q}$ ein nichtnegativer Normalenvektor zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ mit Komponentensumme 1 ist.

S. 240, Satz 5.3b

| | |
|---|---|
| Die **sf-Arbitragefreiheit** (AFsf: Fehlen von selbstfinanzierenden Arbitragegelegenheiten)<br>(AFsf) $\nexists\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0 \wedge V_T(h) \gneq 0$<br>wird mengentheoretisch beschrieben durch die Disjunktheit des Unterraums $\mathcal{M}_T$ und des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0} = \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : X_T \gneq 0$, d. h. $X_T \geq 0 \wedge X_T \neq 0\}$:<br>$\mathcal{M}_T \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0} = \emptyset$. | S. 212 |
| Äquivalenz der **sf-Arbitragefreiheit** (AFsf) des Mehrperiodenmodells zur sf-Arbitragefreiheit der enthaltenen Einperiodenmodelle, falls im Marktmodell ein Numéraire $B = S^N$ existiert.<br>Der Beweis erfolgt im relativen Marktmodell mit dem oben beschriebenen „wichtigen Vorteil“ des relativen Marktmodells. | S. 237, Satz 5.2 |
| Verallgemeinerung des **Ersten Hauptsatzes der Preistheorie** für das Marktmodell der endfälligen Zahlungsprofile mit seiner Charakterisierung der **sf-Arbitragefreiheit** durch die **Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes**. Dieser Satz wurde bisher nur für ein dividendenloses Marktmodell mit Numéraire formuliert.<br>**Verallgemeinerter Satz**: Es sei ein Marktmodell vorgegeben, bei dem kein Numéraire benötigt wird und bei dem auch Dividenden zugelassen sind. Das Marktmodell ist genau dann sf-arbitragefrei, wenn es mindestens einen Normalenvektor<br>$Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$,<br>d. h. einen auf die Komponentensumme $\kappa(X_T) = 1$ **$\kappa$-normierten positiven Normalenvektor** zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile (der Zahlungsprofile mit dem Preis Null), bzw. ein äquivalentes W-Maß $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp}$ gibt. Der Beweis erfolgt mit dem Alternativsatz 3.8 (S. 127).<br>Die analoge Aussage gilt speziell auch für ein relatives Marktmodell: Das relative Marktmodell (evtl. auch dividendenversehen) ist genau dann sf-arbitragefrei, wenn es mindestens einen relativen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor<br>$\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$<br>gibt. Im relativen Marktmodell ist dieser Normalenvektor stets auch ein relativer positiver Bewertungsvektor, also ein **relativer Diskontvektor**, mit dem die Preise der relativen duplizierbaren Zahlungsprofile $\tilde{X}_T \in \tilde{V}_T$ berechnet werden können:<br>$\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = \tilde{Q}^{\top} \tilde{X}_T$.<br>Im ursprünglichen Marktmodell erhält man aus einem positiven Normalenvektor $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ aber erst unter der zusätzlichen Voraussetzung<br>(ZVU) = (AWS$^{\delta}$) $\wedge$ (WS) $\wedge$ (DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$)<br>((AWS$^{\delta}$): $S_0^{\delta} \neq 0$; (WS): $S_t(A_{t,m}) \neq 0\ \forall\, A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$, $t = 0,\ldots,T$-1; (DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$): $\mathbf{1}_{\Omega} = V_T(k) \in \mathcal{V}_T$ mit $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$ und $\kappa_0 := v_0(k) > 0$) oder bei der stärkeren Voraussetzung der Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ und nach der Normierung auf die Komponentensumme $\kappa(X_T) = \kappa_0$ einen **Diskontvektor**<br>$Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$,<br>mit dem die Preise für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T$ berechnet werden können:<br>$\pi(X_T) = Y_T^{\top} X_T$.<br>**Spezialfall**: Die Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit durch die Existenz von mindestens einem äquivalenten Martingalmaß erweist sich damit als Spezialfall: Das *dividendenlose* Marktmodell sei mit einem Numéraire $B := S^N > 0$ ausgestattet. Das Marktmodell ist genau dann sf-arbitragefrei, wenn es mindestens ein äquivalentes Martingalmaß $\tilde{Q}$ bzw. | S. 252, Satz 5.5<br>S. 245<br>S. 245, 252<br>S. 246, Satz 5.4 |

| | |
|---|---|
| einen auf $\kappa(X_T) = 1 = \tilde{\pi}(\mathbf{1}_\Omega)$ $\kappa$-normierten positiven relativen Normalenvektor $\tilde{Q}$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ im relativen Marktmodell gibt: <br> $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$. <br> Die Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit durch die **Existenz eines $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors** zu $\mathcal{M}_T$ ist daher die allgemeinere Aussage. Die Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit durch die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes ist nur der Spezialfall für ein *dividendenloses* relatives Marktmodell oder ein dividendenloses ursprüngliches Marktmodell mit konstantem Numéraire. <br> Speziell bei konstantem Numéraire $B$ (bei dem insbesondere auch $B_T$ deterministisch ist) gilt nach Abschnitt 5.1.7 $\mathcal{M}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T$, sodass ein Normalenvektor von $\mathcal{M}_T$ auch ein Normalenvektor von $\tilde{\mathcal{M}}_T$ ist. | |
| Definition der **sf-Duplizierbarkeit** und der **sf-Vollständigkeit**: <br> Ein zustandsabhängiges reellwertiges Zahlungsprofil $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ heißt **sf-duplizierbar**, wenn $X_T$ übereinstimmt mit dem durch die Abbildung $L_T = V_T : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ vermittelten Zahlungsprofil $V_T(h)$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$: <br> $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \mathcal{V}_T$. <br> Das Marktmodell heißt **sf-vollständig**, wenn *jedes* Zahlungsprofil $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ sf-duplizierbar ist, wenn also der $V_T$-Bildraum der Abbildung $V_T : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ den gesamten Zielraum $\mathbb{R}^\Omega$ ausfüllt. Gleichbedeutend dazu ist, dass jedes endfällige Zahlungsprofil $X = (0,\ldots,0,X_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W}(T)$ mittels der Abbildung $L$ duplizierbar ist: <br> $V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^\Omega$ bzw. $L(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{W}(T)$. | S. 255f |
| **Zusammenhang** zwischen der **sf-Vollständigkeit** im Mehrperiodenmodell und der Vollständigkeit in den enthaltenen Einperiodenmodellen: <br> Falls das Mehrperiodenmodell sf-vollständig ist, so sind alle zu den Ausgangsknoten $A_{T-1,k}$ ($k \in \{1,\ldots,k_{T-1}\}$) des Zeitpunkts $T$-1 gehörigen Einperiodenmodelle vollständig. <br> Für das Marktmodell sei die mathematisch-technische Voraussetzung <br> (WS) $S_t(A_{t,m}) \neq 0 \;\forall\, A_{t,m} \in \mathcal{P}_t,\ t \in \{1,\ldots,T\text{-}1\}$ <br> erfüllt und in allen enthaltenen Einperiodenmodellen das LOP gültig. Es gilt dann: <br> Das Mehrperiodenmodell ist sf-vollständig $\Rightarrow$ Alle enthaltenen Einperiodenmodelle und das gesamte Mehrperiodenmodell sind vollständig. <br> Durch Beispiel 5.1 wird belegt, dass ohne die zusätzliche Voraussetzung des LOP in den Einperiodenmodellen aus der sf-Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells im Allgemeinen nicht die allgemeine Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells bzw. die Vollständigkeit aller Einperiodenmodelle folgt. | S. 257, Satz 5.6 <br><br><br><br><br><br><br> S. 259–263 |
| Verallgemeinerung des **Zweiten Hauptsatzes der Preistheorie** für das Marktmodell der endfälligen Zahlungsprofile mit seiner Charakterisierung der **sf-Vollständigkeit** eines sf-arbitragefreien Marktmodells durch die **Existenz von genau einem äquivalenten Martingalmaß**. Dieser Satz wurde bisher nur für ein dividendenloses Marktmodell mit Numéraire formuliert. <br> **Verallgemeinerter Satz**: Es sei ein sf-arbitragefreies dividendenversehenes Marktmodell vorgegeben, bei dem kein Numéraire benötigt wird. Das Marktmodell ist genau dann sf-vollständig, wenn es genau einen Normalenvektor $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$, d. h. einen auf die Komponentensumme $\kappa(X_T) = 1$ $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ der | <br><br><br><br> S. 269f, Satz 5.8 |

| | |
|---|---|
| NE-Zahlungsprofile, bzw. ein äquivalentes W-Maß $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp}$ gibt.<br>Unter der zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) oder der Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ wird die sf-Vollständigkeit charakterisiert durch die Existenz von genau einem Diskontvektor (positiven Bewertungsvektor) $Y \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$.<br>**Spezialfall**: Die Charakterisierung der sf-Vollständigkeit eines sf-arbitragefreien Marktmodells durch die Existenz von genau einem äquivalenten Martingalmaß erweist sich damit als Spezialfall: Das sf-arbitragefreie dividendenlose Marktmodell sei mit einem Numéraire $B := S^N > 0$ ausgestattet. Das Marktmodell ist genau dann sf-vollständig, wenn es genau ein äquivalentes Martingalmaß $\tilde{Q}$ bzw. einen auf $\kappa(X_T) = 1$ $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor $\tilde{Q}$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ im relativen Marktmodell gibt.<br>Die Charakterisierung der sf-Vollständigkeit eines sf-arbitragefreien Marktmodells durch die **Existenz von genau einem positiven Normalenvektor** zu $\mathcal{M}_T$ ist daher die allgemeinere Aussage. Die Charakterisierung der sf-Vollständigkeit durch die Existenz von genau einem äquivalenten Martingalmaß ist nur der Spezialfall für ein *dividendenloses* relatives Marktmodell oder ein dividendenloses ursprüngliches Marktmodell mit konstantem Numéraire.<br>Die Maximalanzahl affin unabhängiger Diskontvektoren im sf-arbitragefreien Marktmodell wird unten noch behandelt. | S. 265,<br>Satz 5.7 |
| Definition des **Law of One Price** LOPsfT für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofil $X_T \in \mathcal{V}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ $(\subseteq \mathbb{R}^{\Omega})$:<br>(LOPsfT) $\quad v_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ ist konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$.<br>Dieses speziellere LOPsfT ist äquivalent zum allgemeiner definierten LOP in $L(\mathcal{H}_N)$, wonach für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt<br>(LOP) $\quad v_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ ist konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N \cap L^{-1}(\{X\})$.<br>sf-Arbitragefreiheit (AFsf) $\Rightarrow$ LOPsfT bzw. LOP | S. 273<br>S. 274<br>S. 318 |
| Charakterisierung des **LOPsfT** durch die Existenz eines **Bewertungsvektors** $\Psi_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ mit den **Preisgleichungen** für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofil $X_T \in \mathcal{V}_T$:<br>(PG$\Psi_T$) $\quad \Psi_T^{\top} V_T(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$.<br>Nachweis eines Bewertungsvektors bei gültigem LOPsfT durch<br>• Herleitung aus dem Bewertungsprozess $\Psi$ mit seinen Preisgleichungen (PG$\Psi$) in $L(\mathcal{H}_N)$,<br>• Rieszschen Darstellungssatz,<br>• Unterraumstrukturen $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$, $\mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*} \oplus \operatorname{lin} \Psi_T$<br>Weitere Charakterisierungen des LOPsfT in Satz 5.11 und Tabelle 5.1 | S. 275<br>S. 276<br>S. 298, 301<br>S. 314, 326 |
| **Menge aller Bewertungsvektoren** im Marktmodell mit LOPsfT ist der affine Unterraum<br>$\mathcal{A}_T := \vartheta_T + \ker V_T^{sf*} = \{\vartheta_T + \Delta : \Delta \in \ker V_T^{sf*}\} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$<br>mit einem speziellen Bewertungsvektor $\vartheta_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$.<br>Unter der zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) = (AWS$^{\delta}$) $\wedge$ (WS) $\wedge$ (DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$) oder spezieller bei Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ stimmt $\mathcal{A}_T$ überein mit<br>$\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}$ $\qquad (\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_{\Omega}))$.<br>**Maximalzahl affin unabhängiger Bewertungsvektoren**: Im Marktmodell mit LOPsfT sei $p := \dim \ker V_T^{sf*}$. Dann ist (auch ohne zusätzliche Voraussetzung (ZVU)) $p + 1$ die Maximalzahl affin unabhängiger Bewertungsvektoren. | S. 304f<br>S. 305f |

| | |
|---|---|
| **Spezialfall** $p = 0$: Das Marktmodell mit gültigem LOPsfT ist genau dann sf-vollständig, wenn genau ein Bewertungsvektor existiert.<br><br>**Maximalanzahl affin unabhängiger Diskontvektoren**: Im sf-arbitragefreien Marktmodell sei $p := \dim \ker V_T^{sf\,*} = \dim \ker \tilde{V}_T^{sf\,*}$ die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $V_T^{sf\,*}$ bzw. $\tilde{V}_T^{sf\,*}$.<br><br>Im relativen Marktmodell ist dann $p + 1$ die Maximalanzahl affin unabhängiger relativer Diskontvektoren (positiver Bewertungsvektoren)<br>$\tilde{Q}_T^{\,i} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} \qquad (i = 0,\ldots,p).$<br><br>Im ursprünglichen Marktmodell ist $p + 1$ die Maximalanzahl affin unabhängiger auf $\kappa(X_T) = 1$ $\kappa$-normierter positiver Normalenvektoren $\tilde{Q}_T^{\,i}$ zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ :<br>$Q_T^{\,i} \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+} \qquad (i = 0,\ldots,p).$<br>Falls im ursprünglichen Marktmodell noch die Voraussetzung (ZVU) = (AWS$^{\delta}$) $\wedge$ (WS) $\wedge$ (DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$) oder spezieller die Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ gesichert ist, ist $p + 1$ die Maximalanzahl affin unabhängiger Diskontvektoren (positiver Bewertungsvektoren) im ursprünglichem Modell:<br>$Y_T^{\,i} \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} \qquad (i = 0,\ldots,p).$<br><br>Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) ist dann die **Menge aller Diskontvektoren** im Marktmodell mit sf-Arbitragefreiheit (AFsf) das teilweise offene konvexe Polyeder<br>$\mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0,\, X_T > 0\}.$ | S. 269 (Satz 5.8), 311f<br><br>S. 277 , 311f |

## Einperiodenmodell

| | |
|---|---|
| **Darstellungsmatrix** der Abbildung $L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$: $$L = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+K)\times 2N} \text{ mit } D^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} S_1^{\delta}(\omega_1)^{\mathsf{T}} \\ . \\ . \\ . \\ S_1^{\delta}(\omega_K)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K\times N}.$$ | S. 333 |
| Übertragung der im Mehrperiodenmodell hergeleiteten Charakterisierungen der Begriffe Duplizierbarkeit, Vollständigkeit, LOP und Arbitragefreiheit auf das Einperiodenmodell ($T$ = 1) in Tabelle 6.1. | S. 337 |
| Behandlung des Einperiodenmodells in seiner speziellen Darstellung in den niedriger-dimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ mit den Abbildungen $D^{\mathsf{T}}$ und $S_0^{\mathsf{T}}$. | S. 342 |
| **Spezielle Darstellung** der Unterräume $\mathcal{V}_1$, $\ker V_1^{sf*}$, $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_1^{\perp}$ unter den Voraus-setzungen (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ und (WS) $S_0 \neq 0$: <br>$\mathcal{V}_1 := V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$,<br>$\mathcal{V}_1^{\perp} = \ker V_1^{sf*} = \ker D$,<br>$\mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega =: \mathcal{E}_1$,<br>$\mathcal{M}_1 := V_1(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) = D^{\mathsf{T}}(\ker S_0^{\mathsf{T}}) = D^{\mathsf{T}}([S_0]^{\perp})$,<br>$\mathcal{M}_1^{\perp} = D^{-1}([S_0])$ | S. 345<br><br><br><br><br>S. 360 |
| Charakterisierungen des **LOP** im Einperiodenmodell<br>(LOP) $\forall\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ ist konstant $\forall\, h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$<br>mit dem Unterraum $\mathcal{M} = L(\ker V_0) \subseteq \mathbb{R}^{1+K}$ und dem Unterraum $\mathcal{M}_1 = D^{\mathsf{T}}(\ker S_0^{\mathsf{T}}) \subseteq \mathbb{R}^K$:<br>(LOP) $\Leftrightarrow \exists\, \Psi = (\Psi_0,\Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}^{\perp} = \ker L^{\prime\mathsf{T}}$ mit $\Psi_0 = 1$ (**Bewertungsprozess**)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi = (\Psi_0,\Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}: \Psi^{\mathsf{T}} Lh = b^{\mathsf{T}} h \;\forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ (**Preisgleichg.**)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ bzw. $\in \mathcal{M}_1^{\perp}$ mit $D\Psi_1 = S_0$ (**Bewertungsvektor**)<br>$\Leftrightarrow$ (PG$\Psi_1$) $\exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K: \Psi_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = S_0^{\mathsf{T}} h_1 \;\forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N$ (**Preisgleichg.**)<br>Im Einperiodenmodell erhält man aus einem Bewertungsprozess $\Psi$ mit der Komponente $\Psi_1$ einen Bewertungsvektor und umgekehrt aus einem Bewertungsvektor $\Psi_1$ durch Ergänzung mit $\Psi_0 = 1$ auch einen Bewertungsprozess $\Psi = (\Psi_0,\Psi_1)^{\mathsf{T}}$.<br>Weitere Charakterisierungen des LOP im Einperiodenmodell in Satz 6.2 und Tabelle 6.2. | <br><br><br>S. 354f<br><br><br><br><br>S. 363, 385 |
| Die **Menge der Bewertungsvektoren** ist bei gültigem LOP im Einperiodenmodell gegeben durch den affinen Unterraum<br>$\mathcal{A}_1 := \Psi_1 + \ker D = D^{-1}(\{S_0\})$,<br>wobei $\Psi_1$ ein spezieller Bewertungsvektor ist.<br>Die **Maximalzahl affin unabhängiger Bewertungsvektoren** im Einperiodenmodell mit LOP ist $p$ + 1, wenn $p := \dim \ker D = K - \operatorname{Rang} D$ die Dimension des Unterraums $\ker D$ ist.<br>**Spezialfall** $p = 0$: Ein Einperiodenmodell mit gültigem LOP ist genau dann vollständig, wenn es genau einen Bewertungsvektor $\Psi_1$ bzw. genau eine Lösung $\Psi_1$ von $D\Psi_1 = S_0$ gibt. | S. 356<br><br><br><br>S. 357 |

| | |
|---|---|
| Unter der zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) = (AWS$^{\delta}$) $\wedge$ (WS) $\wedge$ (DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$) oder spezieller bei Existenz eines deterministischen Numéraires $B = (B_0,B_1)^{\mathsf{T}}$ stimmt die Menge der Bewertungsvektoren $\mathcal{A}_1$ überein mit<br>$\mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0} := \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\}$ $\quad(\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_{\Omega}))$. | S. 356 |
| Die **Arbitragefreiheit**<br>(AF) $\quad \nexists\, h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0 \wedge Lh = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \gneq 0$<br>im Einperiodenmodell wird mengentheoretisch beschrieben durch die Disjunktheit des Unterraums $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte in $L(\mathbb{R}^{2N}) \subseteq \mathbb{R}^{1+K}$,<br>$\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L'(\mathbb{R}^N)$ mit $L' = \begin{pmatrix} -S_0^{\mathsf{T}} \\ D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$,<br>und des schwach positiven Orthanten<br>$\mathbb{R}^{1+K}_{\gneq 0} = \{X = (X_0,X_1) \in \mathbb{R}^{1+K} : X \gneq 0$, d. h. $X \geq 0 \wedge X \neq 0\}$:<br>(AF) $\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{\gneq 0} = \emptyset$. | S. 349<br><br>S. 376 |
| Charakterisierung der **Arbitragefreiheit** (AF) mit dem **Fundamentalsatz der Preistheorie** (Ersten Hauptsatz der Preistheorie) im Einperiodenmodell durch die Existenz eines Diskontierungsprozesses bzw. eines Diskontvektors:<br>(AF) $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Phi = (\Phi_0,\Phi_1)^{\mathsf{T}} > 0 \wedge \Phi_0 = 1$<br>(**Diskontierungsprozess** = **pos. Bewertungsprozess**)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Phi = (\Phi_0,\Phi_1)^{\mathsf{T}} > 0 \wedge$<br>(PG$\Phi$) $\Phi^{\mathsf{T}} Lh = b^{\mathsf{T}} h \;\; \forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ (**Preisgleichungen**)<br>Der Satz folgt unmittelbar aus einem Alternativsatz der konvexen Geometrie (Satz 3.8 in Abschnitt 3.6, S. 127), der dem Satz von Stiemke entspricht.<br>Als Besonderheit des Einperiodenmodells gibt es auch noch eine Charakterisierung der allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) durch die Existenz eines Diskontvektors:<br>(AF) $\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Phi_1 > 0$ und $D\Phi_1 = S_0$<br>(**Diskontvektor** = **pos. Bewertungsvektor**)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Phi_1 > 0 \wedge$<br>(PG$\Phi_1$) $\Phi_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = S_0^{\mathsf{T}} h_1 \;\; \forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N$ (**Preisgleichungen**)<br>Im Einperiodenmodell erhält man aus einem Diskontierungsprozess $\Phi$ mit der Komponente $\Phi_1$ einen Diskontvektor und umgekehrt aus einem Diskontvektor $\Phi_1$ durch Ergänzung mit $\Phi_0 = 1$ auch einen Diskontierungsprozess $\Phi = (\Phi_0,\Phi_1)^{\mathsf{T}}$.<br>Weitere Charakterisierungen der Arbitragefreiheit in Tabelle 6.2 | S. 377<br>S. 378<br><br>S. 378<br>S. 379<br><br>S. 385–387 |
| Bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) ist die **Menge der Diskontvektoren** (positiven Bewertungsvektoren) das teilweise offene konvexe Polyeder<br>$\mathcal{A}_1^{+} := \mathcal{A}_1 \cap \{X_1 > 0\}$.<br>Die **Maximalzahl affin unabhängiger Diskontvektoren** im arbitragefreien Einperiodenmodell ist $p + 1$, wenn $p := \dim \ker D$ ist.<br>Im **Spezialfall** $p = 0$ liegt ein arbitragefreies vollständiges Einperiodenmodell vor und existiert genau ein Diskontvektor. | S. 381 |

| | |
|---|---|
| Die speziellere **sf-Arbitragefreiheit** (AFsf: Fehlen von selbstfinanzierenden Arbitrage-gelegenheiten)<br>(AFsf) $\nexists\, h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = 0 \wedge L_0(h) = 0 \wedge V_1(h) \underset{\cdot}{>} 0$ bzw.<br>$\nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon S_0{}^\mathsf{T} h_1 = 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \underset{\cdot}{>} 0.$<br>im Einperiodenmodell wird mengentheoretisch beschrieben durch die Disjunktheit des Unterraums $\mathcal{M}_1 = V_1(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) = D^\mathsf{T}(\ker S_0{}^\mathsf{T}) \subseteq \mathbb{R}^K$ der NE-Zahlungsprofile und des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^K_{\underset{\cdot}{>}0} = \{X_1 \in \mathbb{R}^K : X_1 \underset{\cdot}{>} 0\}$:<br>$\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R}^K_{\underset{\cdot}{>}0} = \emptyset.$ | S. 382 |
| Charakterisierung der spezielleren **sf-Arbitragefreiheit** (AFsf) im Einperiodenmodell durch die **Existenz eines positiven $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors** $Q_1$:<br>(AFsf) $\Leftrightarrow \exists\, Q_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp = D^{-1}([S_0])$ mit $Q_1 > 0$ (**pos. $\mathcal{M}_1$-Normalenvektor**)<br>$\Leftrightarrow \exists\, Q_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $Q_1 > 0$ und $DQ_1 = \lambda S_0,\ \lambda = \lambda(Q_1) \in \mathbb{R}$<br>Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Alternativsatz 3.8 von Abschnitt 3.6, S. 127.<br>Wie auch allgemeiner beim Mehrperiodenmodell der endfälligen Zahlungsprofilen (S. 251) folgt im ursprünglichen Einperiodenmodell aus der spezielleren sf-Arbitragefreiheit bzw. aus der Existenz eines positiven $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors $Q_1$ erst unter der **zusätzlichen Voraussetzung**<br>(ZVU) = (AWS$^\delta$) $\wedge$ (WS) $\wedge$ (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$)<br>und nach der Normierung auf die Komponentensumme $\kappa(Q_1) = \kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega)$ (> 0) auch die Existenz eines Diskontvektors (positiven Bewertungsvektors)<br>$\Phi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})$ $(\lambda(\Phi_1) = 1)$,<br>mit dem die Preise für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in \mathcal{V}_1 = D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathbb{R}^K$ berechnet werden können: $\pi(X_1) = \Phi_1{}^\mathsf{T} X_1$. Unter der Voraussetzung (ZVU) ist dann die Menge der Diskontvektoren (positiven Bewertungsvektoren) gegeben durch das teilweise offene konvexe Polyeder<br>$\mathcal{A}_1^+ = \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0+} := \mathcal{M}_1^\perp \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0, X_1 > 0\}$ $(\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega))$.<br>Speziell im Einperiodenmodell folgt dann aber aus der Existenz eines Diskontvektors (positiven Bewertungsvektors) $\Phi_1$ auch schon die Existenz eines Diskontierungsprozesses (positiven Bewertungsprozesses) $\Phi = (1,\Phi_1)^\mathsf{T}$ und damit die allgemeine Arbitragefreiheit (AF).<br>Für diese Äquivalenz der spezielleren Arbitragefreiheit (AFsf) und der allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) kann im Einperiodenmodell als **schwächere hinreichende Bedingung** neben der mathematisch-technischen Voraussetzung<br>(AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$<br>die **Existenz einer gewinnbringenden Investition** $Y = (Y_0,Y_1)^\mathsf{T} = L'k_1 \in \mathcal{M} = L'(\mathbb{R}^N)$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ verwendet werden:<br>(GI) $\exists\, k_1 \in \mathbb{R}^N : Y_0 = -\,S_0{}^\mathsf{T} k_1 < 0,\ Y_1 = D^\mathsf{T} k_1 \underset{\cdot}{>} 0.$<br><br>**Spezialfälle für das Vorliegen von** (GI):<br>1) Es sei speziell das konstante Zahlungsprofil $Y_1 = \mathbf{1}_\Omega = D^\mathsf{T} k_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ duplizierbar mit $Y_0 = -\,S_0{}^\mathsf{T} k_1 < 0$, was das Vorliegen der Bedingung (DPsf$\mathbf{1}_\Omega$) bedeutet, also die $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit von $\mathbf{1}_\Omega$ mit Startkapitaleinsatz $\kappa_0 = v_0(k) = S_0{}^\mathsf{T} k_1 > 0$. Da außerdem (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ vorausgesetzt ist und wegen $S_0{}^\mathsf{T} k_1 > 0$ auch noch (WS) $S_0 \neq 0$ gilt, ist dann im Einperiodenmodell insgesamt die Voraussetzung (ZVU) = (AWS$^\delta$) $\wedge$ (WS) $\wedge$ (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$) erfüllt. | S. 382<br><br><br><br><br>S. 246, 303<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>S. 378f<br><br><br>S. 384 |

| | |
|---|---|
| 2) Falls ein deterministisches Numéraire $S^1 = B = (B_0,B_1)^{\mathsf{T}}$ existiert, ist dann wegen $S_0^{\delta,1} = S_0^1 = B_0 > 0$ und nach Abschnitt 5.3.5 auch die Voraussetzung (ZVU) = (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0 \wedge$ (WS) $S_0 \neq 0 \wedge$ (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$) erfüllt und liegt die gewinnbringende Investition $Y = (-B_0,B_1)^{\mathrm{T}}$ nach Beispiel 3.1 (S. 58) in $\mathcal{M}$. | |