Die Duplikation als Zahlungsprofil einer Handelsstrategie zur Beurteilung unsicherer diskreter Zahlungsströme bei vollkommenem Kapitalmarkt

Rudolf Pleier

Juni 2015

Nachfolgend werden die beim Thema ‚Das Mehrperiodenmodell zur Beurteilung unsicherer Zahlungsströme bei vollkommenem Kapitalmarkt' angegebenen Begriffe und Bezeichnungen verwendet. Zur Bewertung mittels des Marktmodells $((S,\delta),\mathcal{F})$ sind nur Zahlungsströme

$$X = (X_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega} \qquad (I = \{0,\ldots,T\},\ \Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_K\})$$

im Vektorraum $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1(\mathcal{F})$ der $\mathcal{F}$-adaptierten reellwertigen stochastischen Prozesse zugelassen. Außerdem soll die Bewertung nach dem **Duplikationsprinzip** („Pricing by Duplication") erfolgen, bei dem das zu bewertende Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W}$ als das Zahlungsprofil

$$L(h) = V(h) - R(h) \qquad (V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t,\ R_t(h) = S_t \cdot h_{t+1},\ t \in I)$$

einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ dupliziert (nachgebildet, erreicht) werden kann. Die Übereinstimmung der beiden Zahlungsprofile X und $L(h)$ soll dabei für alle $t \in I$ und alle $\omega \in \Omega$ gelten, also insbesondere sicher bezüglich der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Kursentwicklungen $\omega \in \Omega$. Eine Duplikationsstrategie $h \in L^{-1}(\{X\})$ von X kann dann sicher und linearalgebraisch (also nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch) durch das Lösen der linearen Gleichung

$$\text{(DP)} \qquad L(h) = X$$

bestimmt werden. Die Gleichung (DP) stellt für die Komponenten $h_t^j(A_{t-1,k})$ $(j = 1,\ldots,N)$ der Zustandsfunktionswerte $h_t(A_{t-1,k}) = (h_t^1(A_{t-1,k}),\ldots,h_t^N(A_{t-1,k}))^\mathsf{T}$ der Handelsstrategie h ein gestaffeltes lineares Gleichungssystem dar:

$$\sum_{j=1}^N S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\cdot h_t^j(A_{t-1,k}) = X_t(A_{t,m}) + \sum_{j=1}^N S_t^j(A_{t,m})\cdot h_{t+1}^j(A_{t,m}),$$

$h_{T+1} = 0,\ t \in \{T,T\text{-}1,\ldots,0\},\ k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\},\ m \in \{1,\ldots,k_t\}$ mit $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$.

Zur Berechnung einer Lösung löst man der Reihe nach die einperiodischen Gleichungssysteme, die den Knoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ $(t = T,\ldots,1)$ des zur Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ der Partitionen $\mathcal{P}_t$ von Ω gehörigen graphentheoretischen Informationsbaums entsprechen. Man beginnt also mit dem Knoten $A_{T-1,1} \in \mathcal{P}_{T-1}$ und den von diesem Knoten aus durch Kanten erreichbaren Nachfolgerknoten $A_{T,m} = \{\omega_m\} \in \mathcal{P}_T$ mit $A_{T,m} \subseteq A_{T-1,1}$. Das zugehörige Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N S_T^{\delta,j}(A_{T,m})\cdot h_T^j(A_{T-1,1}) = X_T(A_{T,m}) \quad (m \in \{1,..,K\} \text{ mit } A_{T,m} \subseteq A_{T-1,1};\ h_{T+1}^j(A_{T,m}) = 0)$$

mit den zu den Indizes $m \in \{1,\ldots,K\}$ mit $A_{T,m} \subseteq A_{T-1,1}$ gegebenen linearen Gleichungen löst man nach den N Unbekannten $h_T^j(A_{T-1,1})$ $(j = 1,\ldots,N)$ auf. Ebenso verfährt man mit den weiteren Knoten $A_{T-1,2},\ \ldots,\ A_{T-1,k_{T-1}} \in \mathcal{P}_{T-1}$. Dann schreitet man fort zu den Knoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ $(t = T\text{-}1,\ldots,1;$ $k = 1,\ldots,k_{t-1})$ und löst jeweils das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\cdot h_t^j(A_{t-1,k}) = X_t(A_{t,m}) + \sum_{j=1}^N S_t^j(A_{t,m})\cdot h_{t+1}^j(A_{t,m}) \qquad (m \text{ mit } A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k})$$

nach den N Unbekannten $h_t^j(A_{t-1,k})$ $(j = 1,\ldots,N)$ auf. Schließlich erhält man für $t = 1$ zum Knoten $A_0 = \Omega$ (der Wurzel des Informationsbaums) und seinen Nachfolgerknoten $A_{1,m} \in \mathcal{P}_1$ $(m = 1,\ldots,k_1)$ das Gleichungssystem

$$S_1^{\delta}(A_{1,m})^{\mathsf{T}} h_1(\Omega) = X_1(A_{1,m}) + S_1(A_{1,m})^{\mathsf{T}} h_2(A_{1,m}) \qquad (m = 1,\ldots,k_1)$$

aus k_1 Gleichungen für die N Unbekannten $h_1^j(\Omega)$ ($j = 1,\ldots,N$). Für $t = 0$ und den Knoten $A_{-1} = A_0 = \Omega$ erhält man noch die allein zum Knoten $A_0 = \Omega$ (ohne Nachfolgerknoten im Informationsbaum) gehörige einzige Gleichung

$$S_0^{\delta}(\Omega)^{\mathsf{T}} h_0(\Omega) = X_0(\Omega) + S_0(\Omega)^{\mathsf{T}} h_1(\Omega)$$

für die Berechnung der N Unbekannten $h_0^j(\Omega)$ ($j = 1,\ldots,N$) oder für die unmittelbare Berechnung des Vermögenswertes

$$V_0(h) \;=\; X_0 + S_0^{\;\mathsf{T}} h_1$$

aus X_0 und dem bereits berechneten h_1 (an Stelle der Berechnung von $V_0(h) \;=\; S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ aus h_0).

Falls noch der Portfoliowert $V_0(h)$ bei $t = 0$ für alle Duplikationsstrategien h von X konstant ist, kann der Preis $\pi(X)$ von X bzw. der Wert von X zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den deterministischen Kapitaleinsatz $V_0(h) \;=\; S_0^{\delta}(\Omega)^{\mathsf{T}} h_0(\Omega)$ der Handelsstrategie h zum Zeitpunkt $t = 0$ definiert werden:

$$\pi(X) := V_0(h), \text{ falls } V_0(h) \text{ konstant } \forall\, h \in L^{-1}(\{X\}) \;(\neq \emptyset).$$

Falls zumindest für ein $X \in L(\mathcal{H}_N)$ diese Eigenschaft erfüllt ist, dass also $V_0(h)$ konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$ ist, so kann gezeigt werden, dass diese Eigenschaft dann auch für alle $X \in L(\mathcal{H}_N)$ vorliegt.[1] Im Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ ($\subseteq \mathcal{W}$) der duplizierbaren Zahlungsprofile des Marktmodells $((S,\delta),\mathcal{F})$ gilt dann das so genannte Gesetz des eindeutig bestimmten Preises (englisch: **Law of One Price**, Abk.: LOP).

Bei Gültigkeit des LOP kann der Preis $\pi(X)$ eines Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ auch noch ohne die Berechnung einer Duplikationsstrategie $h \in L^{-1}(\{X\})$ mit dem (normierten) Bewertungsprozess $\Psi \in L^{*-1}(\{b\}) \subseteq \mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^*$ ($\Psi_0 = 1$) als das Skalarprodukt $\langle \Psi, X\rangle_{\mathcal{W}}$ von Ψ und X bestimmt werden (siehe Thema ‚Das Mehrperiodenmodell zur Beurteilung unsicherer zeitdiskreter Zahlungsströme bei vollkommenem Kapitalmarkt‘):

$$\pi(X) = \langle \Psi, X\rangle_{\mathcal{W}}.$$

Wie beim Thema ‚Interpretationen der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip im Mehrperiodenmodell‘ dargestellt wird, kann diese Duplikation von X mittels einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ auch als Duplizierung mittels der Beurteilungskurve $\bar{V}(\mu) \;=\; \mu \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \;=\; \mu\cdot(1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$ der Sofortentnahme und einem Supplement (Ergänzungsgeschäft) $Z(X)$ vom Kapitalmarkt $\mathcal{M} \;=\; \breve{L}(\mathcal{H}_N) \;=\; L(\ker V_0)$ des Marktmodells gedeutet werden. Weitere Interpretationen der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip werden auch noch durch drei Arten von verallgemeinerten Diskontierungen gegeben.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigt die Duplikation eines Zahlungsprofils X durch das Zahlungsprofil $L(h)$ einer Handelsstrategie h.

[1] Der Beweis wird in der pdf-Datei zum Thema „Das Mehrperiodenmodell zur Bewertung unsicherer zeitdiskreter Zahlungsströme bei vollkommenem Kapitalmarkt“ angegeben.

© 2015 Rudolf Pleier D-92694 Etzenricht

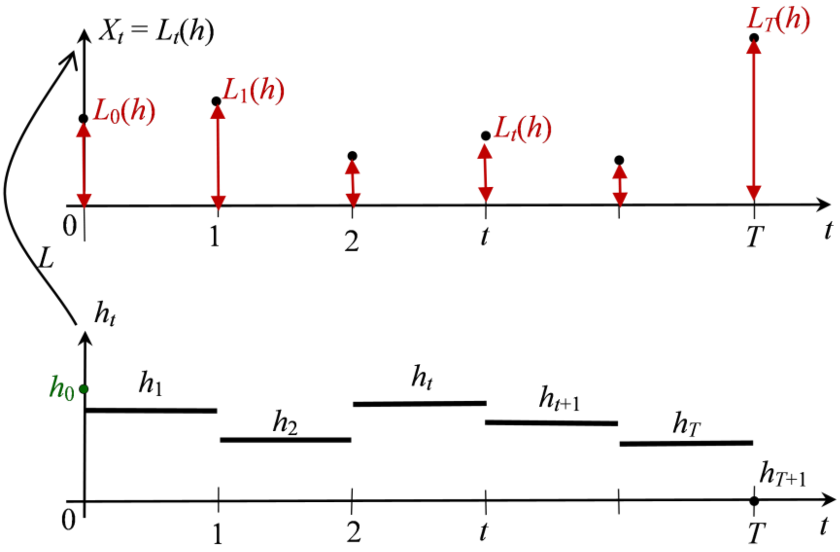

Abb. 1 Die Duplikation eines Zahlungsprofils X mittels des Zahlungsprofils $L(h)$ einer Handelsstrategie h ($N = 1$)

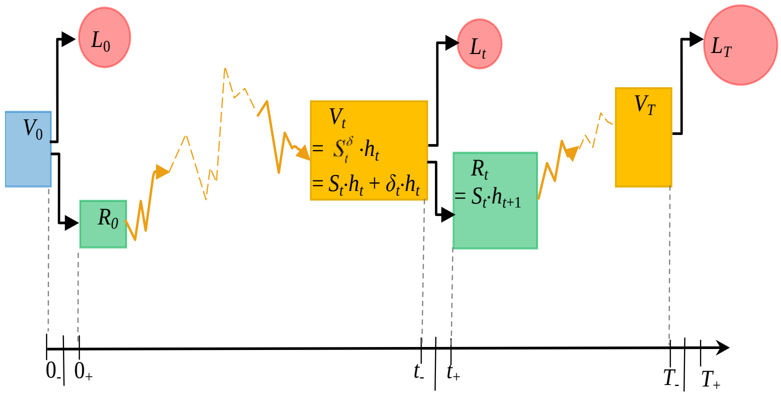

Abb. 2 Präzisierung der zeitlichen Entwicklung des Portfoliowerts mittels Vermögenswert $V_t(h)$, Reinvestitionswert $R_t(h)$ und Portfolioauszahlung $L_t(h)$ zum Zeitpunkt t