Die Duplizierung und Replizierung zur Beurteilung von sicheren diskreten Zahlungsströmen bei unvollkommenem Kapitalmarkt

Rudolf Pleier

Juni 2015

Die Beurteilung der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit den **klassischen Methoden** (Kapitalwert- bzw. Barwert-, Endwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode) unter Verwendung eines für die Zeitintervalle $[k\text{-}1,k]$ ($k = 1,\ldots,n$) konstanten Kalkulationszinsfaktors $q = q_K > 0$ erfolgt unter der impliziten Prämisse, dass für den Entscheider die Ergänzungsgeschäfte $\mathbf{S}$ des speziellen vollkommenen Kapitalmarkts

$$K = H_{\mathbf{P},0} = [\mathbf{P}]^{\perp} = \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{S} = 0\},$$

mit dem speziellen Preisvektor

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(q) = (1,1/q,\ldots,1/q^n)^{\mathsf{T}},\ q = q_K,$$

zur Verfügung stehen (Pleier 2021, S. 258). Die oben angegebenen Methoden liefern alle die gleiche Präferenzordnung $\trianglerighteq$, die beispielsweise mit der speziellen Barwertfunktion

$$B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}(q)^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} \frac{X_j}{q^j}$$

als Nutzenfunktion beschrieben werden kann:

$$\mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y} \quad (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so vorteilhaft wie } \mathbf{Y})$$
$$\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y}).$$

Etwas allgemeiner beinhaltet die Voraussetzung eines **vollkommenen Kapitalmarkts** K, der noch vollständig[1] und arbitragefrei[2] sei, auch die Existenz eines positiven Preisvektors[3]

$$\mathbf{P} = (d_0,d_1,\ldots,d_n)^{\mathsf{T}} \in K^{\perp} \text{ mit } \mathbf{P} > \mathbf{O} \text{ und } P_0 = d_0 = 1,$$

so dass auch hier $K = H_{\mathbf{P},0}$ ist und die Beurteilung der Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Barwertfunktion

$$B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} = \sum_{j=0}^{n} d_j X_j$$

als Nutzenfunktion erfolgen kann. Der Fall eines vollkommenen Kapitalmarkts ist bei den nachfolgenden Überlegungen als Spezialfall mit enthalten.

Um auch für den Fall eines **unvollkommenen Kapitalmarkts** mit der Berücksichtigung der Geld-Brief-Differenz (bid-ask-spread, bid-offer-spread) zwischen Geldkurs und Briefkurs der Finanzmarktinstrumente eine Beurteilung der Zahlungsströme bereitzustellen, gibt es in der Literatur eine Reihe von Ansätzen für die Konzepte der Duplizierung[4] (Nachbildung, Synthetisierung, additiven Zerlegung) und der Replizierung[5] (Glattstellung, additiven Ergänzung): Fisher (1932), S. 109–120, Heister (1962), S. 36–60, Kruschwitz (1978), S. 47–95, Marusev

[1] Die Vollständigkeit des Kapitalmarkts K sei hier gemäß Kruschwitz (1999), S. 77, definiert und bedeutet $\dim K = n$.

[2] Die Arbitragefreiheit von K bedeutet, dass es in K kein Kapitalmarktgeschäft $\mathbf{S}$ mit $\mathbf{S} \geq \mathbf{O}$, d. h. $\mathbf{S} \geq \mathbf{O}$ und $\mathbf{S} \neq \mathbf{O}$, gibt.

[3] Die Existenz eines positiven Normalenvektors $\mathbf{P}$ von K folgt mit einem Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel, der für den Spezialfall eines linearen Unterraums K dem Alternativsatz von Stiemke über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen entspricht (Pleier 2021, S. 90).

[4] Das Wort Duplizierung ist abgeleitet vom lateinischen duplicare für verdoppeln.

[5] Das Wort Replizierung ist abgeleitet vom lateinischen replicare, das eigentlich „wieder auseinander falten, wieder aufrollen" bedeutet und hier in der Bedeutung „entgegnen, erwidern" verwendet wird.

(1988), S. 59–60, Locarek (1992), 79–81, Kober, Knöll und Rometsch (1992), S. 129–140, 142–149, Eisenführ (1993), S. 118, Uhlir und Steiner (1994), S. 34–37, Sievi (1995), S. 77–85, Grob (1999), S. 91–95, 102–103, 105–106. Diese verschiedenen Varianten werden in der Komponentenschreibweise oder als Tabellenkalkulation angegeben und unterscheiden sich in der Berücksichtigung des Basiszahlungsstroms, der Auswahl der ergänzenden Kapitalmarktgeschäfte und der Wahl der Zielsetzung. Nachfolgend wird nun für die beiden Konzepte jeweils eine ziemlich allgemeine Definition in der Vektorschreibweise dargestellt.

Um für die Zahlungsströme **X** des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Hilfe der Konzepte der Duplizierung und der Replizierung jeweils eine $(n+1)$-dimensionale Präferenzfunktion (Beurteilungsfunktion) zu konstruieren, wird als Erstes eine geeignete **Beurteilungskurve** (Präferenzkurve, Zielsetzungskurve) bereitgestellt, die mit einer (Total-)Ordnung versehen ist. Die Beurteilungskurve beschreibt die Zielsetzung des Entscheiders im Sinne einer standardisierten Festlegung der Zeitpräferenz und präzisiert, wie der Entscheider in Abhängigkeit von einem reellen Parameter $\mu \in J$ die bei der Duplizierung bzw. Replizierung des Zahlungsstroms auftretende Marge (Spanne, Differenz) als Margenzahlungsstrom (Differenzzahlungsstrom) $\mathbf{W}(\mu)$ in $n+1$ Komponenten $W_j(\mu)$ auf die Zahlungszeitpunkte $j = 0,1,\ldots,n$ verteilen will. Die Beurteilungskurve W im $\mathbb{R}^{n+1}$ wird als eine Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen definiert. Dabei ist eine Parameterdarstellung von W eine stetige Abbildung

$$\mathbf{W} : J =]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

eines offenen Intervalls $J =]a,b[$, $-\infty \le a < 0 < b \le +\infty$, in den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$. Weiter wird für eine Parameterdarstellung $\mathbf{W}(\mu)$ von W gefordert, dass sie bezüglich der strengen Halbordnung $\dot{>}$ $(\ge \cap \ne)$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ streng monoton steigend ist:

$$\mu, \mu' \in J, \mu < \mu' \Rightarrow \mathbf{W}(\mu) \;\dot{<}\; \mathbf{W}(\mu').$$

Für zwei Zahlungsströme $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist die Relation $\mathbf{X} \;\dot{>}\; \mathbf{Y}$ definiert durch $\mathbf{X} \ge \mathbf{Y}$ und $\mathbf{X} \ne \mathbf{Y}$. Jede derartige sogenannte inhomogene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ setzt sich additiv zusammen aus dem festen Bezugspunkt $\mathbf{U} := \mathbf{W}(0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und der sog. homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) := \mathbf{W}(\mu) - \mathbf{U}$, die ebenfalls stetig und bezüglich der strengen Halbordnung $\dot{>}$ streng monoton steigend ist und die außerdem noch durch den Nullpunkt verläuft ($\mathbf{V}(0) = \mathbf{O}$):

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu).$$

Eine homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ ist in Abbildung 1 dargestellt. Alle Kurvenpunkte der homogenen Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ sind direkt beurteilbar, d. h. mit **O** vergleichbar:

$$\mathbf{V}(\mu) \;\dot{<}\; \mathbf{O} \text{ für } \mu < 0, \mathbf{V}(0) = \mathbf{O}, \;\; \mathbf{V}(\mu) \;\dot{>}\; \mathbf{O} \text{ für } \mu > 0.$$

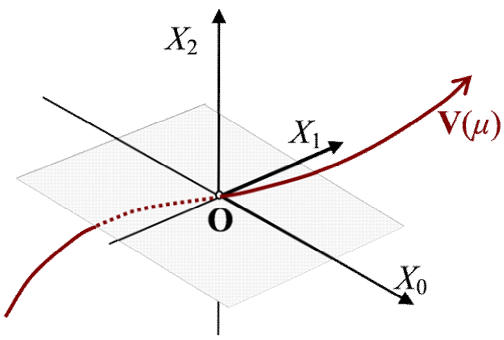


Abb. 1 Eine homogene Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ für die Laufzeit $n = 2$

Für den Nachweis der Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und Replizierung bei Verwendung des vollkommenen Kapitalmarkts oder eines speziellen Supplementsystems[6] des un-

[6] Das Wort Supplement ist abgeleitet vom lateinischen supplementum für Ergänzung und wird hier für ein Ergänzungsgeschäft verwendet.

vollkommenen Kapitalmarkts wird noch die Unbeschränktheit der Beurteilungskurve an den Intervallgrenzen von J gefordert:

$$\|\mathbf{V}(\mu)\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b \text{ und bei } \mu \longrightarrow a.$$

Einfache Beispiele für homogene Beurteilungskurven $\mathbf{V}(\mu)$ sind die linearen Beurteilungskurven

$$\mathbf{V}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{A},\ \mathbf{A} \gneq \mathbf{O},\ \mu \in J = \mathbb{R},$$

und Spezialfälle hiervon die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = (0,\ldots,0,\mu)^{\mathsf{T}}$ zur Endentnahme, die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = (\mu,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$ zur Sofortentnahme und die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu) = (0,\mu,\ldots,\mu)^{\mathsf{T}}$ der Annuitätenentnahme mit der konstanten Annuität μ zu den Zeitpunkten $j = 1,\ldots,n$.
Zwei Parameterdarstellungen $\mathbf{W} : J \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{W}^* : J^* \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißen hierbei äquivalent, wenn es eine Parametertransformation als streng monoton steigende, surjektive und stetige Funktion $g : J^* \longrightarrow J$ gibt, so dass $\mathbf{W}^*$ die Zusammensetzung $\mathbf{W} \circ g$ der Funktionen g und $\mathbf{W}$ ist:

$$\mathbf{W}^*(\mu^*) = \mathbf{W}(g(\mu^*))\ \forall\, \mu^* \in J^* =]a^*,b^*[,\ a^* < 0 < b^*.$$

Zwei Beurteilungskurven W und W^* sind als Äquivalenzklassen genau dann gleich, wenn für ihre Parameterdarstellungen $\mathbf{W}(\mu)$ und $\mathbf{W}^*(\mu^*)$ die Spuren (Bildmengen) $\mathbf{W}(J)$ und $\mathbf{W}^*(J^*)$ übereinstimmen (Pleier 2021, S. 404–406).

Als Zweites wird für die beiden Konzepte der im Allgemeinen unvollkommene Kapitalmarkt $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (i. A. $-K \not\subseteq K$) als konvexer linearer Kegel und als arbitragefrei ($K \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O$) vorausgesetzt, so dass nach dem Alternativsatz für punktierte konvexe Kegel für den Linienraum $V := K \cap (-K)$ von K ein positiver Normalenvektor $\mathbf{P} \in V^{\perp}$ ($P_0 = 1$) existiert. Im Kapitalmarkt K wird ein **Supplementsystem** L vorausgesetzt, aus dem die zulässige Supplementmenge C_{M^n} gebildet wird (Definition siehe unten). Die Kapitalmarktgeschäfte von C_{M^n} sollen dem Entscheider zur Verfügung stehen und bei der Duplizierung bzw. Replizierung als Ergänzungsgeschäfte (Supplemente) dienen, um jedem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau einen beurteilbaren (i.S.v. mit $\mathbf{U} = \mathbf{W}(0)$ vergleichbaren) und mit anderen Margenzahlungsströmen vergleichbaren Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ auf der Beurteilungskurve zuzuordnen.
Bei unvollkommenem Kapitalmarkt setzt sich das Supplementsystem L aus n linear unabhängigen Investitionen (lexikonegativen Zahlungsströmen)

$$\mathbf{I}^j = \mathbf{S}_H^j = (S_{H,0}^j,\ldots,S_{H,n}^j)^{\mathsf{T}}$$

und n linear unabhängigen Finanzierungen (lexikopositiven Zahlungsströmen)

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{S}_S^j = (S_{S,0}^j,\ldots,S_{S,n}^j)^{\mathsf{T}}$$

($j = 1,\ldots,n$) des Kapitalmarkts zusammen:

$$L = \{\mathbf{S}_H^1,\ \ldots,\ \mathbf{S}_H^n, \mathbf{S}_S^1,\ \ldots, \mathbf{S}_S^n\}.$$

Dabei soll auch jedes zu beliebigem Indexvektor $\mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) \in M^n$, $M = \{H,S\}$, gebildete n-Tupel

$$L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}_{E_1}^1,\ldots,\mathbf{S}_{E_n}^n) \in L_1 \times \ldots \times L_n,$$

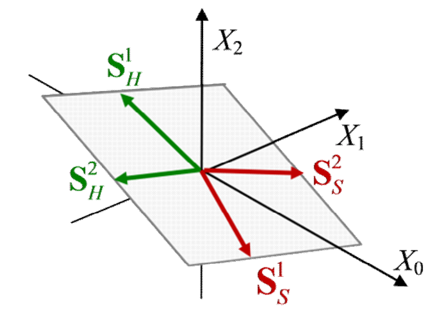
$L_j = \{\mathbf{S}_H^j, \mathbf{S}_S^j\}$, linear unabhängig sein. Die **zulässige Supplementmenge** C_{M^n} wird als der lineare Kegel definiert, der durch die Vereinigung der konvexen linearen Kegel $C_{\mathbf{E}} = \operatorname{cone} L_{\mathbf{E}}$, der sogenannten Transformationskegel (Transaktionskegel), gebildet wird:

$$C_{M^n} := \bigcup_{\mathbf{E}\in M^n} C_{\mathbf{E}}\ .$$

Dieser spezielle Ansatz für die zulässige Supplementmenge beinhaltet das auch bei Kruschwitz (1998), S. 57, verwendete Verbot der gleichzeitigen Durchführung einer Ergänzungsinvestition und einer Ergänzungsfinanzierung.

Die Abbildung 2 zeigt für die Laufzeit $n = 2$ die zulässige Supplementmenge als Ebene bei vollkommenem Kapitalmarkt und als geknickte Ebene bei unvollkommenem Kapitalmarkt.

a)



b)

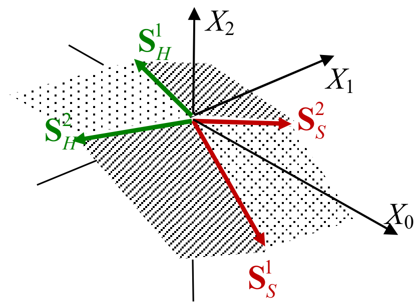


Abb. 2 Das Supplementsystem $L = \{\mathbf{S}_H^1, \mathbf{S}_H^2, \mathbf{S}_S^1, \mathbf{S}_S^2\}$ und die zulässige Supplementmenge $C_{M^2} = C_{(H,H)} \cup C_{(H,S)} \cup C_{(S,H)} \cup C_{(S,S)}$ bei a) vollkommenem und b) unvollkommenem Kapitalmarkt für die Laufzeit $n = 2$

Als Drittes wird vom Supplementsystem L noch verlangt, dass für jede beliebig fest vorgegebene Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ und für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Duplizierung bzw. die Replizierung auf genau eine Weise möglich ist:

Bei der **Duplizierung** eines beliebigen Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})),\ \mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{M^n},$$

und bei der **Replizierung** von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})),\ \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) \in C_{M^n},$$

mit der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ zur Beschreibung der zeitlichen Zielsetzung des Entscheiders, dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B}$ zur Beschreibung der situativen Liquidität des Entscheiders und dem für $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ bzw. $\mathbf{S}‘(\mathbf{X})$ verwendeten Supplementansatz

(SB) $$\mathbf{S} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{S}_{E_j}^j = L_{\mathbf{E}}\boldsymbol{\lambda},$$

$$\mathbf{E} \in M^n,\ \lambda_j \geq 0 \text{ bei } E_j = H \text{ und } \lambda_j > 0 \text{ bei } E_j = S,$$

sind dann also jeweils die Parameter $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, $\mu(\mathbf{X})$ bzw. $v(\mathbf{X}) \in J$ und $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}_{+0}^n$, das Supplement $\mathbf{S} = L_{\mathbf{E}}\boldsymbol{\lambda}$ und der Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ bzw. $\mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$ eindeutig bestimmt.

Auf der Grundlage der **eindeutigen Duplizierung bzw. Replizierung** erhält man auf $\mathbb{R}^{n+1}$ eine **D-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{\mathrm{D}W}$ und eine **R-Präferenzordnung** $\trianglerighteq_{\mathrm{R}W}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{D}W} \mathbf{Y}\ & (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so günstig wie } \mathbf{Y}) \\
& :\Leftrightarrow \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(\mu(\mathbf{Y})) \\
& \Leftrightarrow \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \geq \mathbf{V}(\mu(\mathbf{Y})) \\
& \Leftrightarrow \mu(\mathbf{X}) \geq \mu(\mathbf{X}), \\
\mathbf{X} \trianglerighteq_{\mathrm{R}W} \mathbf{Y}\ & (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so gut wie } \mathbf{Y}) \\
& :\Leftrightarrow \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \geq \mathbf{W}(v(\mathbf{Y})) \\
& \Leftrightarrow \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) \geq \mathbf{V}(v(\mathbf{Y})) \\
& \Leftrightarrow v(\mathbf{X}) \geq v(\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

Außerdem erhält man die $(n+1)$-dimensionalen Präferenzfunktionen (Bewertungsfunktionen)

$$\mathbf{w}_{\mathrm{D}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}_{\mathrm{D}W}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J),$$

$$\mathbf{w}_{\mathrm{R}W} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{w}_{\mathrm{R}W}(\mathbf{X}) := \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J)$$

und die ordinalen Nutzenfunktionen (eindimensionalen Bewertungsfunktionen)

$$\mu_{DW} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mu_{DW}(\mathbf{X}) := \mu(\mathbf{X}) \in J,$$

$$\nu_{RW} : \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \nu_{RW}(\mathbf{X}) := \nu(\mathbf{X}) \in J.$$

Die Abbildung 3 zeigt die Funktionswerte der D- und R-Präferenzfunktion auf der Beurteilungskurve. Im Thema ‚Die eindeutige Duplizierung und Replizierung mit speziellen Supplementsystemen‘ wird dargestellt, dass bei bestimmten Klassen von Supplementsystemen des unvollkommenen Kapitalmarkts die Berechnung des Beurteilungsparameters $\mu_{DW}(\mathbf{X})$ bzw. $\nu_{RW}(\mathbf{X})$ durch die iterative Nullstellenbestimmung für eine streng monotone stetige Hilfsfunktion erfolgen kann.

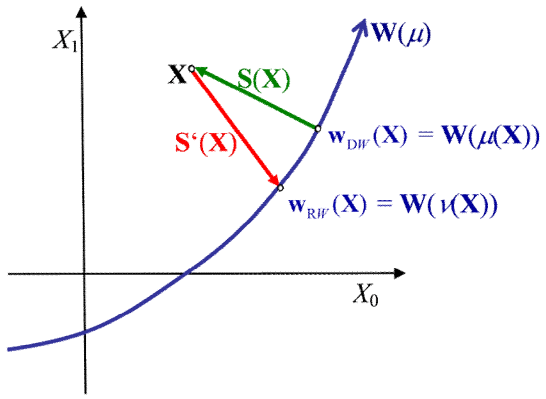


Abb. 3 Die Werte der D-Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{DW}(\mathbf{X})$ und R-Präferenzfunktion $\mathbf{w}_{RW}(\mathbf{X})$ auf der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ $(\mathbf{B} = \mathbf{O}, n = 1)$

In der Abbildung 4 sind die Bessermengen

$$W_{+D}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq_{DW} \mathbf{Y}\},$$

$$W_{+R}(\mathbf{Y}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{X} \trianglerighteq_{RW} \mathbf{Y}\}$$

eines Zahlungsstroms $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezüglich der D-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{DW}$ und der R-Präferenzordnung $\trianglerighteq_{RW}$ bei gleicher Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ dargestellt. Hier sind auch die Differenzmengen $P_{D-R}(\mathbf{Y}) = W_{+D}(\mathbf{Y}) \setminus W_{+R}(\mathbf{Y})$ und $P_{R-D}(\mathbf{Y}) = W_{+R}(\mathbf{Y}) \setminus W_{+D}(\mathbf{Y})$ ersichtlich, auf denen die D-Präferenzordnung und die R-Präferenzordnung unterschiedliche Vergleichsergebnisse für $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ liefern. Die Vielfalt der D- und R-Präferenzordnungen in Abhängigkeit vom Supplementsystem L und von der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ wird im Thema ‚Die Vielfalt der Präferenzordnungen nach den Konzepten der Duplizierung und Replizierung‘ beschrieben.

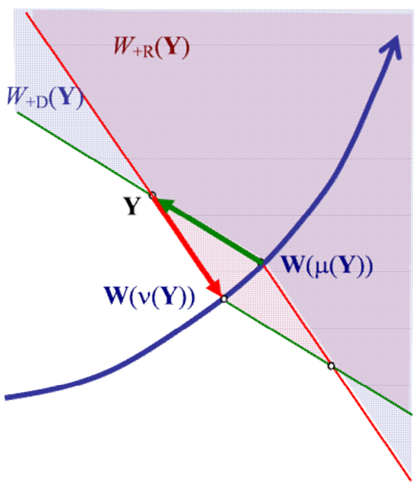


Abb. 4 Die Bessermengen $W_{+D}(\mathbf{Y})$ und $W_{+R}(\mathbf{Y})$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2$ $(n = 1, \mathbf{B} = \mathbf{O})$

In einem einfachen **Beispiel** „Robinson auf dem Kartoffelmarkt“ für einen unvollkommenen Kapitalmarkt werden bei Pleier (2021), S. 35–57, die durch die Konzepte der Duplizierung und Replizierung gewonnenen Präferenzordnungen verglichen.

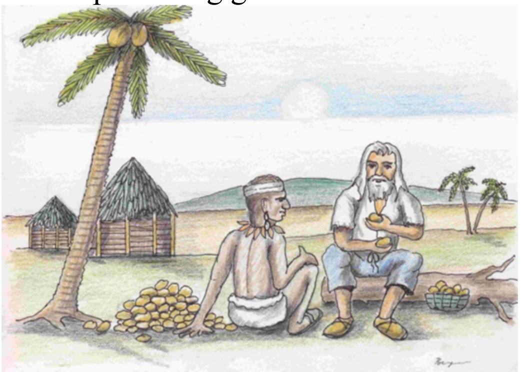


Abb. 5 Robinson auf dem Kartoffelmarkt

Wie eine Entscheidung mit einem der beiden genannten Konzepte zustande kommen kann, wenn kein Kapitalmarkt zur Verfügung steht, wird bei Pleier (2021), S. 11–34, in einem einfachen Beispiel „Robinson beim Fischfang" dargestellt, in dem Robinson die zwei Alternativen "Fischfang heute mit Speer" oder "Fischfang morgen mit Netz" zur Wahl hat.

a) Robinson beim Fischfang mit Speer

b) Robinson beim Fischfang mit Netz

Abb. 6 Robinson beim Fischfang

Im **Spezialfall eines vollkommenen Kapitalmarkts**

$$K = C_{M^n} = H_{\mathbf{P},0} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X} = 0\},\ \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{O}\},$$

liefert jedes n-Tupel $L_\mathbf{E} = (\mathbf{S}^1_{E_1},\ldots,\ \mathbf{S}^n_{E_n})$, $\mathbf{E} \in M^n$, des Supplementsystems L eine Basis $S = L_\mathbf{E}$ der Hyperebene K von $\mathbb{R}^{n+1}$. Umgekehrt erhält man auch aus einer Basis $S = (\mathbf{S}^1,\ldots,\mathbf{S}^n)$ der Hyperebene K des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $L = \{\pm\mathbf{S}^1,\ldots,\pm\mathbf{S}^n\}$ ein Supplementsystem L. Bei arbitragefreiem Kapitalmarkt K kann nach dem Alternativsatz der konvexen Geometrie über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel der Normalenvektor $\mathbf{P}$ der Hyperebene $H_{\mathbf{P},0}$ (strikt) positiv gewählt werden. Der mit $P_0 = 1$ normierte Normalenvektor $\mathbf{P}$ heißt Preisvektor des Kapitalmarkts. Mit der streng monoton steigenden „Abstandsfunktion“

$$\alpha(\mu) := \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{V}(\mu)$$

erhält man die Beurteilungsparameter von $\mathbf{X}$ durch

$$\mu(\mathbf{X}) = \alpha^{-1}(\mathbf{P}^\mathsf{T}\zeta), \quad \zeta := \mathbf{X} - \mathbf{U},$$
$$\nu(\mathbf{X}) = \alpha^{-1}(-\ \mathbf{P}^\mathsf{T}\xi), \quad \xi := \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$$

und somit die Margenzahlungsströme $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ und $\mathbf{W}(\nu(\mathbf{X}))$, ohne die Supplemente $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{S}'(\mathbf{X})$ berechnen zu müssen. Die Berechnung des Beurteilungsparameters $\mu(\mathbf{X})$ bzw. $\nu(\mathbf{X})$ erfolgt dabei im Allgemeinen mit einer iterativen Nullstellenbestimmung für die Funktion $f(\mu) := \alpha(\mu) - \mathbf{P}^\mathsf{T}\zeta$ bzw. $g(\nu) := \alpha(\nu) + \mathbf{P}^\mathsf{T}\xi$.

In diesem Spezialfall stimmen für jede Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu)$ die D- und die R-Präferenzordnung mit der Barwert-Präferenzordnung (**B-Präferenzordnung**) $\trianglerighteq$ überein, so dass der Vergleich zweier Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ auch unabhängig von der Beurteilungskurve mit der Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ als Nutzenfunktion erfolgen kann (Pleier 2021, S. 117f, Satz 4.1):

$$\mathbf{X} \trianglerighteq \mathbf{Y} \ (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so vorteilhaft wie } \mathbf{Y}) \Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y}).$$

Literatur

Eisenführ F. (1993), Beurteilungskriterien für Investitions- und Finanzierungsalternativen bei gegebenen Kapitalkosten, in Gebhart G., Gerke W., Steiner M. (HBF), S. 99–119.

Fisher I. (1932), Die Zinstheorie, Deutsche Übersetzung von H. Schulz, Gustav Fischer Verlag, Jena.

Grob H. L. (1999), Einführung in die Investitionsrechnung, Vahlen Verlag, München, 3. Auflage.

Heister M. (1962), Rentabilitätsanalyse von Investitionen, Westdeutscher Verlag, Köln Opladen.

Kober J., Knöll H.-D., Rometsch U. (1992), Finanzmathematische Effektivzins-Berechnungsmethoden, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim Leipzig Wien Zürich.

Kruschwitz L. (1978), Investitionsrechnung, De Gruyter Verlag, Berlin New York, 1. Auflage; (1998) Oldenbourg Verlag 7. Auflage; (2019) De Gruyter Oldenbourg, Berlin Boston 15. Auflage.

Kruschwitz L. (1999), Finanzierung und Investition, Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage.

Locarek H. (1992), Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage.

Marusev A. W. (1988), Die Marktzinsmethode im Tagesgeschäft der Banken. In: Schierenbeck, Schimmelmann, Rolfes (Hrsg), Bank-Controlling 1988, Fritz Knapp Verlag, Frankfurt am Main, S. 59–68.

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Tredition, Hamburg, 2. Auflage.

Sievi Ch. (1995), Kalkulation und Disposition, Gillardon Verlag, Bretten.

Uhlir H., Steiner P. (1994), Wertpapieranalyse, Physika Verlag, Heidelberg, 3. Auflage.