Das Mehrperiodenmodell zur Bewertung unsicherer zeitdiskreter Zahlungsströme bei vollkommenem Kapitalmarkt

Rudolf Pleier

Juni 2015

Zur Formulierung von Aussagen zur Bewertung nach dem Duplikationsprinzip im Mehrperiodenmodell und zu den zentralen Begriffen Gesetz des eindeutig bestimmten Preises, Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Marktmodells sind zunächst Begriffe zur Beschreibung des zeitdiskreten Marktmodells im Zeitintervall $[0,T]$, bei $T = 1$ des Einperiodenmodells (englisch: one period model) und bei $T > 1$ des Mehrperiodenmodells (englisch: multi-period model), vorzustellen.

Für das Marktmodell werden N Finanzinstrumente (Wertpapiere) S^j ausgewählt und die endlich vielen Kursentwicklungen des Preisvektors

$$S = (S^1,\ldots,S^N)^\top$$

über der Zeitparametermenge $I = \{0,\ldots,T\}$ mathematisch modelliert. Die verschiedenen Kursentwicklungen liefern den endlichen Zustandsraum $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_K\}$ ($|\Omega| = K$), so dass der Preisvektor $S = (S^1,\ldots,S^N)^\top$ ein N-dimensionaler stochastischer Prozess über $I \times \Omega$ ist. Neben dem Preisprozess S wird noch ein Dividendenprozess δ und der kombinierte Prozess $S^\delta = S + \delta$ betrachtet. Der im Zeitverlauf stattfindende Wissenszuwachs über den Preisprozess S wird durch die zugehörige natürliche Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ von Partitionen $\mathcal{P}_t = \{A_{t,1},\ldots,A_{t,k_t}\}$ ($t \in I$, $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$, $\mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$[1]) von Ω bzw. die natürliche Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ von σ-Algebren $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t) = \sigma(S_s;\ s \le t)$ über Ω beschrieben. Damit liegt der Preisprozess S im Untervektorraum $\mathcal{W}_N = \mathcal{W}_N(\mathcal{F})$ der $\mathcal{F}$-adaptierten $\mathbb{R}^N$-wertigen stochastischen Prozesse

$$X = (X_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega} \in (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega},$$

deren Zustandsfunktionen X_t $\mathcal{F}_t$-messbar sind. Für die Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\{\omega\})$ der Kursentwicklungen $\omega \in \Omega$ kann o. B. d. A. deren Positivität vorausgesetzt werden.[2] Es wird sich zeigen, dass diese bei der im Mehrperiodenmodell erfolgenden Bewertung von Zahlungsströmen nicht benötigt werden. Zur Beschreibung eines Portfolios der N Wertpapiere S^j werden sog. Handelsstrategien verwendet, d. h. $\mathcal{F}$-vorhersehbare N-dimensionale Handelsprozesse $h = (h_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega} \in (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega}$, deren Zustandsfunktionen h_t $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar sind. Deren Gesamtheit bildet den in $\mathcal{W}_N$ gelegenen Unterraum $\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_N(\mathcal{F})$. Zur Präzisierung der zeitlichen Entwicklung

---

1 Die Annahme $\mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$ bzw. $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man nach Kühn (2016), S. 37, andernfalls zum Grundraum $\Omega' = \{A_\omega \in \mathcal{F}_T : \omega \in \Omega\}$ übergehen kann, der aus den Atomen $A_\omega = \bigcap_{\omega\in A\in\mathcal{F}_T} A \in \mathcal{F}_T$ ($\omega \in \Omega$) der σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ besteht, und dann $\mathcal{P}_T = \{A_\omega : \omega \in \Omega\}$ erhält.

2 Die Annahme der Positivität der Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\{\omega\})$ für alle Zustände $\omega \in \Omega$ ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man nach Kühn (2016), S. 37, andernfalls zum Teilraum $\Omega' = \{\omega \in \Omega : P(\{\omega\}) > 0\}$, zu den Spur-$\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_T' = \mathcal{F}_T \cap \Omega'$ und $\mathcal{F}_t' = \mathcal{F}_t \cap \Omega'$ ($t \in I$) und zur Restriktion $P' = P\big|_{\mathcal{F}_T'}$ des W-Maßes P auf $\mathcal{F}_T'$ übergeht.

des zur Handelsstrategie h gehörigen Portfoliowertes dienen der Vermögensprozess[3] $V(h) = S^{\delta} \cdot h$, der durch die Zustandsfunktionen $R_t(h) = S_t \cdot h_{t+1}$ $(t \in I)$ definierte Reinvestitionsprozess[4] $R(h)$ und das (Aus-)Zahlungsprofil

$$L(h) = V(h) - R(h).$$

Zur Bewertung mittels des Marktmodells sind nur Zahlungsströme

$$X = (X_t(\omega))_{t \in I, \omega \in \Omega} \in \mathbb{R}^{I \times \Omega}$$

im Vektorraum $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1(\mathcal{F})$ der $\mathcal{F}$-adaptierten reellwertigen stochastischen Prozesse zugelassen. Außerdem soll die Bewertung nach dem **Duplikationsprinzip** erfolgen, bei dem das zu bewertende Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W}$ als das Zahlungsprofil $L(h)$ einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ dupliziert (nachgebildet, erreicht) werden kann: Dabei soll die Übereinstimmung der beiden Zahlungsprofile X und $L(h)$ für alle $t \in I$ und alle $\omega \in \Omega$ gelten, also insbesondere sicher bezüglich der Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der Kursentwicklungen $\omega \in \Omega$. Eine Duplikationsstrategie $h \in L^{-1}(\{X\})$ von X kann dann sicher und linearalgebraisch (also nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch[5]) durch das Lösen des gestaffelten inhomogenen linearen Gleichungssystems

(DP) $\qquad L(h) = X$

bestimmt werden. Eine ausführlichere Darstellung des linearen Gleichungssystems (DP) findet man beim Thema „Die Duplikation als Zahlungsprofil einer Handelsstrategie“.

Falls noch der Portfoliowert $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ bei $t = 0$ für alle Duplikationsstrategien h von X konstant ist, kann der Preis $\pi(X)$ von X bzw. der Wert von X zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den deterministischen Startkapitaleinsatz $V_0(h) = S_0^{\delta}(\Omega)^{\top} h_0(\Omega)$ der Handelsstrategie h zum Zeitpunkt $t = 0$ definiert werden:

$$\pi(X) := V_0(h), \text{ falls } V_0(h) \text{ konstant } \forall\, h \in L^{-1}(\{X\}) \ (\neq \emptyset).$$

Falls nun diese Eigenschaft zumindest für ein $X \in L(\mathcal{H}_N)$ erfüllt ist, so kann gezeigt werden, dass sie dann auch für alle $X \in L(\mathcal{H}_N)$ vorliegt (siehe Beweisabschnitt 11). Im Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ $(\subseteq \mathcal{W})$ des Marktmodells $((S,\delta),\mathcal{F})$ gilt dann das so genannte **Gesetz des eindeutig bestimmten Preises** (englisch: Law of One Price, Abk.: LOP) und alle $X \in L(\mathcal{H}_N)$ können mit der Nutzenfunktion $\pi(X)$ bewertet und verglichen werden:

(LOP) $\qquad$ Für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt: $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$.

Aufgrund der für eine Duplikationsstrategie h von X gültigen Beziehung

$$S_0^{\delta\top} h_0 = V_0(h) = X_0 + R_0(h) = X_0 + S_0^{\top} h_1$$

ist die Bedingung (LOP) äquivalent zur Bedingung

(LOP1) $\qquad$ Für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt: $R_0(h) = S_0^{\top} h_1$ konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$.

Bei gültigem LOP kann also jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ durch den für seine Duplikationsstrategien $h \in L^{-1}(\{X\})$ konstanten Wert $V_0(h) =: \pi(X)$ des Startkapitaleinsatzes, den

---

3 $V(h) = (V_t(h)(\omega))_{t \in I, \omega \in \Omega}$ mit $V_t(h)(\omega) = S_t^{\delta}(\omega)^{\top} h_t(\omega)$, $S_t^{\delta}(\omega) = \left(S_t^{\delta,1}(\omega), \ldots, S_t^{\delta,N}(\omega)\right)^{\top} \in \mathbb{R}^N$,
$h_t(\omega) = \left(h_t^1(\omega), \ldots, h_t^N(\omega)\right)^{\top} \in \mathbb{R}^N$.

4 $R(h) = (R_t(h)(\omega))_{t \in I, \omega \in \Omega}$ mit $R_t(h)(\omega) = S_t(\omega)^{\top} h_{t+1}(\omega)$, $S_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$, $h_{t+1}(\omega) \in \mathbb{R}^N$.

5 Ein Begriff oder eine Eigenschaft einer Zufallsvariablen X wird bei Bauer (2002) WT, S. 15, als wahrscheinlichkeitstheoretisch (w-theoretisch) bezeichnet, wenn sie sich mittels ihrer (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung (des W-Gesetzes, Bildmaßes Vert$(X) = X(P) = P_X$) formulieren lässt. Beispiele sind der Erwartungswert $E(X)$, das zentrale p-te Moment $E(X^p)$, das absolute p-te Moment $E(|X|^p)$, das in $\alpha \in \mathbb{R}$ zentrierte bzw. zentrierte absolute p-te Moment $E((X - \alpha)^p)$ bzw. $E(|X - \alpha|^p)$, die Varianz $V(X) = E([X - E(X)]^2)$, die beiden Parameter α und σ^2 der Gaußschen Glockenkurve und die Unabhängigkeit einer Familie von Zufallsvariablen (Bauer (2002) WT, S. 16, 18f, 29, 51.

Preis von X, bewertet werden. Diese Bewertung von X ist aufgrund der P-sicheren[6] Definition der Duplikation mittels einer Handelsstrategie h und wegen der deterministischen Berechnung des Werts $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ einer Duplikationsstrategie h bzw. des Preises $\pi(X)$ von X linearalgebraisch und nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch. Es handelt sich hierbei außerdem um einen relativen Bewertungsansatz wegen der speziellen Auswahl der zugrunde gelegten Wertpapiere S^j ($j = 1,\ldots,N$) und der Einschränkung der Bewertung auf Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{F})$, die mittels $\mathcal{F}$-vorhersehbarer Handelsstrategien duplizierbar sind.

Das Marktmodell heißt **vollständig** (englisch: complete market model), wenn jedes Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W}$ durch eine Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ duplizierbar ist, wenn also das Bild $L(\mathcal{H}_N)$ der Abbildung L den gesamten Zielraum $\mathcal{W}$ ausfüllt:

(VS) $\qquad L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}.$

Weiter gilt im Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ die **Arbitragefreiheit** (englisch: No-Arbitrage Principle, Arbitrage-Free Condition), wenn es keine Arbitragegelegenheit $h \in \mathcal{H}_N$, d. h. keine Handelsstrategie h ohne Startkapitaleinsatz ($V_0(h) = 0$) und dennoch mit schwach positivem Zahlungsprofil $L(h)$ gibt:

(AF) $\qquad \nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(h) = 0 \;\wedge\; L(h) \underset{\cdot}{>} 0.$

Dabei bedeutet $L(h) \underset{\cdot}{>} 0$, dass $L_t(h)(\omega) \geq 0$ für alle $(t,\omega) \in I \times \Omega$ und $L_{t'}(h)(\omega') > 0$ für mindestens ein Paar $(t',\omega') \in I \times \Omega$ gilt.

Für die Vektorräume $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ wird jeweils mittels einer endlichen Basis ($h_{t,A_{t-1},j} = \mathbf{1}_{t,A_{t-1},j} \in \mathcal{H}_N$, $t \in I$, $A_{t-1} \in \mathcal{P}_{t-1}$, $j \in J = \{1,\ldots,N\}$ bzw. $w_{t,A_t} = \mathbf{1}_{t,A_t} \in \mathcal{W}$, $t \in I$, $A_t \in \mathcal{P}_t$) die Isomorphie zu einem passenden $\mathbb{R}^n$ gezeigt. Demzufolge können die Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ und die Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}$ auch mit den zugehörigen Koordinaten-Tupeln identifiziert werden. Außerdem können diese Vektorräume jeweils mit einem **Skalarprodukt**

$$\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_N} \text{ bzw. } \langle .,. \rangle_{\mathcal{W}}$$

ausgestattet werden, das mit dem Standardskalarprodukt der Koordinaten-Tupel übereinstimmt. Beispielsweise erhält man dann mit der deterministischen Handelsstrategie

$$b = (S_0^{\delta})_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N,$$

die für $t = 0$ den Wert $S_0^{\delta}(\Omega)$ und für $t = 1,\ldots,T$ den Wert Null annimmt, den Portfoliowert $V_0(h)$ als das Skalarprodukt $\langle b,h \rangle_{\mathcal{H}_N}$ der Handelsstrategien b und h bzw. als das Skalarprodukt $b^{\mathsf{T}}h$ der zugehörigen Koordinaten-Tupel b und h:

$$V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = \langle b,h \rangle_{\mathcal{H}_N} = b^{\mathsf{T}}h.$$

Mit der zu diesem Bewertungsprozess $b \in \mathcal{H}_N$ gehörigen Nutzenfunktion $V_0(h) = b^{\mathsf{T}}h$ können alle Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ bewertet und verglichen werden.

Da der Vektorraum $\mathcal{H}_N$ eine endliche Dimension besitzt, existiert zur linearen Abbildung $L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$ auch die eindeutig bestimmte **adjungierte Abbildung** $L^* : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{H}_N$ mit der definierenden Eigenschaft

$$\langle X, L(h) \rangle_{\mathcal{W}} = \langle L^*(X), h \rangle_{\mathcal{H}_N} \quad \text{für alle } X \in \mathcal{W} \text{ und } h \in \mathcal{H}_N.$$

Mit den Bildräumen und Kernen der linearen Abbildungen L und L^* lassen sich die Vektorräume $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ als direkte Summen von orthogonalen Komplementen darstellen:

---

6 Die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der Zustände $\omega \in \Omega$ gehen in die Bewertung des duplizierbaren Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W}$ nicht ein.

$$\mathcal{H}_N = \ker L \oplus L^*(\mathcal{W}), \qquad (\ker L)^\perp = L^*(\mathcal{W}),$$
$$\mathcal{W} = \ker L^* \oplus L(\mathcal{H}_N), \qquad (\ker L^*)^\perp = L(\mathcal{H}_N).$$

Weiter existiert für die lineare Abbildung L die **additive Zerlegung**

$$L = \breve{V} + \breve{L}$$

in deterministischen Anteil $\breve{V}(h) = V_0(h)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \text{lin}\,\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\} =: \mathcal{V}$ ($\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W}$ ist gleich 1 für $t = 0$ und gleich 0 für $t > 0$) und stochastischen Anteil $\breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$. Entsprechend gilt für die adjungierte Abbildung

$$L^* = \breve{V}^* + \breve{L}^*$$

mit deterministischem Anteil $\breve{V}^*(X) = X_0 \cdot b \in \text{lin}\,\{b\} =: \mathcal{B}$ und stochastischem Anteil $\breve{L}^*(X) \in \{b\}^\perp$ ($\breve{L}_0^*(X) = 0$).

1 Charakterisierungen der Begriffe Duplizierbarkeit, Vollständigkeit, Law of One Price und Arbitragefreiheit

Zur Formulierung verschiedener Charakterisierungen der oben genannten Begriffe in der nachfolgenden Tabelle 1 werden noch folgende Unterräume von $\mathcal{H}_N$ bzw. $\mathcal{W}$ und Orthanten von $\mathcal{W}$ benötigt:

$$\mathcal{B} := \text{lin}\,\{b\}, \qquad \mathcal{B}^\perp = \ker b^\mathsf{T} = \ker V_0,$$
$$\mathcal{M} := L(\ker V_0) = \breve{L}(\mathcal{H}_N) \subseteq L(\mathcal{H}_N), \qquad \mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B}) = \ker \breve{L}^*,$$
$$\mathcal{V} := \text{lin}\,\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\} = \text{lin}\,\{L(b)\} = L(\mathcal{B}) \subseteq L(\mathcal{H}_N), \qquad \mathcal{V}^\perp = \{X \in \mathcal{W} : X_0 = 0\},$$
$$\mathcal{W}_{\gneq 0} = \{X \in \mathcal{W} : X \geq 0 \wedge X \neq 0\}, \qquad \mathcal{W}_{>0} = \{X \in \mathcal{W} : X > 0\}.$$

Die dabei auftretenden stochastischen Prozesse Ψ, $\Phi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* \subseteq \mathcal{W}$ mit $\Psi_0 = 1$ und $\Phi_0 = 1$ werden als **Bewertungsprozess** bzw. **normierter Zustands(preis)prozess** für die $X \in L(\mathcal{H}_N)$ bezeichnet. Bei den Charakterisierungen des Law of One Price und der Arbitragefreiheit werden nachfolgend nicht nur lineare Gleichungen für die $h \in \mathcal{H}_N$ bzw. $h \in \ker V_0 = \mathcal{B}^\perp$, sondern auch Struktur und Lagebeziehungen für bestimmte Unterräume von $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ angegeben. Die **Beweise** der Charakterisierungen werden im Anschluss an die Abbildungen gegeben.

Tab. 1 Die Charakterisierungen der Duplizierbarkeit, der Vollständigkeit, des Law of One Price und der Arbitragefreiheit beim Mehrperiodenmodell ($m = \dim \mathcal{H}_N$, $n_1 = \dim \mathcal{W}$)

Duplizierbarkeit (DP)	$X \in \mathcal{W}$ ist duplizierbar $\Leftrightarrow \exists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $X = L(h)$ $\Leftrightarrow X \in L(\mathcal{H}_N)$ $\Leftrightarrow X \perp \ker L^*$
Vollständigkeit (VS)	$((S,\delta),\mathcal{F})$ ist vollständig $\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ (L surjektiv) $\Leftrightarrow \ker L^* = O$ $\Leftrightarrow L^*$ injektiv
Law of One Price (LOP)	$\forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$ ist $V_0(h)$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N$ mit $L(h) = X$ $\Leftrightarrow \forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$ ist $S_0{}^\mathsf{T} h_1$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N$ mit $L(h) = X$ $\Leftrightarrow \exists\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $V_0(h)$ konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$ $\Leftrightarrow V_0(f) = b^\mathsf{T} f = 0$ für alle $f \in L^{-1}(\{0\}) = \ker L$ $\Leftrightarrow \ker L \subseteq \ker V_0 = \mathcal{B}^\perp$ (z. B. bei injektivem L) $\Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq (\ker L)^\perp = L^*(\mathcal{W})$

	$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ $\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ mit $L^*(\vartheta) = b$ $\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in (\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* \subseteq)\ \mathcal{W}$ mit $\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \operatorname{lin}\{\Psi\}$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ $\Leftrightarrow \ker L^*$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$ $\Leftrightarrow L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ $\Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus L^*(\mathcal{M})$ $\Leftrightarrow L^*(\mathcal{M})$ ist Hyperebene von $L^*(\mathcal{W})$ $\Leftrightarrow \forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)\ \exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \exists\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $\exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{V}^\perp$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{V}^\perp \cap \mathcal{M}^\perp = \ker L^*$ $\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \dim L(\mathcal{H}_N) = \dim \mathcal{M} + 1$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}$ ist eine Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$ $\Leftrightarrow \dim \mathcal{M}^\perp = \dim \ker L^* + 1$ $\Leftrightarrow$ (PGΨ) $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^{\mathsf{T}} L(h) = b^{\mathsf{T}} h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N \quad [\Psi_0 = 1]$ $\Leftrightarrow$ (KPGΨ) $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^{\mathsf{T}} \breve{L}(h) = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N,\ \Psi_0 = 1$ $\Leftrightarrow \quad \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^{\mathsf{T}} L(h) = 0 \quad \forall\, h \in \ker V_0,\ \Psi_0 = 1$ $\Leftrightarrow \quad \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^{\mathsf{T}} Z = 0 \quad \forall\, Z \in \mathcal{M},\ \Psi_0 = 1$ $\Leftrightarrow \quad \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\breve{L}^*(\Psi) = 0,\ \Psi_0 = 1$ $\Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$
LOP nicht gültig	$\exists\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $V_0(h)$ nicht konstant für alle $h \in L^{-1}(X)$ $\Leftrightarrow \exists\, f \in \mathcal{H}_N$ mit $L(f) = 0 \wedge V_0(f) \neq 0$ $\Leftrightarrow \ker L \not\subseteq \ker V_0$ $\Leftrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$ $\Leftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N)$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp = \ker L^*$ $\Leftrightarrow L^*(\mathcal{M}^\perp) = O$ $\Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M})$
(VS) $\wedge$ LOP	$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W} \wedge \mathcal{M}$ ist Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$ $\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ mit $\dim \mathcal{M}^\perp = 1$ $\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp,\ \mathcal{M}^\perp = [\Psi]$ mit einem $\Psi \in \mathcal{W}$ $\Leftrightarrow \exists_1\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$
(VS) $\wedge\ m = n_1$	L surjektiv $\wedge\ m = n_1$ $\Leftrightarrow L$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow L^*$ ist ein Isomorphismus
(VS) $\wedge$ LOP ungültig	$\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \wedge \ker L^* = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp = \ker L^* = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$

Arbitragefreiheit (AF)	$\nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(h) = 0 \wedge L(h) \underset{\cdot}{>} 0$ $\Leftrightarrow \nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $\breve{L}(h) \underset{\cdot}{>} 0$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\underset{\cdot}{>}0} = \emptyset$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0}$ $(\Phi_0 = 1)$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^*$ mit $\Phi > 0$ $(\Phi_0 = 1,\ \mathcal{M}^{\perp} = \ker L^* \oplus \operatorname{lin}\{\Phi\})$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\breve{L}^*(\Phi) = 0,\quad \Phi > 0$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Phi) = b,\quad \Phi > 0$ $[\Phi_0 = 1]$ $\Leftrightarrow$ (KPGΦ) $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi^{\mathsf{T}}\breve{L}(h) = 0\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N,\quad \Phi > 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi^{\mathsf{T}}L(h) = 0\ \forall\, h \in \ker V_0,\quad \Phi > 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi^{\mathsf{T}}Z = 0\ \forall\, Z \in \mathcal{M},\quad \Phi > 0$ $\Leftrightarrow$ (PGΦ) $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi^{\mathsf{T}}L(h) = b^{\mathsf{T}}h\ \ \forall\, h \in \mathcal{H}_N,\quad \Phi > 0$ $[\Phi_0 = 1]$
(VS) ∧ (AF)	$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}\ \wedge\ \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0}$ $\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\mathcal{M}^{\perp} = [\Phi],\ \Phi > 0$ $\Leftrightarrow [\exists_1\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Phi) = b] \wedge \Phi > 0$

Die Charakterisierung des LOP durch die Preisgleichungen $\Psi^{\mathsf{T}}L(h) = V_0(h)$, $h \in \mathcal{H}_N$, mit einem $\Psi \in \mathcal{W}$ findet man bei Kremer (2011), S. 171, wobei dort $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0$ und noch nicht die Darstellung $V_0(h) = b^{\mathsf{T}}h$ verwendet wird. Die Charakterisierung der Arbitragefreiheit durch die Preisgleichungen $\Phi^{\mathsf{T}}L(h) = V_0(h)$, $h \in \mathcal{H}_N$ bzw. $h \in \ker V_0$, mit einem positiven $\Phi \in \mathcal{W}$ findet man bei Kremer (2011), S. 175, 176, mit $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0$ und noch ohne die Darstellung $V_0(h) = b^{\mathsf{T}}h$.

Der Vorteil der neuen Charakterisierungen mittels der Struktur und Lagebeziehungen von Vektorunterräumen besteht nun darin, dass sie geometrisch visualisiert werden können. Andererseits kann die geometrische Veranschaulichung auch als Quelle für Vermutungen über weitere neue Erkenntnisse dienen. Beispielsweise lässt sich der Vektorraum $\mathcal{W}$ der $\mathcal{F}$-adaptierten stochastischen Prozesse darstellen als direkte Summe der Unterräume $L(\mathcal{H}_N)$ und $\ker L^*$ und als direkte Summe von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^{\perp}$. Dabei liegt stets $\mathcal{M}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ und $\ker L^*$ in $\mathcal{M}^{\perp}$. In der Abbildung 2 ist dargestellt, dass bei ungültigem LOP sowohl der Unterraum $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte mit dem Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ der duplizierbaren Zahlungsströme als auch der Unterraum $\mathcal{M}^{\perp}$ mit dem Unterraum $\ker L^*$ zusammenfällt. In der Abbildung 1 sieht man dagegen, dass mit der Einstellung des LOP im Marktmodell der Unterraum $\mathcal{M}$ um eine Dimension kleiner ausfällt als der Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ und der Unterraum $\mathcal{M}^{\perp}$ um eine Dimension größer wird als $\ker L^*$. Im nichtleeren Bereich $\mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^*$ liegt dann der Bewertungsprozess Ψ $(\Psi_0 = 1)$, mit dem der Preis $\pi(X)$ eines duplizierbaren Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ als Skalarprodukt

$$\langle \Psi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^{\mathsf{T}}X$$

und somit unabhängig von einer Duplikationsstrategie berechnet werden kann: Für diesen Prozess Ψ gilt nämlich $L^*(\Psi) = b$, sodass für ein festes Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ alle Duplikationsstrategien h von X bei Verwendung der deterministischen linearen Nutzenfunktion

$$V_0(h) = b^{\mathsf{T}}h = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0,$$

die h durch den deterministischen Startkapitaleinsatz zum Zeitpunkt $t = 0$ beurteilt, mit dem gleichen Wert

$$b^{\top}h = L^*(\Psi)^{\top}h = \Psi^{\top}L(h) = \Psi^{\top}X$$

bewertet werden. Demzufolge kann der Startkapitaleinsatz $V_0(h) = b^{\top}h$ einer beliebigen Duplikationsstrategie h von X dann auch zur Bewertung von X und die Linearform (lineares Funktional)

$$\pi = \langle \Psi, . \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^{\top} : X \in \mathcal{W} \mapsto \pi(X) = \langle \Psi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^{\top}X \in \mathbb{R}$$

als lineare Nutzenfunktion auf $L(\mathcal{H}_N)$ verwendet werden. Diese Linearform $\pi = \Psi^{\top}$ liefert auf $L(\mathcal{H}_N)$ für jedes $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ den eindeutig bestimmten Preis gemäß der Gleichung (PGΨ).

Bei gleichzeitigem Vorliegen der Voraussetzungen (LOP) und (VS) existiert genau eine Linearform $\pi = \Psi^{\top}$ auf $\mathcal{W}$, die auf $L(\mathcal{H}_N)$ gemäß den Gleichungen (PGΨ) die Preise liefert. Bei gleichzeitiger Gültigkeit von (AF) und (VS) existiert genau eine Linearform $\pi = \Phi^{\top}$ auf $\mathcal{W}$, die auf $L(\mathcal{H}_N)$ gemäß den Gleichungen (PGΦ) die Preise liefert, und diese Linearform ist noch eine sog. positive Linearform ($\pi(X) > 0$ für alle $X \in \mathcal{W}_{\dot{>}0}$).

Bei diesen Betrachtungen stellt sich auch die Frage, ob die hier für das zeitdiskrete Marktmodell angegebenen geometrischen Charakterisierungen von (LOP), (AF) und (VS) auch ein Analogon im zeitkontinuierlichen Marktmodell aufweisen.

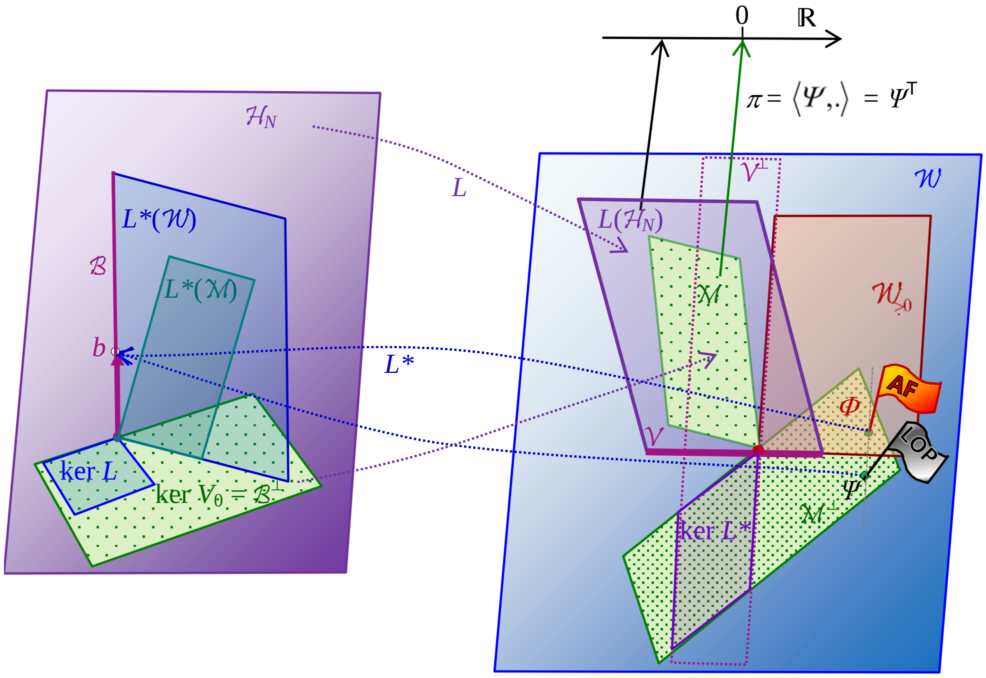

Abb. 1 Die verschiedenen Unterräume von $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$, die linearen Abbildungen L, L^* und π, der Bewertungsprozess Ψ bei gültigem LOP und der Zustandspreisprozess Φ bei Arbitragefreiheit

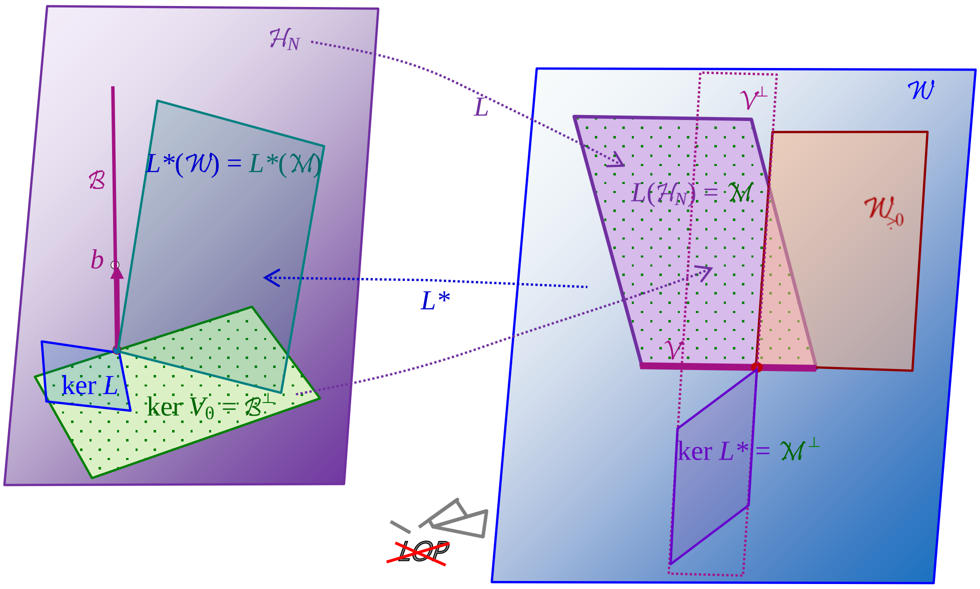

Abb. 2 Die verschiedenen Unterräume von $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ und die linearen Abbildungen L und L^* bei nicht gültigem LOP

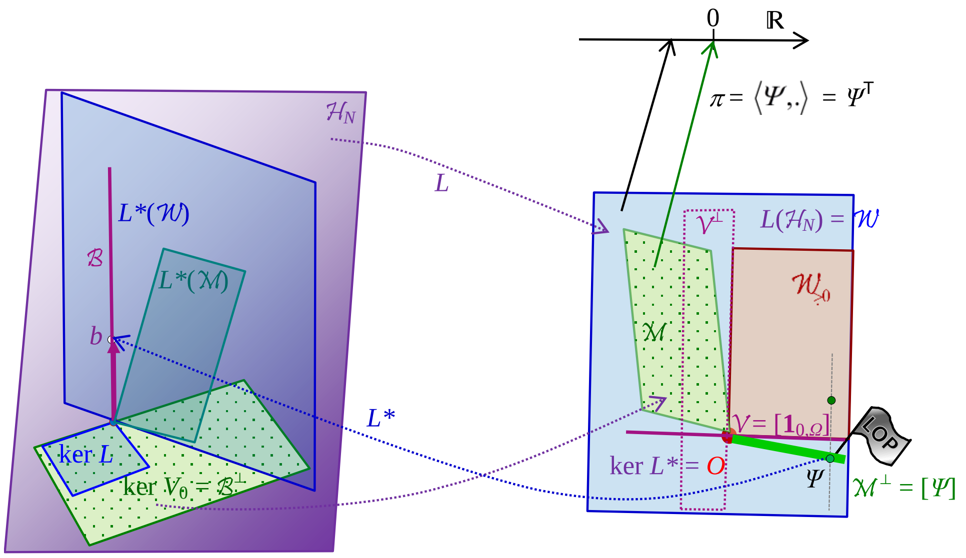

Abb. 3 Die verschiedenen Unterräume von $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$, die linearen Abbildungen L, L^*, π und der Bewertungsprozess Ψ bei vollständigem Marktmodell und gültigem LOP

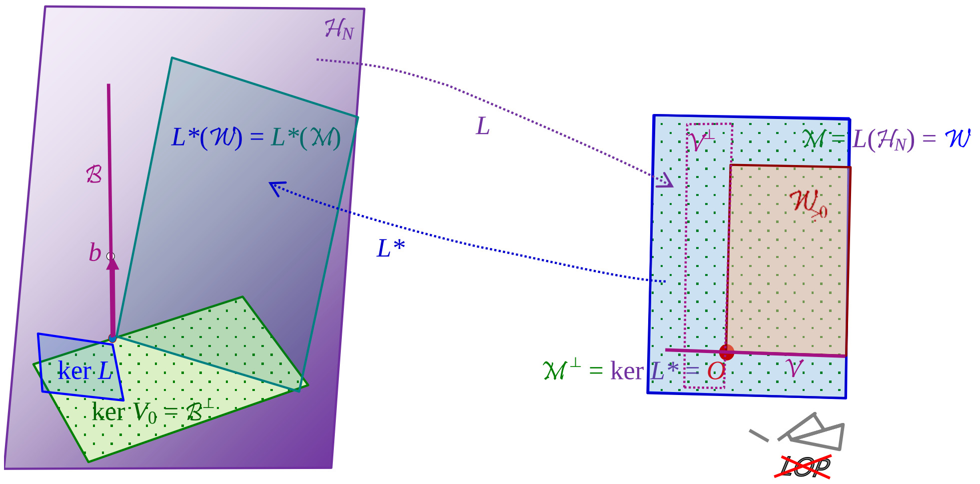

Abb. 4 Die verschiedenen Unterräume von $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$, die linearen Abbildungen L und L^* bei vollständigem Marktmodell und ungültigem LOP

Beweis: Die Beweisabschnitte 1) bis 3) beschreiben Eigenschaften von Unterräumen, die unabhängig von der Gültigkeit des LOP sind. Die darauffolgenden Abschnitte 4) bis 13) behandeln Charakterisierungen des LOP, die Abschnitte 14) und 15) Charakterisierungen der Vollständigkeit und der Abschnitt 16) Charakterisierungen der Arbitragefreiheit:

1) a) $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$, b) $\mathcal{V} = \breve{V}(\mathcal{H}_N)$, c) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$, d) $\ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp$:

a) $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$: „$\subseteq$": Für jedes $X = L(h) \in \mathcal{M} := L(\ker V_0)$, $h \in \ker V_0 = \ker \breve{V}$, gilt

$$X = L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h) = \breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N).$$

„$\supseteq$": Für jedes $X = \breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N)$, $h = (h_0, h_1, \ldots, h_T)^\top \in \mathcal{H}_N$, gilt mit $\hat{h} = (0, h_1, \ldots, h_T)^\top \in \mathcal{H}_N$, $V_0(\hat{h}) = S_0^{\delta\top}\hat{h}_0 = 0$, $\breve{V}(\hat{h}) = 0$, $\hat{h} \in \ker\breve{V}$ auch die Inzidenz $X = \breve{L}(h) = L(\hat{h}) \in L(\ker\breve{V}) = \mathcal{M}$.

b) $\mathcal{V} = \breve{V}(\mathcal{H}_N)$: „$\supseteq$": Für jedes $X = \breve{V}(h) = V_0(h)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \breve{V}(\mathcal{H}_N)$, $h \in \mathcal{H}_N$, gilt auch $X \in \mathcal{V} := \operatorname{lin}\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\} = \{p\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} : p \in \mathbb{R}\}$.

„$\subseteq$": Zu $Y = p\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{V}$, $p \in \mathbb{R}$, existiert unter der mathematisch-technischen Voraussetzung

$$S_0^\delta = (S_0^{\delta,1}, \ldots, S_0^{\delta,N})^\top \neq 0$$

ein N-Tupel $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ als Lösung des linearen Gleichungssystems $S_0^{\delta\top}\gamma = p$. Für die damit gebildete Handelsstrategie $g = \breve{g} = (g_0, 0, \ldots, 0)^\top = (\gamma, 0, \ldots, 0)^\top =: \gamma_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N$ gilt $V_0(g) = S_0^{\delta\top}g_0 = S_0^{\delta\top}\gamma = p$ und $Y = V_0(g)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = \breve{V}(g) \in \breve{V}(\mathcal{H}_N)$.

c) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$: Da für alle $h \in \mathcal{H}_N$ mit $\breve{h} = (h_0, 0, \ldots, 0)^\top$, $\hat{h} = (0, h_1, \ldots, h_T)^\top \in \mathcal{H}_N$ die Inzidenzen $\breve{V}(h) = L(\breve{h}) \in L(\mathcal{H}_N)$, $\breve{L}(h) = L(\hat{h}) \in L(\mathcal{H}_N)$ gelten, erhält man die Inklusionen

$$L(\mathcal{H}_N) = \{L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h) : h \in \mathcal{H}_N\} \subseteq \breve{V}(\mathcal{H}_N) + \breve{L}(\mathcal{H}_N) \subseteq L(\mathcal{H}_N) + L(\mathcal{H}_N) = L(\mathcal{H}_N)$$

und somit unter Verwendung von a) und b) $L(\mathcal{H}_N) = \breve{V}(\mathcal{H}_N) + \breve{L}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$.

d) $\ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp$, $\ker L^* \subseteq \mathcal{V}^\perp = \{X \in \mathcal{W} : X_0 = \mathbf{1}_{0,\Omega}{}^\top X = 0\}$: Die beiden mit 1c) bewiesenen Inklusionen $\mathcal{V} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ und $\mathcal{M} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ sind wegen $\ker L^* = L(\mathcal{H}_N)^\perp$ äquivalent zu den Inklusionen $\ker L^* \subseteq \mathcal{V}^\perp$ und $\ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp$, also äquivalent zur Inklusion $\ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp$.

2) a) $\mathcal{M}^\perp = \ker\breve{L}^*$, $\mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$, $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$, $\ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp$, b) $L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$,
c) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp)$, d) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W})$:

a) $\mathcal{M}^\perp = \ker\breve{L}^* = \breve{L}^{*-1}(O)$: Für ein beliebiges $Y \in \mathcal{W}$ gilt $Y \in \ker\breve{L}^*$, d. h. $\breve{L}^*(Y) = 0$, genau dann, wenn

$$0 = \breve{L}^*(Y)^\top h = Y^\top\breve{L}(h) \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$$

gilt. Die nichttriviale Aussage „$\Leftarrow$" ergibt sich dabei aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts, indem man speziell $h = \breve{L}^*(Y)$ einsetzt. Die Aussage $Y \in \ker\breve{L}^*$ ist also äquivalent zu $Y \perp \breve{L}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$ bzw. zu $Y \in \mathcal{M}^\perp$.
Weiter ist dann wegen der additiven Zerlegung $L^* = \breve{V}^* + \breve{L}^*$ die Inzidenz $Y \in \mathcal{M}^\perp = \ker\breve{L}^*$ gleichbedeutend zu

$$L^*(Y) = \breve{V}^*(Y) + \breve{L}^*(Y) = \breve{V}^*(Y) = Y_0\cdot b \in \mathcal{B}.$$

Damit ist auch schon

$$L^{*-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}^\perp$$

und die Inklusion

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$$

bewiesen.
Für $Y \in \mathcal{M}^\perp = \ker\breve{L}^*$ gilt $L^*(Y) = Y_0\cdot b$ und somit $L^*(Y) = 0$, d. h. $Y \in \ker L^*$ ($\subseteq \mathcal{M}^\perp$), genau dann, wenn $Y_0 = 0$ ist. Weiter gilt für $Y \in \mathcal{M}^\perp$ die Ungleichung $L^*(Y) \neq 0$ genau dann, wenn $Y_0 \neq 0$ ist. Außerdem gilt für ein $Y \in \mathcal{M}^\perp$ die Gleichung $L^*(Y) = b$ genau dann, wenn $Y_0 = 1$ ist. Für ein $Y \in \mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$ ist die Normierung $Y_0 = 1$ also gleichbedeutend dazu, dass Y ein L^*-Urbild von b ist. In der Mengenschreibweise lautet diese Ergebnisse

$$\ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\} = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp,$$

$$\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} \text{ und}$$

$$L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}.$$

Zweiter Beweis für $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$: Es gilt $Y \in \mathcal{M}^\perp$ genau dann, wenn für beliebiges $g \in \mathcal{B}^\perp$ bzw. $L(g) \in L(\mathcal{B}^\perp) = \mathcal{M}$ gilt

$$L^*(Y)^\top g = Y^\top L(g) = 0,$$

also $L^*(Y) \perp \mathcal{B}^\perp$ und $L^*(Y) \in \mathcal{B}^{\perp\perp} = \mathcal{B}$. Damit ist $\mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$, $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ und $\dim L^*(\mathcal{M}^\perp) \leq 1$.

b) $L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$ bzw. $b \notin L^*(\mathcal{M})$: Für jedes $h \in L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B}$ ist $h = L^*(Z)$ mit $Z = L(g) \in \mathcal{M} = L(\mathcal{B}^\perp)$, $g \in \mathcal{B}^\perp$,

$$0 = h^\top g = L^*(Z)^\top g = Z^\top L(g) = Z^\top Z,$$

also $Z = 0$ und $h = L^*(Z) = 0$. Demnach ist $L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$ und $b \notin L^*(\mathcal{M})$.

c) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp)$: Aus $\mathcal{W} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ folgt $L^*(\mathcal{W}) \subseteq L^*(\mathcal{M}) + L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq L^*(\mathcal{W})$, aus 2a) und 2b) noch $L^*(\mathcal{M}) \cap L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$, also insgesamt

$$L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp).$$

d) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W})$: Nach 2a) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ gilt $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W})$. Es ist also nur noch die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ zu zeigen. Dazu werden zwei Fälle unterschieden.

Im Fall i) $b \in L^*(\mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ ist $\mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B}$. Weiter hat man dann wegen 2c) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp)$ für b die Darstellung

$$b = h + g \text{ mit } h \in L^*(\mathcal{M}) \text{ und } g \in L^*(\mathcal{M}^\perp).$$

Nach 2a) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ ist $g = \lambda b$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, somit nach 2b) $h = b - g = (1 - \lambda)b \in [b] \cap L^*(\mathcal{M}) = O$, $h = 0$, $b = g \in L^*(\mathcal{M}^\perp)$ und $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{M}^\perp)$. Zusammen mit 2a) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ erhält man $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$, also im Fall i)

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}).$$

In diesem Fall ist dann noch $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp) = L^*(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{B}$, also $L^*(\mathcal{M})$ eine Hyperebene des L^*-Bildraums $L^*(\mathcal{W})$.

Im Fall ii) $b \notin L^*(\mathcal{W})$ gilt die noch nachzuweisende Inklusion $\mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}) = O \subseteq L^*(\mathcal{M}^\perp)$, also insgesamt

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}) = O.$$

In diesem Fall gilt dann noch $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp) = L^*(\mathcal{M})$, so dass $L^*(\mathcal{M})$ mit dem gesamten L^*-Bild $L^*(\mathcal{W})$ übereinstimmt. Anzumerken ist hier, dass gemäß Beweisteil 11) der Fall i) $b \in L^*(\mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ die Gültigkeit des LOP und der Fall ii) $b \notin L^*(\mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}) = O$ die Ungültigkeit des LOP bedeutet.

3) a) „$b \in L^*(\mathcal{W})$, d. h. $L^*(\Psi) = b$ für ein $\Psi \in \mathcal{W} \Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$“;
b) „$L^{*-1}(\mathcal{B} \setminus O) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\}$“:

a) Die Aussage $b \in L^*(\mathcal{W})$ bedeutet die Existenz eines $\Psi \in \mathcal{W}$ mit

$$(b_0)_{0,\Omega} = b = L^*(\Psi) = \breve{V}^*(\Psi) + \breve{L}^*(\Psi) \qquad (\breve{V}^*(\Psi) = \Psi_0 \cdot b = \Psi_0 \cdot (b_0)_{0,\Omega} \in \mathcal{B}, \breve{L}_0^*(\Psi) = 0),$$

also

$$b_0 = \Psi_0 b_0 + 0 \qquad \text{für } t = 0,$$
$$0 = 0 + \breve{L}_t^*(\Psi) = 0 \qquad \text{für } t = 1,\dots,T$$

und wegen $b_0 = S_0^\delta \neq 0$ somit

$$\Psi_0 = 1,\ \breve{L}^*(\Psi) = 0 \text{ und } \breve{V}^*(\Psi) = b.$$

Nach 2a) ist die Bedingung $\breve{L}^*(\Psi) = 0$ äquivalent zu $\Psi \in \ker \breve{L}^* = \mathcal{M}^\perp$. Damit ist $L^*(\Psi) = b$ für ein $\Psi \in \mathcal{W}$ äquivalent zur Existenz eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$.

b) Analog ergibt sich allgemeiner für beliebiges festes $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $L^*(\Psi) = \lambda b$ für ein $\Psi \in \mathcal{W}$ genau dann gilt, wenn es ein $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ gibt mit $\Psi_0 = \lambda$. Für die $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = 0$ bzw. $\lambda \neq 0$ für erhält man daraus in der Mengenschreibweise

$$L^{*-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}^\perp,$$
$$\ker L^* = L^{*-1}(O) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\} = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{V}^\perp \text{ und}$$
$$L^{*-1}(\mathcal{B} \setminus O) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\}.$$

Die erste dieser drei Aussagen wurde auch schon in 2a) bewiesen. Für die zweite Aussage wurde schon in 2a) ein Beweis angegeben, bei dem die Inklusion $\ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp$ verwendet wird und nur die $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ betrachtet werden.

4) „LOP $\Leftrightarrow \forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)\ \exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{M}$“:

„$\Leftarrow$“: Für jedes $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$, $h \in \mathcal{H}_N$, hat man die additive Zerlegung $L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h)$ mit $\breve{V}(h) \in \breve{V}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V}$ und $\breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$, bei der voraussetzungsgemäß $\breve{V}(h) = V_0(h)\, \mathbf{1}_{0,\Omega}$ bzw. $V_0(h)$ durch X eindeutig bestimmt ist. Also gilt in $L(\mathcal{H}_N)$ das LOP.

„$\Rightarrow$“: Für $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$, $h \in \mathcal{H}_N$, hat man zumindest die additive Zerlegung $L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h)$ mit $\breve{V}(h) \in \mathcal{V}$, $\breve{L}(h) \in \mathcal{M}$. Für jede weitere Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V} = \breve{V}(\mathcal{H}_N)$, $Z \in \mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ ist zu zeigen, dass $Y = \breve{V}(h)$ und $Z = \breve{L}(h)$ ist. Nach 1 b) ist $Y = L(g) = L(\breve{g}) = \breve{V}(g) = V_0(g) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$ mit einem $g = \breve{g} = (g_0, 0, \dots, 0)^\top$

$\in \mathcal{H}_N$. Weiter ist $Z = \breve{L}(f) = L(\hat{f})$ mit einem $f = (f_0, f_1,..., f_T)^\mathrm{T} \in \mathcal{H}_N$ und dem zugehörigen $\hat{f} = (0, f_1,..., f_T)^\mathrm{T}$ $\in \mathcal{H}_N$. Daraus erhält man für X die Darstellung

$$X = Y + Z = L(\breve{g}) + L(\hat{f}) = L(\breve{g} + \hat{f}) = L(k)$$

mit $k = \breve{g} + \hat{f} = (g_0, f_1,..., f_T)^\mathrm{T} \in \mathcal{H}_N$, $\breve{k} = \breve{g}$, $\hat{k} = \hat{f}$ und

$$\breve{V}(k) = \breve{V}(\breve{k}) = \breve{V}(\breve{g}) = \breve{V}(g).$$

Auf Grund der Gültigkeit des LOP haben die beiden Duplikationsstrategien k und h von X den gleichen Startkapitaleinsatz:

$$\breve{V}(k) = V_0(k)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = V_0(g)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = \breve{V}(h).$$

Demnach gilt $Y = \breve{V}(g) = \breve{V}(k) = \breve{V}(h)$ und $Z = X - Y = L(h) - \breve{V}(h) = \breve{L}(h)$. Damit ist die Einzigkeit einer derartigen additiven Zerlegung von $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gezeigt.

5) „$\forall X \in \mathcal{V} + \mathcal{M}\ \exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{M} \Leftrightarrow$
$\exists X \in \mathcal{V} + \mathcal{M}$: $\exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{M} \Leftrightarrow$
$\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$“:

Diese Aussage gilt allgemein für die Summe $\mathcal{V} + \mathcal{M}$ zweier Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ eines Vektorraums. Eine derartige Summe wird dann direkte Summe der Unterräume genannt und mit $\mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ bezeichnet. Für zwei additive Zerlegungen $X = Y + Z = Y' + Z'$ von X mit $Y, Y' \in \mathcal{V}$, $Z, Z' \in \mathcal{M}$ ist $\Delta := Y - Y' = Z' - Z \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$. Daher bedeutet die Einzigkeit dieser additiven Zerlegung für *irgendein* $X \in \mathcal{V} + \mathcal{M}$, dass es kein $\Delta \in (\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) \setminus O$ gibt, also $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ ist. Aus $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ folgt dann aber auch die Einzigkeit der Zerlegung für *jedes* $X \in \mathcal{V} + \mathcal{M}$.

6) „$\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O \Leftrightarrow \mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{V}^\perp \Leftrightarrow \mathcal{M}$ ist eine Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$“:

a) Da $\mathcal{V}$ eindimensional ist, ist $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$ gleichbedeutend zu $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ gleichbedeutend zu $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{M}$. Aus $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ folgt $\mathcal{V}^\perp \supseteq \mathcal{M}^\perp$ und umgekehrt folgt aus $\mathcal{V}^\perp \supseteq \mathcal{M}^\perp$ auch $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$. Damit ist auch $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{M}$ äquivalent zu $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{V}^\perp = \{X \in \mathcal{W} : X_0 = 0\}$.

b) Mit dem Dimensionssatz

$$\dim(\mathcal{V} + \mathcal{M}) + \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{M},$$

für endlichdimensionale Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ eines Vektorraums erhält man hier für $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$ und $\dim \mathcal{V} = 1$ die Dimensionsgleichung

$$\dim L(\mathcal{H}_N) + \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) = 1 + \dim \mathcal{M}.$$

Demnach ist $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ äquivalent zu $\dim \mathcal{M} = \dim L(\mathcal{H}_N) - 1$, also zur Hyperebenenstruktur von $\mathcal{M}$ in $L(\mathcal{H}_N)$.

7) „$\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O \Leftrightarrow \ker L^*$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp \Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \operatorname{lin} \Psi$ mit $\Psi \in (\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* \subseteq) \mathcal{W}$“:

Für die direkten Summen $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp = \mathcal{W}$ und $\ker L \oplus L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{H}_N$ erhält man mit dem oben angegebenen Dimensionssatz die Dimensionsgleichungen

$$\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{M}^\perp,$$
$$\dim \mathcal{W} = \dim \ker L^* + \dim L(\mathcal{H}_N)$$

und zusammen mit der in 6) angegebenen Dimensionsgleichung

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}^\perp &= \dim \mathcal{W} - \dim \mathcal{M}\\ &= \dim \ker L^* + \dim L(\mathcal{H}_N) - \dim \mathcal{M}\\ &= \dim \ker L^* + 1 - \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{M}).\end{aligned}$$

Daher ist $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ auch äquivalent zur Dimensionsgleichung $\dim \ker L^* = \dim \mathcal{M}^\perp - 1$, also zur Hyperebenenstruktur von $\ker L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$. Die Hyperebenenstruktur von $\ker L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$ ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{M}^\perp$ die direkte Summe von $\ker L^*$ und einem eindimensionalen Unterraum ist:

$$\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \operatorname{lin} \Psi \text{ mit einem } \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*:$$

Aus der Hyperebenenstruktur von $\ker L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$ folgt nämlich schon mit einem einzigen $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ für die zugehörige Unterraumsumme $U := \ker L^* \oplus \operatorname{lin} \Psi$ mittels der Dimensionsgleichung die Übereinstimmung mit $\mathcal{M}^\perp$. Umgekehrt folgt aus der Darstellung von $\mathcal{M}^\perp$ durch diese direkte Summe $\ker L^* \oplus \operatorname{lin} \Psi$ mittels der Dimensionsgleichung auch die Hyperebenenstruktur von $\ker L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$.

8) „$\ker L^*$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp \Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ mit $L^*(\Psi) = b$“:

„$\Leftarrow$“: Da $\dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{M})$ nur die Werte 1 oder 0 annehmen kann, ist nach der in 7) angegebenen Dimensionsgleichung stets $\dim \mathcal{M}^\perp = \dim \ker L^* + 1$ oder $\dim \mathcal{M}^\perp = \dim \ker L^*$. Falls ein $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ existiert, ist somit $\dim \mathcal{M}^\perp$ genau um 1 größer als $\dim \ker L^*$, also $\ker L^*$ eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$.

„⇒“: Falls ker L^* eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$, also $\mathcal{M}^\perp = \ker L^* + \text{lin}\,\Psi$ mit einem $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ ist, gilt nach 3b) $L^*(\Psi) = \Psi_0 \cdot b$ mit $\Psi_0 \neq 0$. Ohne Einschränkung (ggf. durch Übergang von Ψ zu Ψ/Ψ_0) kann $\Psi_0 = 1$ und $L^*(\Psi) = b$ angenommen werden.

9) „$\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $L^*(\Psi) = b$ $\Leftrightarrow$ $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ $\Leftrightarrow$
$\exists_1\, \vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ mit $L^*(\vartheta) = b$ $\Leftrightarrow$ $\exists_1\, \vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ $\Leftrightarrow$
$\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{V}^\perp$“:

a) Die Existenz eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $L^*(\Psi) = b \neq 0$ bedeutet nach 2a) dim $L^*(\mathcal{M}^\perp) = 1$ und

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = [L^*(\Psi)] = \mathcal{B}.$$

Andernfalls (bei ungültigem LOP bzw. bei $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$) ist nach 7) ker L^* keine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$, sondern $\ker L^* = \mathcal{M}^\perp$, also für alle $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ der Funktionswert $L^*(\Psi) = \Psi_0 \cdot b = 0$ und

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = O.$$

b) Wegen 2a) $\mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$ liegt ein beliebiges L^*-Urbild von $b \in \mathcal{B}$, also ein $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$, notwendig in $\mathcal{M}^\perp$. Weiter ist für dieses $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ nach 3) die Bedingung $L^*(\Psi) = b$ gleichbedeutend zu $\Psi_0 = 1$.
c) Aus der Existenz eines L^*-Urbildes von b in $L(\mathcal{H}_N)$ ($\subseteq \mathcal{W}$) folgt trivialerweise auch die Existenz eines L^*-Urbildes von b in $\mathcal{W}$. Es ist also nur noch die umgekehrte Richtung zu zeigen: Existiert ein $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$, so folgt aus der direkten orthogonalen Zerlegung $\mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N) \oplus \ker L^*$ die Existenz von $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ und $Y \in \ker L^*$ mit $\Psi = \vartheta + Y$ und

$$b = L^*(\Psi) = L^*(\vartheta) + L^*(Y) = L^*(\vartheta).$$

Dieses L^*-Urbild ϑ von b in $L(\mathcal{H}_N)$ ist (bei vorliegendem LOP) dann eindeutig bestimmt: Für zwei L^*-Urbilder ϑ, ϑ' $\in L(\mathcal{H}_N)$ von b gelten nämlich nach 12a) „⇒“ für jedes $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ die Preisgleichungen (PGΨ)

$$\vartheta^\top X = \vartheta^\top L(h) = L^*(\vartheta)^\top h = b^\top h = V_0(h) = \pi(X)$$

und analog $\vartheta'^\top X = \pi(X)$. Daher ist $(\vartheta' - \vartheta)^\top X = 0$ für alle $X \in L(\mathcal{H}_N)$ und wegen der positiven Definitheit des auf dem Vektorraum $L(\mathcal{H}_N)$ betrachteten Skalarprodukts von $\mathcal{W}$ (indem man $X = \vartheta' - \vartheta$ setzt) $\vartheta' - \vartheta = 0$ bzw. $\vartheta' = \vartheta$. Aus der nach 12a) gültigen Darstellung von $\pi(X)$ als Skalarprodukt $\Psi^\top X$ erhält man auch die Linearität der Abbildung $\pi : L(\mathcal{H}_N) \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Einzigkeit von $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ ergibt sich auch mit dem Rieszschen Darstellungssatz, nach dem sich die Linearform $\pi : L(\mathcal{H}_N) \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem endlichdimensionalen Vektorraum $L(\mathcal{H}_N)$ auf genau eine Weise als Skalarprodukt $\pi(X) = \vartheta^\top X\ \forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$ mit einem $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ schreiben lässt.
Für dieses L^*-Urbild $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ von b gilt wie für die anderen L^*-Urbilder Ψ von b in $\mathcal{W}$ nach 9b) auch $\vartheta \in \mathcal{M}^\perp$ und $\vartheta_0 = 1$. Bei Gültigkeit des LOP gibt es also auch einen Bewertungsprozess $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^\perp$ mit $\vartheta_0 = 1$.
d) Die Existenz eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$ ist wegen der Unterraumeigenschaft von $\mathcal{M}^\perp$ gleichbedeutend zur Existenz eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 \neq 0$, also zu

$$\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{V}^\perp = \{X \in \mathcal{W} : X_0 = 0\}.$$

10) „$L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} \Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus L^*(\mathcal{M})$“ und
„$L^*(\mathcal{M}^\perp) = O \Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M})$“:

Nach 2) gilt stets $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp)$. Bei gültigem LOP ist nach 4) und 5) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$, nach 7), 8) und 9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ und somit $L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus L^*(\mathcal{M})$. Bei ungültigem LOP folgt nach 4) und 5) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$, nach 7) $\ker L^* = \mathcal{M}^\perp$, nach 9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = O$ und somit $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M})$. Daher gilt $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ und $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{B}$ genau bei gültigem LOP und $L^*(\mathcal{M}^\perp) = O$ und $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M})$ genau bei ungültigem LOP.

11) „LOP $\Leftrightarrow$ $\exists\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $V_0(h)$ konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$ $\Leftrightarrow$ $\ker L \subseteq \ker V_0$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$“:

a) Zu beliebigem fest vorgegebenen $X \in L(\mathcal{H}_N)$ ist die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Gleichung

$$L(h) = X$$

gegeben durch die Menge aller $h = h' + f \in \mathcal{H}_N$ mit einer speziellen Lösung $h' \in \mathcal{H}_N$ der inhomogenen Gleichung $L(h') = X$ und der allgemeinen Lösung $f \in \mathcal{H}_N$ der homogenen Gleichung $L(f) = 0$. Bei Gültigkeit des LOP auf $L(\mathcal{H}_N)$ ist zumindest für ein $X \in L(\mathcal{H}_N)$ für alle Duplikationsstrategien h von X der zum Zeitpunkt $t = 0$ in das Portfolio eingebrachte Startkapitaleinsatz $V_0(h) = \langle b, h\rangle_{\mathcal{H}_N} = b^\top h$ konstant:

$$V_0(h) = V_0(h')\quad \forall\, h, h' \in L^{-1}(\{X\}).$$

Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass für jede Lösung $f \in \mathcal{H}_N$ der homogenen linearen Gleichung

$$L(f) = 0,$$

also für jedes $f \in L^{-1}(\{0\}) = \ker L$, auch $V_0(f)$ konstant 0 ist, also f eine Lösung der homogenen linearen Gleichung

$$V_0(f) = 0$$

ist. In der Mengenschreibweise bedeutet dies für die Kerne der Abbildungen L und $V_0 = b^\top$ die Inklusion

$$\ker L \subseteq \ker V_0 .$$

Damit ist auch bei jedem beliebigen $X = L(h') \in L(\mathcal{H}_N)$ für alle Duplikationsstrategien $h \in h' + \ker L \subseteq h' + \ker V_0$ der Startkapitaleinsatz $V_0(h) = V_0(h')$ konstant, also das LOP gültig.

b) Weiter ist die Inklusion $\ker L \subseteq \ker V_0 = \mathcal{B}^\perp$ gleichbedeutend zur Inklusion

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^{\perp\perp} \subseteq (\ker L)^\perp = L^*(\mathcal{W}) .$$

12) „$\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow$ (PGΨ) $\Leftrightarrow$ (KPGΨ) $\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\breve{L}^*(\Psi) = 0$, $\Psi_0 = 1 \Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$“:

Für alle $h \in \mathcal{H}_N$ und $\Psi \in \mathcal{W}$ mit der Normierung $\Psi_0 = 1$ gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} L^*(\Psi)^\top h &= \langle L^*(\Psi), h\rangle_{\mathcal{H}_N} = \langle \Psi, L(h)\rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^\top L(h) && (L^* \text{ adjungiert zu } L)\\ &= \Psi^\top \breve{V}(h) + \Psi^\top \breve{L}(h) && (\text{additive Zerlegung von } L)\\ &= 1\cdot V_0(h) + \Psi^\top \breve{L}(h) && (\text{Normierung } \Psi_0 = 1)\\ &= b^\top h + \Psi^\top \breve{L}(h) \\ &= b^\top h + \breve{L}^*(\Psi)^\top h && (\breve{L}^* \text{ adjungiert zu } \breve{L}). \end{aligned}$$

a) „$\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow$ (PGΨ)“:

„$\Rightarrow$“: Aus der Inklusion $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ bzw. der Existenz eines $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ folgt das Gleichungssystem (PGΨ) der Preisgleichungen für die duplizierbaren $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$:

$$\Psi^\top L(h) = L^*(\Psi)^\top h = b^\top h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N.$$

„$\Leftarrow$“: Umgekehrt folgt aus der Existenz eines $\Psi \in \mathcal{W}$, mit dem für alle $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ die Preisgleichungen

$$L^*(\Psi)^\top h = \Psi^\top L(h) = b^\top h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$$

erfüllt sind, zunächst die Bedingung $(L^*(\Psi) - b)^\top h = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$ und wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts (indem man $h = L^*(\Psi) - b$ einsetzt) dann die Existenz eines $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) - b = 0$ bzw. $L^*(\Psi) = b$. Dies bedeutet $b \in L^*(\mathcal{W})$ und $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$.

b) Mit der Bedingung

(PGΨ) $\qquad \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^\top L(h) = b^\top h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$

ist nach 12a) „$\Leftarrow$“ $b = L^*(\Psi) \in L^*(\mathcal{W})$ und nach 3) für jedes L^*-Urbild Ψ von b die Inzidenz $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ und auch die Normierung $\Psi_0 = 1$ gesichert. Damit ist nach den oben angegebenen Beziehungen die Bedingung (PGΨ) äquivalent zur Bedingung

(KPGΨ) $\qquad \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^\top \breve{L}(h) = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$, $\Psi_0 = 1$

und zur Bedingung

(KPG*Ψ) $\qquad \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\breve{L}^*(\Psi)^\top h = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$, $\Psi_0 = 1$.

Letztere Bedingung ist wiederum wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_N}$ gleichbedeutend zur Bedingung

$$\exists\, \Psi \in \mathcal{W} \text{ mit } \breve{L}^*(\Psi) = 0,\ \Psi_0 = 1.$$

und nach 2a) $\mathcal{M}^\perp = \ker \breve{L}^*$ zur Existenz eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$.

Die Bedingung (KPGΨ) liefert die Preisgleichungen $\Psi^\top \breve{L}(h) = 0\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N$ für die Kapitalmarktgeschäfte $Z \in \mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N) = L(\ker V_0)$ und kann auch durch eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen ersetzt werden:

$$\exists\, \Psi \in \mathcal{W} \text{ mit } \Psi^\top L(h) = 0 \quad \forall\, h \in \ker V_0,\quad \Psi_0 = 1 \text{ bzw.}$$

$$\exists\, \Psi \in \mathcal{W} \text{ mit } \Psi^\top Z = 0 \quad \forall\, Z \in \mathcal{M},\quad \Psi_0 = 1.$$

13) „$\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$“:

a) $\breve{V}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B}$: „$\subseteq$“: Da $\breve{V}^*(X) = X_0 \cdot b \in \mathcal{B}$ für jedes $X \in \mathcal{W}$ ist, gilt $\breve{V}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}$. „$\supseteq$“: Speziell für $X = \mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{W}$ ist $b = \breve{V}^*(X) \in \breve{V}^*(\mathcal{W})$. Daher ist $\mathcal{B} = \operatorname{lin}\{b\} \subseteq \breve{V}^*(\mathcal{W})$.

b) $\breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}^\perp$: Für alle $X \in \mathcal{W}$ und die speziellen Handelsstrategien $h = \breve{h} = (h_0, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathcal{H}_N$ mit $\hat{h} = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$\breve{L}_0^*(X)^\top h_0 = \breve{L}^*(X)^\top h = X^\top \breve{L}(h) = X^\top L(\hat{h}) = 0.$$

Da diese Gleichung für alle $h_0 \in \mathbb{R}^N$ gilt, folgt wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts (indem man $h_0 = \breve{L}_0^*(X)$ einsetzt)

$$\breve{L}_0^*(X) = 0.$$

Daher ist für alle $X \in \mathcal{W}$ speziell mit $h = \breve{h} = b$

$$\breve{L}^*(X)^\top b = \breve{L}_0^*(X)^\top b_0 = 0$$

bzw. $\breve{L}^*(X) \in \mathcal{B}^\perp$, also $\breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}^\perp$.

c) $L^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} + \breve{L}^*(\mathcal{W})$: Es ist stets

$$\begin{aligned} L^*(\mathcal{W}) &= \{L^*(X) = \breve{V}^*(X) + \breve{L}^*(X) : X \in \mathcal{W}\} \\ &\subseteq \breve{V}^*(\mathcal{W}) + \breve{L}^*(\mathcal{W}) \\ &= \mathcal{B} + \breve{L}^*(\mathcal{W}) \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{B} \cap \breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^\perp = O.$$

d) „⇒“: Im Falle $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$, also bei gültigem LOP, ist auch

$$\begin{aligned} \breve{L}^*(\mathcal{W}) &= \{\breve{L}^*(X) = L^*(X) - \breve{V}^*(X) : X \in \mathcal{W}\} \\ &\subseteq L^*(\mathcal{W}) - \breve{V}^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{W}) + \mathcal{B} \\ &\subseteq L^*(\mathcal{W}). \end{aligned}$$

Da dann mit c)

$$L^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} + \breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq L^*(\mathcal{W}),$$

gilt, folgt in diesem Fall insgesamt

$$L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W}).$$

e) „⇐“: Umgekehrt folgt aus dieser Summendarstellung $L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ des L^*-Bildes $L^*(\mathcal{W})$ auch die Inklusion $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ und damit das LOP.

14) „(VS) $\wedge$ LOP $\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp (= \mathcal{W})$ mit $\dim \mathcal{M}^\perp = 1 \Leftrightarrow \exists_1\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$“:

a) „⇒“: Aus der Vollständigkeit (VS) des Marktmodells folgt $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ und nach dem Dimensionssatz

$$\dim \mathcal{M}^\perp = \dim L(\mathcal{H}_N) - \dim \mathcal{M}.$$

Aus dem LOP folgt mit 6) $\dim L(\mathcal{H}_N) = 1 + \dim \mathcal{M}$. Insgesamt ergibt sich aus (VS) und LOP mit diesen beiden Dimensionsgleichungen für $\mathcal{M}^\perp$ die Dimension $\dim \mathcal{M}^\perp = 1$. Die Unterraumstruktur für ein vollständiges Marktmodell mit gültigem LOP ist in Abbildung 3 dargestellt.

„⇐“: Aus $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp = \mathcal{W} \wedge \dim \mathcal{M}^\perp = 1$ folgt unmittelbar die Vollständigkeit (VS), mit dem Dimensionssatz noch

$$\dim \mathcal{M} = \dim L(\mathcal{H}_N) - \dim \mathcal{M}^\perp = \dim L(\mathcal{H}_N) - 1$$

und damit nach 6) das LOP.

b) Das LOP ist nach 9) äquivalent zur Existenz von mindestens einem $\Psi \in L^{*-1}(\{b\})\ (\neq \emptyset)$. Die gesamte L^*-Urbildmenge von b ist dann gegeben durch den affinen Unterraum

$$L^{*-1}(\{b\}) = \{\Psi\} + \ker L^*.$$

Die Vollständigkeit (VS) ist wegen $\mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N) \oplus \ker L^*$ äquivalent zu $\ker L^* = O$. Unter Voraussetzung des LOP ist die Vollständigkeit dann gleichbedeutend dazu, dass b genau ein L^*-Urbild besitzt:

$$L^{*-1}(\{b\}) = \{\Psi\} + \ker L^* = \{\Psi\}.$$

Das gleichzeitige Auftreten des LOP und der Vollständigkeit (VS) ist also äquivalent dazu, dass b genau ein L^*-Urbild Ψ besitzt.

15) „(VS) $\wedge\ m = n_1 \Leftrightarrow L$ isomorph $\Leftrightarrow L^*$ isomorph“:

a) „⇒“: Die Vollständigkeit (VS) bedeutet die Surjektivität der Abbildung L. Aus der Dimensionsgleichung $\dim \mathcal{H}_N = m = n_1 = \dim \mathcal{W}$ folgt mit dem Dimensionssatz für die lineare Abbildung L

$$\dim \ker L = \dim \mathcal{H}_N - \dim L(\mathcal{H}_N) = m - n_1 = 0,$$

$\ker L = O$ und somit auch die Injektivität von L. Insgesamt ist dann L ein Isomorphismus, d. h. eine bijektive lineare Abbildung.

„⇐“: Falls L ein Isomorphismus ist, bedeutet die Surjektivität von L die Vollständigkeit des Marktmodells und die Injektivität von L zunächst $\ker L = O$ und mit dem Dimensionssatz für eine lineare Abbildung dann

$$n_1 = \dim \mathcal{W} = \dim L(\mathcal{H}_N) = \dim \mathcal{H}_N - \dim \ker L = m - 0 = m.$$

b) Aus den oben angegebenen direkten Zerlegungen der Vektorräume $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ in orthogonale Komplemente folgt, dass L genau dann injektiv ist ($\ker L = O$), wenn L^* surjektiv ist ($L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{H}_N$) und analog dass L^* genau dann injektiv ist, wenn L surjektiv ist. Insgesamt ist die lineare Abbildung L genau dann bijektiv (isomorph), wenn L^* bijektiv ist.

16) Die Arbitragefreiheit (AF) $\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\underset{\cdot}{>}0} = \emptyset$ des Marktmodells

ist nach dem **Alternativsatz**[7] über die Disjunktheit eines linearen Unterraums $\mathcal{M}$ zum schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\underset{\cdot}{>}0} = \{X \in \mathcal{W} : X \underset{\cdot}{>} 0$, d. h. $X \geq 0$ und $X \neq 0\}$ äquivalent zur Existenz eines stochastischen Prozesses

$$\Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0} \qquad (\mathcal{W}_{>0} = \{X \in \mathcal{W} : X > 0\}),$$

eines so genannten **Zustands(preis)prozesses**[8] des Marktmodells. Ohne Einschränkung (durch Übergang von Φ zu Φ/Φ_0) kann Φ als ein mit $\Phi_0 = 1$ normierter Zustandsprozess gewählt werden, so dass Φ ein positiver Bewertungsprozess Ψ des Marktmodells ist:

$$\Psi \in \mathcal{M}^{\perp} \text{ mit } \Psi_0 = 1,\ \Psi > 0.$$

Ein arbitragefreies Marktmodell ist also ein Marktmodell, in dem das LOP gilt und der Bewertungsprozess Ψ positiv gewählt werden kann. Damit erhält man Charakterisierungen der Arbitragefreiheit, wenn man bei den mit Ψ angegebenen Charakterisierungen des LOP das Ψ durch ein positives Φ ersetzt. Diese Charakterisierungen sind in Tabelle 1 aufgelistet. Beispielsweise gelten im arbitragefreien Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ die Preisgleichungen $\Phi^{\mathrm{T}} L(h) = V_0(h)$, $h \in \mathcal{H}_N$, mit einem positiven Bewertungsprozess Φ, so dass der Preis jedes duplizierbaren Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ als Skalarprodukt $\pi(X) = \Phi^{\mathrm{T}} X$ von X und dem positiven normierten Zustandspreisprozess Φ berechnet werden kann. Dies ist die Aussage des **Fundamentalsatzes der Preistheorie**[9] für das Mehrperiodenmodell.

Das gleichzeitige Auftreten der Arbitragefreiheit (AF) und der Vollständigkeit (VS) ist äquivalent dazu, dass b genau ein L^*-Urbild Φ besitzt und dieses Φ positiv ist. Weiter gilt in diesem Fall dann

$$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}\ (= \mathcal{W}) \text{ mit } \mathcal{M}^{\perp} = [\Phi],\ \Phi > 0. \qquad \square$$

2 Formales Wahrscheinlichkeitsmaß, Preismaß, Martingalmaß und risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß

Für die folgenden Betrachtungen sei die Arbitragefreiheit (AF) vorausgesetzt. Es werden nun einige in der Literatur vielzitierte Begriffe im Mehrperiodenmodell erläutert. Es sind dies die in der Überschrift aufgeführten Bezeichnungen und außerdem die Begriffe Arrow-Debreu-Preis, Zustandspreis, Ereignispreis, Arrow-Debreu-Preisvektor, Zustandspreisvektor, Ereignispreisvektor, deterministischer Preisvektor und risikoneutrale Bewertung. Mittels der Duplizierbarkeit bestimmter Arrow-Debreu-Papiere ($\mathbf{1}_{t,C}$, $C \in \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$) werden dabei auch die meist weniger beachteten impliziten Prämissen dargestellt, unter denen diese Begriffe erst einen Sinn haben. Unter der Voraussetzung (AF) und der Voraussetzung (FH) der Existenz von sog. festverzinslichen Handelsstrategien existiert das für alle Zeitpunkte $t \in I$ einheitliche formale (synthetische) Wahrscheinlichkeitsmaß Q. Unter diesen Voraussetzungen kann dieses W-Maß Q auch Martingalmaß und risikoloses bzw. risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß genannt werden. Außerdem kann unter diesen Voraussetzungen die Bewertung nach dem Duplikationsprinzip als Barwertberechnung (Diskontierung) mit dem deterministischen Preisvektor $P := (d_0,\ldots,d_T)^{\mathrm{T}}$ ($d_t = \Phi_t(\Omega)$) für die Q-Erwartungswerte der Zustandsfunktionen X_t bezüglich des sog. risikoneutralen W-Maßes Q interpretiert werden und daher risikoneutrale Bewertung genannt werden. Weiter kann das formale W-Maß Q als Preismaß bezeichnet werden, wenn die Voraussetzungen (AF), (FH) und die Vollständigkeit (VS) des Marktmodells vorliegen.

Das formale W-Maß

Die Arbitragefreiheit (AF) ist im Mehrperiodenmodell äquivalent zur Existenz eines normierten Zustandspreisprozesses Φ, d. h. eines stochastischen Prozesses $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0}$ mit $\Phi_0 = 1$. Für

---

[7] Der Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel ist formuliert bei Pleier (2021) im mathematischen Anhang auf S. 387–388 und auf der Website www.pleier-r.de. Der verwendete Spezialfall des Alternativsatzes über die Disjunktheit eines linearen Unterraums $\mathcal{M}$ zum schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\underset{\cdot}{>}0}$ entspricht dem Alternativsatz von Stiemke über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen.

[8] Die Bezeichnung Zustands(preis)prozess findet man bei Kremer (2011), S. 41, 175, 177.

[9] Kremer (2011) behandelt den Fundamentsatz der Preistheorie für das Mehrperiodenmodell auf S. 175, 176 und für das Einperiodenmodell auf S. 40.

jedes $t \in I$ ist die $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion $\Phi_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ auf jedem $A_t \in \mathcal{P}_t = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_t)$ positiv und konstant und somit auch eine Abbildung $\Phi_t : \mathcal{P}_t \longrightarrow [0,\infty[$. Diese kann von $\mathcal{P}_t$ aus zu einem Maß

$$\Phi_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,\infty[$$

auf der σ-Algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ bzw. auf dem Messraum $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ fortgesetzt werden: Für

$$C = \bigcup_{C \supseteq A_{t,k} \in \mathcal{P}_t} A_{t,k} \in \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$$

wird der Funktionswert $\Phi_t(C)$ definiert durch

$$\Phi_t(C) := \sum_{C \supseteq A_{t,k} \in \mathcal{P}_t} \Phi_t(A_{t,k}) =: d_{t,C} \qquad (\mathcal{P}_t \text{ ist endlich bei } |\Omega| = K < \infty).$$

Speziell für $C = \Omega = A_0 \in \mathcal{P}_0$ ist

$$\Phi_t(\Omega) = \sum_{A_{t,k} \in \mathcal{P}_t} \Phi_t\,(A_{t,k}) = d_{t,\Omega} =: d_t < \infty.$$

Die Abbildung Φ_t ist auf der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ nichtnegativ, σ-additiv und mit den Eigenschaften $\Phi_t(\emptyset) = 0$ und $\Phi_t(\Omega) < \infty$ ausgestattet, also ein endliches Maß auf $\mathcal{F}_t$. Das zugehörige auf $\mathcal{F}_t$ normierte Maß

$$Q_t := \Phi_t / \Phi_t(\Omega)$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,1]$ (W-Maß, $Q_t(\Omega) = 1$) auf dem Messraum $(\Omega,\mathcal{F}_t)$. Diese zu den Zeitpunkten $t \in I$ gehörigen innerhalb des Marktmodells entwickelten (formalen, synthetischen) W-Maße Q_t werden bei der Interpretation der Bewertung als Diskontierung der Q_t-Erwartungswerte der Zahlungen X_t verwendet.

Falls für das Marktmodell neben der Arbitragefreiheit (AF) noch die zusätzliche Voraussetzung (FH) der Existenz von sog. festverzinslichen Handelsstrategien angenommen wird, kann gezeigt werden, dass jedes W-Maß Q_t ($t \in I$) die Einschränkung des W-Maßes $Q := Q_T$ auf die Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ von $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ (Potenzmenge von Ω) ist.[10] Das W-Maß

$$Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

wird dann das (für alle $t \in I$ einheitliche, simultane) **formale W-Maß** des Marktmodells genannt. Dieses innerhalb des Marktmodells (aus dem Zustandspreisprozess Φ) entwickelte formale W-Maß Q hat nichts mit den tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zustände $\omega_k \in \Omega$ zu tun. Nachfolgend wird auch noch dargestellt, wann Q als Preismaß, Martingalmaß und risikoneutrales W-Maß bezeichnet werden kann.

Das Preismaß

Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) und der Voraussetzung

$$(\mathrm{DP}\xi^{t,C}) \qquad \xi^{t,C} \in L(\mathcal{H}_N) \qquad (C \in \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)),$$

---

[10] Ein Beweis für die Existenz des einheitlichen Preismaßes Q wird bei Kremer (2011), S. 198–199, und bei Pleier (2018), S. 168–170, gegeben. Die Voraussetzung (FH) der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien η^t ($t = 1,\ldots,T$; $\eta_s^t = 0$ für $s \neq t$, $L_{t-1}(\eta^t)(A_{t-1,k}) = -R_{t-1}(\eta^t)(A_{t-1,k}) = -S_{t-1}(A_{t-1,k})^{\top}\eta_t^t(A_{t-1,k}) = -\rho_t$, $L_t(\eta^t)(A_{t,m}) = V_t(\eta^t)(A_{t,m}) = S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\top}\eta_t^t(A_{t-1,k}) = +1$ für $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$, $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$) wird verwendet, um 1) die Existenz der zu den Zeitintervallen $[t-1,t]$ gehörigen einperiodischen deterministischen AD-Termingeschäfte $\chi^t = (0,..,0,-\rho_t,1,0,..,0)^{\top}$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ mit ihren deterministischen einperiodischen Diskontfaktoren $\rho_t > 0$ zu zeigen, 2) die Existenz der zu den Zeitintervallen $[0,t]$ gehörigen deterministischen AD-Kassageschäfte $\hat{\zeta}^t = (-d_t,0,..,0,1,0,..,0)^{\top}$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ mit ihren deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t > 0$ zu sichern, 3) die Existenz der deterministischen AD-Papiere $\zeta^t = \mathbf{1}_{t,\Omega} = (0,..,0,1,0,..,0)^{\top}$ im L-Bild $L(\mathcal{H}_N)$ mit ihren Preisen d_t zu gewährleisten, 4) die Beziehung $d_t = \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t$ zwischen den Diskontierungsfaktoren d_t und den Diskontfaktoren ρ_s ($s = 1,\ldots,t$) darzustellen und 5) die Existenz des für alle Zeitpunkte $t \in I$ einheitlichen W-Maßes $Q := Q_T$ (mit $Q_t = Q|_{\mathcal{F}_t}$) zu beweisen.

dass also das stochastische **Arrow-Debreu-Papier**[11] (AD-Papier, Elementar-Zahlungsprofil, Zustands-Zahlungsprofil, reines, elementares oder primitives Wertpapier, Elementar-Claim, Zustands-Claim, zustandsbedingter Zahlungsanspruch, englisch: state contingent claim)

$$\xi^{t,C} := \mathbf{1}_{t,C} = (0,..,0,\mathbf{1}_C,0,..0)^\top \in \mathcal{W}$$

($\xi^{t,C} = 1$ für $s = t$ und alle $\omega \in C$, $\xi^{t,C} = 0$ für $s \neq t$ oder $\omega \notin C$) duplizierbar ist, wird der zum Zeitintervall $[0,t]$ und zum Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$ gehörige Funktionswert $\Phi_t(C) = d_{t,C}$ als Preis des AD-Papiers $\xi^{t,C}$ im Marktmodell realisiert:

$$\begin{aligned}\pi(\xi^{t,C}) &= \Phi^\top \xi^{t,C} = \sum_{s=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_s}\Phi_s(A_{s,k})\xi_s^{t,C}(A_{s,k}) \\ &= \sum_{C\supseteq A_{t,k}\in\mathcal{P}_t}\Phi_t(A_{t,k}) = \Phi_t(C) = d_{t,C}.\end{aligned}$$

Das Maß $d_{t,C} = \Phi_t(C)$ des Ereignisses $C \in \mathcal{F}_t$ wird daher als **Arrow-Debreu-Preis** (AD-Preis), Zustandspreis[12] oder besser **Ereignispreis** bezeichnet. Das Maß $\Phi_t(C)$ von C kann auch als (nicht normiertes) **Preismaß** von C bezeichnet werden. Falls bei festem $t \in I$ für alle $C \in \mathcal{F}_t$ die Voraussetzung (DP$\xi^{t,C}$) erfüllt ist, kann das Maß $\Phi_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,\infty[$ als Abbildung auch als das zum Zeitpunkt $t \in I$ gehörige Preismaß bezeichnet werden. Die Bezeichnung des W-Maßes $Q_t(C)$ von C als (normiertes oder relatives) Preismaß von C wird unten noch begründet.

Im Spezialfall $C = A_{t,k} \in \mathcal{P}_t = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_t)$ ($t \in I$, $k \in \{1,\dots,k_t\}$) besitzt das stochastische AD-Papier

$$\xi^{t,k} := \xi^{t,A_{t,k}} := w_{t,A_{t,k}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}} = \left(0,..,0,\mathbf{1}_{A_{t,k}},0,..,0\right)^\top \in \mathcal{W}$$

unter der Voraussetzung

(DP$\xi^{t,k}$) $\qquad \xi^{t,k} \in L(\mathcal{H}_N)$

den Preis

$$\pi(\xi^{t,k}) = \Phi_t(A_{t,k}) =: d_{t,k}.$$

Insbesondere wird für $C = \Omega = A_0 \in \mathcal{P}_0$ unter der Voraussetzung

(DPζ^t) $\qquad \zeta^t \in L(\mathcal{H}_N)$,

dass also das deterministische AD-Papier[13]

$$\zeta^t := \xi^{t,\Omega} = \mathbf{1}_{t,\Omega} = \left(0,..,0,\mathbf{1}_\Omega,0,..,0\right)^\top = \left(0,..,0,1,0,..,0\right)^\top \in \mathcal{W}$$

duplizierbar ist, der zum Intervall $[0,t]$ bzw. Zeitpunkt t gehörige deterministische (Ereignis-)Preis

$$\pi(\zeta^t) = \Phi_t(\Omega) = d_t$$

im Marktmodell realisiert.

Weiter ist für ein Elementarereignis $C = A_{T,k} = \{\omega_k\} \in \mathcal{P}_T$ ($k \in \{1,\dots,K\}$) unter der Vorausset-

---

[11] Die Idee der reinen Wertpapiere geht zurück auf Gérard Debreu (1921–2004; 1983 Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, 1976 französischer Orden Légion d'honneur) und Kenneth J. Arrow (1921–2017; 1972 Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, 1986 John-von-Neumann-Theorie-Preis).

[12] Die Bezeichnung Zustandspreis ist streng genommen nur exakt für die Elementarereignisse $C = A_{T,k} = \{\omega_k\} \in \mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ bzw. Zustände $\omega_k \in \Omega$ mit ihren AD-Papieren $\xi^{T,k}$ und deren Preisen $\pi(\xi^{t,k}) = \Phi_T(\{\omega_k\}) = \Phi_T(\omega_k) = \Phi_{T,k} = d_{T,k}$.

[13] Dem deterministischen AD-Papier $\zeta^t = \mathbf{1}_{t,\Omega} = (0,..,0,1,0,..,0)^\top$ des Marktmodells entspricht in der Realität ein festverzinsliches Wertpapier (Anleihe, Rentenpapier, Obligation, englisch: bond oder debenture) ohne Kupons (Zinsscheine), also ohne Zinszahlungen während der Laufzeit. Diese gesamtfällige Anleihe kann sowohl als Aufzinsungspapier (z. B. Bundesschatzbrief Typ B) als auch als Abzinsungspapier (Nullkuponanleihe, Zerobond) vorkommen.

zung

(DP$\xi^{T,k}$) $\xi^{T,k} \in L(\mathcal{H}_N)$

der Preis der charakteristischen Funktion

$$\xi^{T,\omega_k} = \mathbf{1}_{T,\omega_k} = \left(0,...,0,\mathbf{1}_{\omega_k}\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W}$$

des k-ten Zustands $\omega_k \in \Omega$ gegeben durch

$$\pi(\xi^{T,\omega_k}) = \Phi_T(\omega_k) = \Phi_{T,k} = d_{T,k}.$$

Daher wird die Komponente $\Phi_{T,k}$ ($k = 1,\ldots,K$) des Koordinaten-Tupels des Zustandspreisprozesses Φ als **Zustandspreis** des k-ten Zustands $\omega_k \in \Omega$ bezeichnet.

Das zum Zeitpunkt $t \in I$ gehörige und aus den Ereignispreisen $d_{t,k} = \Phi_t(A_{t,k})$ bestehende Koordinaten-k_t-Tupel

$$\Phi_t = \left(\Phi_t(A_{t,1}),...,\Phi_t(A_{t,k_t})\right)^{\mathsf{T}} = \left(d_{t,1},...,d_{t,k_t}\right)^{\mathsf{T}}$$

der $\mathcal{F}_t$-messbaren Zustandsfunktion

$$\Phi_t = \sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k}\mathbf{1}_{A_{t,k}}$$

zur Basis $\mathbf{1}_{A_{t,k}}$ ($k \in \{1,\ldots,k_t\}$) von $\mathcal{W}_{t,1}$ kann als Arrow-Debreu-Preisvektor, Zustandspreisvektor[14] oder besser Ereignispreisvektor des Zeitpunkts t bezeichnet werden.

Weiter kann auch das zur Gesamtheit aller Zeitpunkte $t \in I$ gehörige Koordinaten-n_1-Tupel

$$\begin{aligned}\Phi &= (\Phi_0,\Phi_1,\ldots,\Phi_T)^{\mathsf{T}}\\ &= (1;\Phi_1(A_{1,1}),..,\Phi_1(A_{1,k_1});\ldots;\Phi_T(\omega_1),..,\Phi_T(\omega_K))^{\mathsf{T}}\\ &= (1;d_{1,1},..,d_{1,k_1};\ldots;d_{T,1},..,d_{T,K})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n_1}\end{aligned}$$

($n_1 = 1 + k_1 + \ldots + k_{t-1} + K$) des Zustandsprozesses

$$\Phi = \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k}\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$$

zur $\mathcal{W}$-Basis $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ ($t \in I,\ k \in \{1,\ldots,k_t\}$) als (der zu allen Zeitpunkten $t = 0,\ldots,T$ gehörige) **Ereignispreisvektor** bezeichnet werden. Der Zustandsprozess $\Phi = (\Phi_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega}$ selbst wird auch als **Zustandspreisprozess** bezeichnet.

Außerdem wird unter der Voraussetzung (DPζ^t) für alle $t \in I$ das aus den Ereignispreisen $\Phi_t(\Omega) = d_{t,\Omega} = d_t$ des sicheren Ereignisses $\Omega \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$ ($t \in I$) zusammengestellte (T+1)-Tupel

$$P := \Phi(\Omega) := (\Phi_0(\Omega),\ldots,\Phi_T(\Omega))^{\mathsf{T}} = (d_0,\ldots,d_T)^{\mathsf{T}}$$

deterministischer Preisvektor genannt.

Der mit dem zum Zeitpunkt $t = 0$ durchgeführten Kauf des AD-Papiers $\xi^{t,C}$ verbundene Zahlungsstrom

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}^{t,C} &= -\,d_{t,C}\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} + \xi^{t,C}\\ &= \left(\xi_0^{t,C} - d_{t,C},\xi_1^{t,C},...,\xi_t^{t,C},...,\xi_T^{t,C}\right)^{\mathsf{T}}\\ &= \left(-d_{t,C},0,..,0,\mathbf{1}_C,0,..,0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}\end{aligned}$$

ist genau dann duplizierbar, wenn das AD-Papier $\xi^{t,C}$ duplizierbar ist: Nach Beweisteil 1b) ist nämlich stets $Y := -\,d_{t,C}\cdot\zeta^0 = -\,d_{t,C}\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{V} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ und damit $\widehat{\xi}^{t,C} = Y + \xi^{t,C} \in L(\mathcal{H}_N)$ genau

[14] Die Bezeichnung Zustandspreisvektor ist eigentlich nur exakt für das zum Endzeitpunkt $t = T$ gehörige und aus den Zustandspreisen $d_{T,k} = \Phi_T(\omega_k)$ bestehende Koordinaten-K-Tupel $\Phi_T = (\Phi_T(\omega_1),\ldots,\Phi_T(\omega_K))^{\mathsf{T}} = (d_{t,1},\ldots,d_{t,K})^{\mathsf{T}}$.

dann, wenn $\xi^{t,C} = - Y + \hat{\xi}^{t,C} \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt. Unter den Voraussetzungen (AF) und (DP$\xi^{t,C}$) ist $\pi(Y) = -d_{t,C}\pi(\zeta^0) = -d_{t,C}d_0 = -d_{t,C}$, $\pi(\xi^{t,C}) = d_{t,C}$, $\pi(\hat{\xi}^{t,C}) = \pi(Y) + \pi(\xi^{t,C}) = 0$ und somit $\hat{\xi}^{t,C} \in \mathcal{M}$ ein stochastisches Kapitalmarktgeschäft. Das Kapitalmarktgeschäft $\hat{\xi}^{t,C}$ wird hier als das zum AD-Papier $\xi^{t,C}$ gehörige stochastische **Arrow-Debreu-Kassageschäft** (AD-Kassageschäft) bezeichnet. Die positive Konstante

$$d_{t,C} = \Phi_t(C)$$

wird auch als der zum Zeitintervall $[0,t]$ und Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$ gehörige **stochastische Diskontierungsfaktor** bezeichnet. Weiter ist dann

$$a_{t,C} = 1/d_{t,C}$$

der zugehörige stochastische Aufzinsungsfaktor und

$$i_{t,C} = a_{t,C} - 1 = 1/d_{t,C} - 1$$

der zugehörige stochastische Zinssatz. Der Diskontierungsfaktor $d_{t,C}$ existiert dann im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells in dem Sinne, dass mit Hilfe des zugehörigen Kapitalmarktgeschäfts $\hat{\xi}^{t,C} \in \mathcal{M}$ eine zum Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ und im Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$ stattfindende Zahlung $X = \gamma\xi^{t,C} = \gamma\mathbf{1}_{t,C}$ $(\gamma \in \mathbb{R})$ tatsächlich auf eine gleichwertige sichere Zahlung im Zeitpunkt $s = 0$ transponiert bzw. abgezinst werden kann: Aus dem Zahlungsprofil $X = \gamma\cdot\mathbf{1}_{t,C}$ mit dem Preis $\pi(X) = \gamma\pi(\xi^{t,C}) = \gamma d_{t,C}$ erhält man nämlich durch Kombination (additive Ergänzung, Glattstellung, Replizierung) mit dem Kapitalmarktgeschäft $Z := -\gamma\hat{\xi}^{t,C} = (\gamma d_{t,C},0,..,0,-\gamma\mathbf{1}_C,0,..,0)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}$ das Zahlungsprofil

$$Y = X + Z = (\gamma d_{t,C},0,\ldots,0)^\mathsf{T} = \gamma d_{t,C}\mathbf{1}_{0,\Omega}$$

mit dem gleichen Preis $\pi(Y) = \gamma d_{t,C} = \pi(X)$. Ebenso steht der Aufzinsungsfaktor $a_{t,C}$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ zur Verfügung, da mittels $Z' = +\gamma a_{t,C}\hat{\xi}^{t,C} = (-\gamma,0,..,0,\gamma a_{t,C}\mathbf{1}_C,0,..,0)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}$ eine im Zeitpunkt $s = 0$ sicher stattfindende Zahlung $\gamma = X_0 = X_0(\Omega) \in \mathbb{R}$ auf eine gleichwertige zum Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ und im Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$ stattfindende Zahlung $\gamma a_{t,C}$ transponiert bzw. aufgezinst werden kann.

Im Spezialfall $C = A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ erhält man unter der Voraussetzung (DP$\xi^{t,k}$) das stochastische Kapitalmarktgeschäft

$$\hat{\xi}^{t,k} = \left(-d_{t,k},0,..,\mathbf{1}_{A_{t,k}},0,..,0\right)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}$$

und im Spezialfall $C = \Omega = A_0 \in \mathcal{P}_0$ unter der Voraussetzung (DPζ^t) das festverzinsliche (deterministische) Kapitalmarktgeschäft

$$\hat{\zeta}^t = \left(-d_t,0,..,0,1,0,..,0\right)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}$$

mit dem **deterministischen Diskontierungsfaktor** $d_t = \Phi_t(\Omega)$.

Sind die beiden Voraussetzungen (DP$\xi^{t,C}$) und (DPζ^t) erfüllt, so ist der normierte Ereignispreis

$$Q_t(C) = \Phi_t(C)/\Phi_t(\Omega) = \pi(\xi^{t,C})/\pi(\zeta^t)$$

von C der Anteil des Ereignispreises $\Phi_t(C)$ des Zeitpunkts t und Ereignisses $C \in \mathcal{F}_t$ am deterministischen Ereignispreis $\Phi_t(\Omega)$ des Zeitpunkts t, also der relative Ereignispreis zu t und C in Bezug auf den deterministischen Ereignispreis des Zeitpunkts t. Daher kann dann das oben definierte W-Maß $Q_t(C)$ des Ereignisses C auch als das zum Zeitpunkt t gehörige (relative, normierte) **Preismaß** von C bezeichnet werden. Zu festem $t \in I$ kann bei Gültigkeit der Voraussetzung (DP$\xi^{t,C}$) für alle $C \in \mathcal{F}_t$ auch das für alle $C \in \mathcal{F}_t$ definierte und innerhalb des Marktmodell entwickelte (formale, synthetische) W-Maß $Q_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,1]$ als das zum Zeitpunkt t gehörige (relative) Preismaß bezeichnet werden. Diese Bezeichnung von $\Phi_t(C)$ als Zustands-, AD- oder Ereignispreis und von $Q_t(C)$ als Preismaß wird oft auch noch ohne das Vorliegen der entsprechenden Voraussetzungen verwendet.

Unter den Voraussetzungen (AF) und (FH) ist auch (DPζ^t) für alle $t \in I$ erfüllt[15] und jedes W-Maß Q_t ($t \in I$) ist die Einschränkung des W-Maßes $Q := Q_T$ auf die Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ von $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$.[16] Es wird jetzt noch vorausgesetzt, dass für alle Zeitindizes $t \in I$ und alle Ereignisse $C \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ auch die Bedingung (DP$\xi^{t,C}$) erfüllt ist. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass alle $\mathcal{W}$-Basisvektoren $w_{t,A_{t,k}} = \xi^{t,A_{t,k}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ ($t \in I$, $k \in \{1,\ldots,k_t\}$) im Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ liegen, also die Vollständigkeit (VS) des Marktmodells vorliegt.[17] Unter den Voraussetzungen (AF), (FH) und (VS) kann dann das (für alle $t \in I$ einheitliche, simultane) formale W-Maß

$$Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

auch als **Preismaß des Marktmodells** bezeichnet.

Das Martingalmaß

Anmerkung zur bedingten Erwartung

Für den im Mehrperiodenmodell vorliegenden Fall eines gefilterten W-Raum $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in I},Q)$ mit den σ-Algebren $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$, dem endlichen Zustandsraum Ω und dem auf den Ereignissen $A_s \in \mathcal{P}_s$ ($s \in I$) positiven W-Maß $Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ wird für eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion X_t und die Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}_s$ von $\mathcal{F}_t$ ($s \le t$) die **bedingte Erwartung** von X_t unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ (bzw. bezüglich $\mathcal{F}_s$ oder gegeben $\mathcal{F}_s$) folgendermaßen definiert:

$$E_Q^{\mathcal{F}_s}(X_t) := E_Q(X_t|\mathcal{F}_s) := \sum_{A_s\in\mathcal{P}_s}\left(\frac{1}{Q(A_s)}\cdot\sum_{\substack{A_t\subseteq A_s\\ A_t\in\mathcal{P}_t}} X_t(A_t)Q(A_t)\right)\cdot\mathbf{1}_{A_s}.$$

Die bedingte Erwartung

$$Y_s := E_Q(X_t|\mathcal{F}_s) = \sum_{A_s\in\mathcal{P}_s} Y_s(A_s)\cdot\mathbf{1}_{A_s}$$

ist also die $\mathcal{F}_s$-messbare Zustandsfunktion Y_s, deren Funktionswerte

$$Y_s(A_s) = \frac{1}{Q(A_s)}\cdot\sum_{\substack{A_t\subseteq A_s\\ A_t\in\mathcal{P}_t}} X_t(A_t)Q(A_t) = E_Q(X_t|A_s) \qquad (A_s \in \mathcal{P}_s)$$

jeweils durch den bedingten Erwartungswert $E_Q(X_t|A_s)$ von X_t unter der Bedingung (Hypothese) A_s gegeben sind.[18] Die bedingte Erwartung $Y_s = E_Q(X_t|\mathcal{F}_s)$ lässt sich außerdem charakterisieren als die eindeutig bestimmte $\mathcal{F}_s$-messbare Zustandsfunktion Y_s mit der Eigenschaft

$$E_Q(Y_s\cdot\mathbf{1}_C) = E_Q(X_t\cdot\mathbf{1}_C) \quad \text{für alle } C \in \mathcal{F}_s.$$

Speziell für $C = \Omega$ erhält man die Aussage $E_Q(Y_s) = E_Q(X_t)$. Dabei ist für jede $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, die hier im Fall eines endlichen Ω und damit einer endlichen Partition $\mathcal{P}_t = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_t) \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ auch Q-integrierbar (bezüglich des W-Maßes Q auf $\mathcal{F}_t$ bzw. auf $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$) ist, der Q-Integralwert

---

15 Einen Beweis dafür, dass (FH) hinreichend für (DPζ^t) ist, findet man bei Pleier (2018), S. 164–165.

16 Ein Beweis für die Existenz des einheitlichen Preismaßes Q wird bei Kremer (2011), S. 198–199 und bei Pleier (2018), S. 168–170 gegeben.

17 Eine Begründung für die Charakterisierung der Vollständigkeit durch die Bedingung (DP$\xi^{t,C}$) $\forall\, t \in I$, $C \in \mathcal{F}_t$ findet man bei Pleier (2018), S. 154.

18 Wegen der $\mathcal{F}_t$- bzw. $\mathcal{P}_t$-Messbarkeit von X_t ist nämlich $X_t(A_t) = X_t(\omega)$ für $\omega \in A_t \in \mathcal{P}_t$. Da $Q = Q_T$ ein W-Maß auf der endlichen σ-Algebra $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ ist, gilt noch $Q(A_t) = \sum_{\omega\in A_t} Q(\{\omega\})$. Damit ist $\frac{1}{Q(A_s)}\cdot\sum_{\substack{A_t\subseteq A_s\\ A_t\in\mathcal{P}_t}} X_t(A_t)Q(A_t)$ $= \frac{1}{Q(A_s)}\cdot\sum_{\omega\in A_s} X_t(\omega)Q(\omega) = \frac{1}{Q(A_s)}\int_{A_s} X_t\,dQ$ der bedingte Q-Erwartungswert $E_Q(X_t|A_s)$ von X_t unter der Bedingung A_s.

$$E_Q(Z) := \int_\Omega Z dQ = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} Z(A_t)Q(A_t) = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} \sum_{\omega \in A_t} Z(\omega)Q(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega)Q(\omega)$$

der Erwartungswert von Z bezüglich des W-Maßes Q.
Speziell für $s = 0$ ist $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_0) = \{\Omega\}$ und damit die bedingte Erwartung von X_t bezüglich $\mathcal{F}_0$ gleich dem Erwartungswert von X_t:

$$E_Q(X_t|\mathcal{F}_0) = \sum_{A_0=\Omega} \left(\frac{1}{Q(A_0)} \cdot \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t)Q(A_t) \right) \cdot \mathbf{1}_{A_s}$$

$$= \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t)Q(A_t) = E_Q(X_t) .$$

Mittels der bedingten Erwartung wird der Begriff des Martingals definiert. Ein an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess X heißt ein **Martingal** oder $\mathcal{F}$-Martingal, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt:

$$E_Q(X_{s+1}|\mathcal{F}_s) = X_s \text{ für } s = 0,\ldots,T\text{-}1.$$

Mit der oben angegebenen charakterisierenden Eigenschaft der bedingten Erwartung erhält man hier speziell für $C = \Omega$, $\mathbf{1}_\Omega = 1$ die Aussage $E_Q(X_{s+1}) = E_Q(X_s)$, so dass der Erwartungswert $E_Q(X_t)$ der Zustandsfunktionen X_t für alle $t \in I$ konstant ist: Mit vollständiger Induktion ergibt sich nämlich $E_Q(X_t) = E_Q(X_0) = X_0$. Für ein Martingal X erwartet man also insbesondere, dass der zukünftige Wert im Mittel mit dem heutigen Wert übereinstimmt, also die Vorausschau nach dem Prinzip „Morgen wird wie heute sein“ erfolgt. △

Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) und der Bedingung (FH), also der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien, lässt sich die zum j-ten Finanzinstrument S^j und zum festen Zeitpunkt $s \in I$ gehörige diskontierte Preis-Zustandsfunktion $M_s^j := d_s S_s^j$ darstellen als Summe der bedingten Erwartung der zu einem festen späteren Zeitpunkt $t \geq s$ gehörigen diskontierten Preis-Zustandsfunktion $M_t^j = d_t S_t^j$ und der bedingten Erwartung der diskontierten Dividenden-Zustandsfunktionen $\gamma_i^j := d_i \delta_i^j$ des Zeitintervalls $[s+1,t]$:

$$d_s S_s^j = E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_t S_t^j) + \sum_{i=s+1}^{t} E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_i \delta_i^j) \qquad \text{für } s \leq t.$$[19]

Im Spezialfall eines dividendenlosen Finanzinstruments S^j ($\delta^j = 0$) ist der diskontierte Preisprozess $M^j = (M_t^j)_{t\in I} = (d_t S_t^j)_{t\in I}$ ein Martingal bezüglich des formalen W-Maßes Q und der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ des gefilterten W-Raums $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in I},Q)$:

$$d_s S_s^j = E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_t S_t^j) \qquad \text{für } s \leq t.$$

Durch die zusätzliche Voraussetzung (FH) ist auch (DPζ^t) für alle $t \in I$ gesichert, so dass für alle $t \in I$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells tatsächlich die deterministischen AD-Kassageschäfte $\hat{\zeta}^t$ mit ihren deterministischen Diskontierungsfaktoren d_t zur Verfügung stehen.[20] Aufgrund dieser Martingaleigenschaft wird das formale W-Maß Q auch **Martingalmaß** genannt. Der Zusammenhang zwischen der Arbitragefreiheit und der Martingaleigenschaft der dividendenlosen diskontierten Preisprozesse wurde im Jahr 1979 von Harrison und Kreps gefunden.

Das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß

Es sei wieder die Arbitragefreiheit (AF) und die Bedingung (FH) der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien η^t ($t = 1,\ldots,T$) vorausgesetzt. Damit ist auch im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ die Existenz der zu den Zeitintervallen $[t\text{-}1,t]$ gehörigen einperiodischen deterministischen AD-Termingeschäfte

[19] Ein Beweis für die Martingaleigenschaft der dividendenlosen diskontierten Preisprozesse wird bei Kremer (2011), S. 185-205, und bei Pleier (2018), S. 178–182, gegeben. Die Voraussetzung (FH) wird dabei verwendet, um die Existenz des für alle Zeitpunkte $t \in I$ einheitlichen W-Maßes $Q := Q_T$ (mit $Q_t = Q|_{\mathcal{F}_t}$) zu sichern.

[20] Einen Beweis dafür, dass (FH) hinreichend für (DPζ^t) für alle $t \in I$ ist, findet man bei Pleier (2018), S. 164–165.

$\chi^t = (0,..,0,-\rho_t,1,0,..,0)^\mathsf{T}$

mit ihren deterministischen einperiodischen Diskontfaktoren $\rho_t > 0$ gesichert. Weiter ist im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ die Existenz der zu den Zeitintervallen $[0,t]$ gehörigen deterministischen AD-Kassageschäfte

$$\hat{\zeta}^t = \left(-d_t, 0,..,0,1,0,..,0\right)^\mathsf{T}$$

mit ihren deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t > 0$ gesichert und es gilt

$d_t = \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t$.

Aus der Martingaleigenschaft eines diskontierten dividendenlosen Finanzinstruments S^j lässt sich nun die Aussage herleiten (Beweis folgt unten), dass für *alle* dividendenlosen Finanzinstrumente S^j (im Fall $S_s^j \neq 0$) die bedingte Erwartung der im Zeitintervall $[s,s+1]$ auftretenden stochastischen Rendite

$$r_{s+1}^j := \frac{S_{s+1}^j - S_s^j}{S_s^j}$$

bezüglich des formalen W-Maßes Q unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ gleich ist und mit dem zum Zeitintervall $[s,s+1]$ gehörigen risikolosen (deterministischen) Zinssatz r_{s+1} übereinstimmt:

$$E_Q^{\mathcal{F}_s}\left(r_{s+1}^j\right) = r_{s+1}.$$

Demzufolge ist dann (nach der obigen Bemerkung zur bedingten Erwartung speziell für $C = \Omega$) auch noch der Q-Erwartungswert der stochastischen Rendite r_{s+1}^j (bezüglich dem auf $\mathcal{P}(\Omega)$ gegebenen W-Maß Q) gleich dem deterministischen Zinssatz r_{s+1}:

$$E_Q(r_{s+1}^j) = E_Q(E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j)) = E_Q(r_{s+1}) = r_{s+1}.$$

Aus diesem Grund wird das W-Maß Q auch **risikoloses bzw. risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß** genannt.

Beweis: Es seien $j \in J$ und $s \in \{0,\ldots,T\text{-}1\}$ mit $\delta^j \neq 0$ und $S_s^j \neq 0$ fest fixiert. Mit den Eigenschaften[21] der bedingten Erwartung erhält man speziell für $t = s+1$ zunächst die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left(E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_{s+1}S_{s+1}^j) - d_s S_s^j\right)\Big/ d_{s+1} && (d_s/d_{s+1} = 1/\rho_{t+1} = q_{s+1} = 1 + r_{s+1}) \\ &= E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_{s+1}^j) - q_{s+1}S_s^j = E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_{s+1}^j) - S_s^j - r_{s+1}S_s^j && (S_s^j\ \mathcal{F}_s\text{-messbar},\ E_Q^{\mathcal{F}_s}(.)\ \text{linear}) \\ &= E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_{s+1}^j - S_s^j) - r_{s+1}S_s^j . \end{aligned}$$

Für den $\mathcal{F}_{s+1}$-messbaren Zuwachs

$$\Delta_{s+1}^j := S_{s+1}^j - S_s^j$$

ist also die bedingte Erwartung bezüglich des formalen W-Maßes Q unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ gegeben durch

$$Z_s := E_Q^{\mathcal{F}_s}(\Delta_{s+1}^j) = r_{s+1}S_s^j .$$

Da die Zustandsfunktion S_s^j $\mathcal{F}_s$-messbar und somit auf jedem $A_s \in \mathcal{P}_s$ konstant ist, ist auch die Zustandsfunktion $1/S_s^j$ im Fall $S_s^j \neq 0$ auf jedem $A_s \in \mathcal{P}_s$ konstant und damit $\mathcal{F}_s$-messbar. Daher ist die im Zeitintervall $[s,s+1]$ auftretende stochastische Rendite

$$r_{s+1}^j := \frac{S_{s+1}^j - S_s^j}{S_s^j} = \frac{\Delta_{s+1}^j}{S_s^j}$$

des Finanzinstruments S^j als Produkt[22] der $\mathcal{F}_{s+1}$-messbaren Funktionen Δ_{s+1}^j und $1/S_s^j$ ebenfalls $\mathcal{F}_{s+1}$-messbar und ihre bedingte Erwartung $R_s := E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j)$ bezüglich des W-Maßes Q unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ ist gegeben durch die Funktionswerte

---

[21] Eigenschaften der bedingten Erwartung findet man z. B. bei Bauer (2002) WT, S. 120–127, 140, Deck (2006), S. 121f, und speziell für endliches Ω und positives W-Maß Q bei Kremer (2011), S. 378, 382f.

[22] Nach Bauer (1992) MI, S. 59, Satz 9.4 ist für zwei $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktionen $f, g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ auch das Produkt $f{\cdot}g$ $\mathcal{A}$-messbar. Für endliches Ω kann die $\mathcal{A}$-Messbarkeit des Produkts $f{\cdot}g$ auch mit der Konstanz von $f{\cdot}g$ auf jedem $A \in \mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ geschlossen werden.

$$\begin{aligned} R_s(A_s) &= E_Q(r_{s+1}^j \mid A_s) = \frac{1}{Q(A_s)} \cdot \sum_{\substack{A_{s+1} \subseteq A_s \\ A_{s+1} \in \mathcal{P}_{s+1}}} r_{s+1}^j(A_{s+1}) Q(A_{s+1}) = \frac{1}{Q(A_s)} \cdot \sum_{\substack{A_{s+1} \subseteq A_s \\ A_{s+1} \in \mathcal{P}_{s+1}}} \frac{\Delta_{s+1}^j(A_{s+1})}{S_s^j(A_s)} Q(A_{s+1}) \\ &= \frac{1}{S_s^j(A_s)} Z_s(A_s) = r_{s+1} \qquad (A_s \in \mathcal{P}_s). \end{aligned}$$

Somit ist die bedingte Erwartung $R_s = E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j)$ der stochastischen Rendite r_{s+1}^j gleich der im Marktmodell vorliegenden deterministischen (risikolosen) Rendite r_{s+1}:

$$E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j) = r_{s+1}.$$

Weiter ist dann auch der Q-Erwartungswert der Rendite r_{s+1}^j gleich dem deterministischen Zinssatz r_{s+1}:[23]

$$\begin{aligned} E_Q(r_{s+1}^j) &= \sum_{\omega \in \Omega} r_{s+1}^j(\omega) Q(\omega) = \sum_{A_s \in \mathcal{P}_s} \sum_{\substack{A_{s+1} \subseteq A_s \\ A_{s+1} \in \mathcal{P}_{s+1}}} r_{s+1}^j(A_{s+1}) Q(A_{s+1}) \\ &= \sum_{A_s \in \mathcal{P}_s} R_s(A_s) Q(A_s) = r_{s+1} \sum_{A_s \in \mathcal{P}_s} Q(A_s) \\ &= r_{s+1}. \end{aligned}$$

□

Unter den Voraussetzungen (AF) und (FH) (letztere sichert auch die Existenz des deterministischen Preisvektors $P := (d_0,\dots,d_T)^\mathsf{T}$ bzw. die Existenz der zugehörigen deterministischen AD-Kassageschäfte $\hat{\zeta}^t$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells) erfolgt also die Bewertung aller duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W}$ durch die Barwertberechnung (Diskontierung) mit dem Preisvektor P für die Q-Erwartungswerte der Zustandsfunktionen X_t bezüglich des sog. risikoneutralen W-Maßes Q:[24]

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \Phi^\mathsf{T} X = \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) = \sum_{t=0}^{T} d_t \sum_{k=1}^{k_t} Q_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} d_t \cdot E_{Q_t}(X_t) = \sum_{t=0}^{T} d_t \cdot E_Q(X_t) \\ &= P^\mathsf{T} E_Q(X) = B_T(E_Q(X);P) \end{aligned}$$

mit $E_Q(X) := E_Q((X_0,\dots,X_T)^\mathsf{T}) := (E_Q(X_0),\dots,E_Q(X_T))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{T+1}$. Diese so genannte **risikoneutrale Bewertung** mit dem formalen W-Maß Q wurde bei der Untersuchung des zeitkontinuierlichen Black-Scholes-Merton-Modells von Cox und Ross im Jahr 1976 entdeckt.

Literatur

Bauer H. (1992), Maß- und Integrationstheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 2. Auflage, ISBN 978-3-11-013625-8

Bauer H. (2002), Wahrscheinlichkeitstheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 5. Auflage, ISBN 978-3-11-017236-2

Kühn C. (2016), Stochastische Finanzmathematik, Vorlesungsskript der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main; http://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/kuehn/stochfinance.pdf Stand: 15.08.2016.

[23] Diese Aussage ergibt sich auch aus einer Eigenschaft der bedingten Erwartung $E_Q^{\mathcal{C}}(X)$ einer Q-integrierbaren $\mathcal{A}$-messbaren Funktion $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ unter der Hypothese $\mathcal{C}$ ($\mathcal{A}$ σ-Algebra in Ω, $\mathcal{C}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$, Q W-Maß auf $\mathcal{A}$), nämlich dass der Q-Erwartungswert der bedingten Erwartung mit dem Q-Erwartungswert der Funktion Q-fast sicher übereinstimmt: $E_Q(E_Q^{\mathcal{C}}(X)) = E_Q(X)$ Q-f.s.

[24] Diese Interpretation der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip findet man beim entsprechenden Thema dieser Website oder bei Pleier (2018), S. 203–205.

Deck T. (2006), Der Itô-Kalkül, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, ISBN 978-3-540-25392-1

Kremer J. (2011), Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten, Springer, Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-20867-6

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, 2. Auflage, Tredition, Hamburg.

Pleier R. (2018), Diskrete stochastische Finanzmathematik, Pro Business, Berlin.