Interpretationen der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip im Mehrperiodenmodell

Rudolf Pleier

Juni 2015

Die ersten drei der nachfolgenden Interpretationen der Bewertung im Mehrperiodenmodell (englisch: multi-period model) liefern Brücken von der Bewertung deterministischer Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer Zahlungsströme. Die beiden darauffolgenden Interpretationen der Bewertung von zeitdiskreten Zahlungsströmen in den Abschnitten 4 und 5 findet man auch im zeitkontinuierlichen Marktmodell. Es werden hier die beim Thema ‚Das Mehrperiodenmodell zur Bewertung unsicherer zeitdiskreter Zahlungsströme bei vollkommenem Kapitalmarkt' angegebenen Begriffe und Bezeichnungen verwendet.

1 Die Bewertung als Abstandsmessung

Bei gültigem Law of One Price (LOP) im Marktmodell stimmen der für Punkte $X \in \mathcal{W}$ definierte orientierte Abstand

$$d(X) := \Psi^\top X / \|\Psi\|$$

($\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$, $\|\Psi\| = (\Psi^\top \Psi)^{1/2}$) von der Hyperebene

$$H_{\Psi,0} := \{\Psi\}^\perp = \{Z \in \mathcal{W} : \Psi^\top Z = 0\}$$

und der für die Zahlungsprofile $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ definierte Preis

$$\pi(X) := V_0(h) = \Psi^\top X$$

auf $L(\mathcal{H}_N)$ bis auf den positiven konstanten Faktor $1/\|\Psi\|$ überein. Die Abstandsfunktion $d(X)$ und die Preisfunktion $\pi(X)$ liefern daher als Nutzenfunktionen auf $L(\mathcal{H}_N)$ die gleiche Präferenzordnung. Somit kann die Bewertung von Zahlungsprofilen X in $L(\mathcal{H}_N)$ nach dem Duplikationsprinzip mit dem Startkapitaleinsatz von Duplikationsstrategien und damit dem Preis $\pi(X)$ wie bei deterministischen Zahlungsströmen auch als Abstandsmessung von einer Hyperebene interpretiert werden. Damit hat man eine erste Brücke von der Bewertung deterministischer zeitdiskreter Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer zeitdiskreter Zahlungsströme. In Abbildung 1 ist für ein Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ der orientierte Abstand $d(X)$ von der Hyperebene $H_{\Psi,0}$ und der Beurteilungskurvenpunkt $\bar{V}(\mu(X))$ dargestellt.

2 Die Bewertung als Duplizierung mit einem Supplement vom Kapitalmarkt und der Beurteilungskurve der Sofortentnahme

Bei gültigem Law of One Price (LOP) erhält man für jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ mit dem nach dem Duplikationsprinzip eindeutig bestimmten Preis

$$\mu(X) := \pi(X) = \langle \Psi, X \rangle_{\mathcal{W}} = V_0(h)$$

die eindeutig bestimmte Duplizierung

$$\begin{aligned} X &= L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h) \\ &= V_0(h)\, \mathbf{1}_{0,\Omega} + \breve{L}(h) \\ &= \pi(X)\mathbf{1}_{0,\Omega} + \breve{L}(h) \\ &= \bar{V}(\mu(X)) + Z(X) \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{M} \end{aligned}$$

mit der Beurteilungskurve $\bar{V}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = \mu\cdot(1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$ der Sofortentnahme und dem Supplement (Ergänzungsgeschäft) $Z(X) = \breve{L}(h)$ vom Kapitalmarkt $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N) = L(\ker V_0)$ des Marktmodells. Das Duplizierungskonzept und das Duplikationsprinzip liefern also die gleiche Nutzenfunktion $\mu(X) = \pi(X)$ und die gleiche Präferenzordnung auf der Menge $L(\mathcal{H}_N)$ der duplizierbaren Zahlungsprofile. Die Bewertung nach dem Konzept der Duplizierung liefert also eine zweite Brücke von der Bewertung deterministischer zeitdiskreter Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer zeitdiskreter Zahlungsströme.

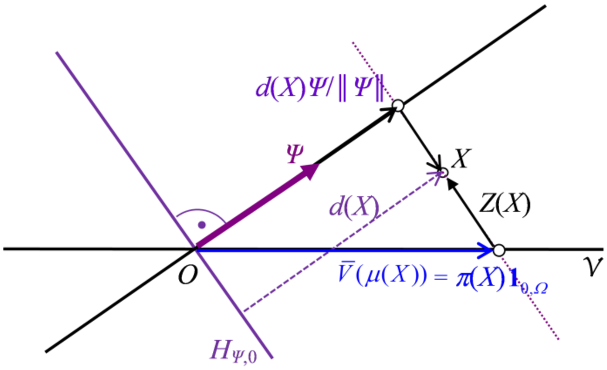

Abb. 1 Die Bewertung des Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ durch den orientierten Abstand $d(X)$ von der Hyperebene $H_{\Psi,0}$ bzw. durch den Beurteilungskurvenpunkt $\bar{V}(\mu(X)) = \pi(X)\mathbf{1}_{0,\Omega}$

3 Die Bewertung als Diskontierung bzw. Barwertberechnung

3.1 Die Bewertung als Diskontierung der Zahlungen $X_t(A_{t,k})$ mittels stochastischer Diskontierungsfaktoren $d_{t,k}$

Bei vorausgesetzter Arbitragefreiheit (AF) und Vollständigkeit (VS) des Marktmodells existieren in $L(\mathcal{H}_N)$ die Arrow-Debreu-Papiere

$$\xi^{t,k} = \left(0,..,0,\mathbf{1}_{A_{t,k}},0,..,0\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$$

und im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells die Arrow-Debreu-Kassageschäfte

$$\hat{\xi}^{t,k} = \left(-d_{t,k},0,..,0,\mathbf{1}_{A_{t,k}},0,..,0\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}} - d_{t,k}\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega}\,.$$

Die hierbei auftretenden und zu den Zeitintervallen $[0,t]$ und Ereignissen $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ ($t \in I$, $k \in \{1,\ldots,k_t\}$) gehörigen stochastischen Diskontierungsfaktoren $d_{t,k} = \Phi_t(A_{t,k})$ ($\Phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Phi > 0$ und $\Phi_0 = 1$) stehen auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells in dem Sinne zur Verfügung, dass mit Hilfe des zugehörigen Kapitalmarktgeschäfts $\hat{\xi}^{t,k} \in \mathcal{M}$ eine zum Zeitpunkt $t \in I$ und im Ereignis $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ stattfindende Zahlung $X = \gamma\cdot\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ ($\gamma \in \mathbb{R}$) tatsächlich auf eine gleichwertige sichere Zahlung im Zeitpunkt $s = 0$ transponiert bzw. abgezinst werden kann: Aus dem Zahlungsprofil

$$X = \gamma\cdot\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} = \left(0,..,0,\gamma\mathbf{1}_{A_{t,k}},0,..,0\right)^{\mathsf{T}} = \gamma\,\xi^{t,k} \in L(\mathcal{H}_N)$$

mit dem Preis $\pi(X) = \gamma\,\pi(\xi^{t,k}) = \gamma d_{t,k}$ erhält man nämlich durch Kombination (additive Ergänzung, Glattstellung, Replizierung) mit dem Kapitalmarktgeschäft

$$Z = -\gamma\hat{\xi}^{t,k} = (\gamma d_{t,k},0,..,0,-\gamma\mathbf{1}_{A_{t,k}},0,..,0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}$$

das Zahlungsprofil

$$Y = X + Z = (\gamma d_{t,k},0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} = \gamma d_{t,k}\mathbf{1}_{0,\Omega}$$

mit dem gleichen Preis $\pi(Y) = \gamma d_{t,k} = \pi(X)$.

Für jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ erhält man den eindeutig bestimmten Preis

$$\pi(X) = \Phi^\top X = \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k}\cdot X_t(A_{t,k}) = B_T(X,\Phi)$$

also durch eine spezielle Replizierung, nämlich durch die stochastische Diskontierung der Zahlungen $X_t(A_{t,k})$ des Zahlungsprofils X mit den stochastischen Diskontierungsfaktoren $d_{t,k} = \Phi_t(A_{t,k})$ auf eine gleichwertige sichere Zahlung im Zeitpunkt $s = 0$. Der Preis $\pi(X)$ ist also der Barwert $B_T(X,\Phi)$ von X, der mit dem stochastischen Ereignispreisvektor

$$\begin{aligned}\Phi &= (1;\Phi_1(A_{1,1}),..,\Phi_1(A_{1,k_1});\ldots;\Phi_T(\omega_1),..,\Phi_T(\omega_K))^\top \\ &= (1;d_{1,1},..,d_{1,k_1};\ldots;d_{T,1},..,d_{T,K})^\top\end{aligned}$$

berechnet wird. Diese Bewertung der duplizierbaren stochastischen Zahlungsströme kann als eine vom deterministischen Fall auf den stochastischen Fall verallgemeinerte Diskontierung bzw. verallgemeinerte Barwertberechnung interpretiert werden.

3.2 Die Bewertung als Diskontierung der Q_t-Erwartungswerte der Zahlungen X_t bezüglich der Preismaße Q_t mit deterministischen Diskontierungsfaktoren d_t

Unter der Voraussetzung (AF) der Arbitragefreiheit des Marktmodells und der Voraussetzung (DPζ^t) der Duplizierbarkeit der deterministischen Arrow-Debreu-Papiere $\zeta^t = \mathbf{1}_t = \mathbf{1}_{t,\Omega} = (0,..,0,1,0,..,0)^\top$ für alle $t \in I$ erhält man mit einem normierten Zustandsprozess Φ ($\Phi \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{W}_{>0}$ mit $\Phi_0 = 1$) für jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ den eindeutig bestimmten Preis $\pi(X)$ durch

$$\begin{aligned}\pi(X) &= \Phi^\top X = \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t}\Phi_t(A_{t,k})X_t(A_{t,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} d_t \sum_{k=1}^{k_t} Q_t(A_{t,k})X_t(A_{t,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} d_t\cdot E_{Q_t}(X_t)\end{aligned}$$

mit den zu den Zeitintervallen $[0,t]$ gehörigen risikolosen (deterministischen) Diskontierungsfaktoren

$$d_t = \pi(\zeta^t) = \sum_{k=1}^{k_t}\Phi_t(A_{t,k}) = \Phi_t(\Omega) \in\ ]0,\infty[$$

und den zu den Wahrscheinlichkeitsmaßen (W-Maßen) $Q_t = \Phi_t/d_t$ gehörigen Erwartungswerten

$$E_{Q_t}(X_t) := \langle Q_t, X_t\rangle_{\mathcal{W}_{t,1}} = \sum_{k=1}^{k_t} Q_t(A_{t,k})X_t(A_{t,k})$$

der (Q_t-integrierbaren) $\mathcal{F}_t$-messbaren reellwertigen Zustandsfunktionen X_t. Damit ist der Preis

$$\begin{aligned}\pi(X) &= \sum_{t=0}^{T} d_t\cdot E_{Q_t}(X_t) \\ &= (1,d_1,\ldots,d_T)\,(X_0, E_{Q_1}(X_1),\ldots,E_{Q_T}(X_T))^\top \\ &= P^\top\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X) = B_T(\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X);P)\end{aligned}$$

der mit dem deterministischen Preisvektor $P := (d_0,\ldots,d_T)^\top$ berechnete Barwert $B_T(\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X);P)$ des deterministischen $(T+1)$-Tupels

$$\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X) := (X_0, E_{Q_1}(X_1),\ldots,E_{Q_T}(X_T))^\top \in \mathbb{R}^{T+1}$$

der Q_t-Erwartungswerte $E_{Q_t}(X_t)$ der Zustandsfunktionen X_t.[1] Auch diese Bewertung der duplizierbaren stochastischen Zahlungsströme kann als eine vom deterministischen Fall auf den stochastischen Fall verallgemeinerte Diskontierung bzw. verallgemeinerte Barwertberechnung interpretiert werden.

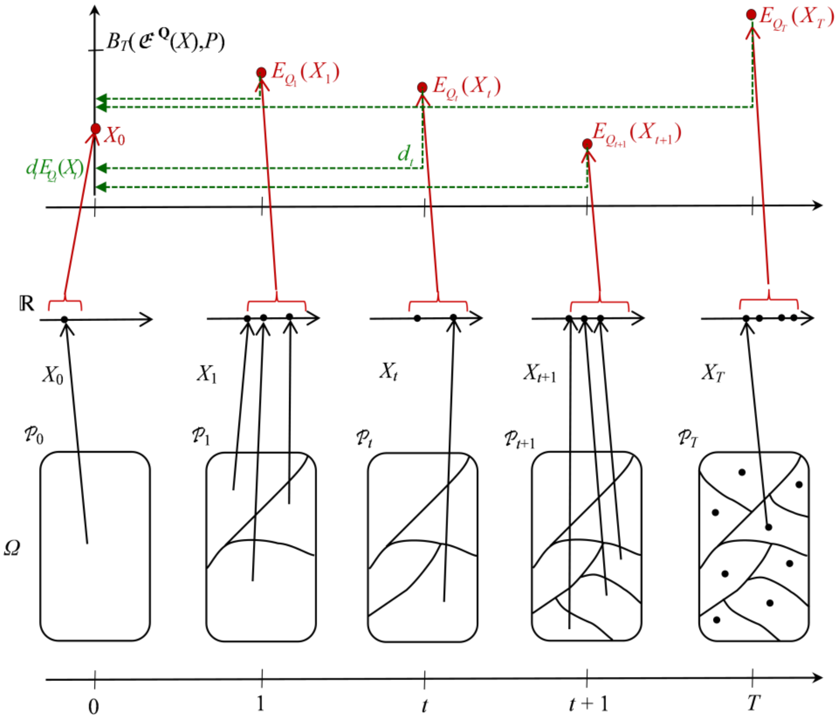

Abb. 2 Der Preis des Zahlungsprofils X als Barwert der Erwartungswerte der Zustandsfunktionen X_t

3.3 Die Bewertung als Diskontierung der Q-Erwartungswerte der Zahlungen X_t bezüglich des Preismaßes Q mit deterministischen Diskontierungsfaktoren d_t

Neben der Arbitragefreiheit (AF) sei jetzt noch die Bedingung (FH), also die Existenz von so genannten festverzinslichen Handelsstrategien vorausgesetzt. Jedes der oben verwendeten W-Maße $Q_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,1]$ ist dann die Einschränkung $Q\big|_{\mathcal{F}_t}$ des W-Maßes $Q = Q_T : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ ($\mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ = Potenzmenge von Ω), des so genannten (für alle $t \in I$ einheitlichen) Preismaßes des Marktmodells, auf die Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}_t \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Damit ist nun der Preis $\pi(X)$ von $X \in L(\mathcal{H}_N)$ die Summe der mit den risikolosen (deterministischen) Diskontierungsfaktoren d_t diskontierten Q-Erwartungswerte der Zustandsfunktionen X_t bezüglich des im Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ entwickelten Preismaßes Q:

$$\begin{aligned}\pi(X) &= \sum_{t=0}^{T} d_t \cdot E_Q(X_t) \\ &= (1,d_1,\ldots,d_T)(X_0, E_Q(X_1),\ldots,E_Q(X_T))^\mathsf{T} \\ &= P^\mathsf{T} E_Q(X) = B_T(E_Q(X);P)\end{aligned}$$

mit dem deterministischen Preisvektor $P := (d_0,\ldots,d_T)^\mathsf{T}$ und dem deterministischen $(T+1)$-Tupel

$$E_Q(X) := E_Q((X_0,\ldots,X_T)^\mathsf{T}) := (E_Q(X_0),\ldots,E_Q(X_T))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{T+1}$$

der Q-Erwartungswerte $E_Q(X_t)$ der Zustandsfunktionen X_t bezüglich des Preismaßes $Q : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$. Der Preis $\pi(X)$ des Zahlungsprofils X ist also der mit dem deterministischen Preisvektor P berechnete Barwert $B_T(E_Q(X);P)$ des $(T+1)$-Tupels $E_Q(X)$ der Q-Erwartungswerte

[1] Die Interpretation der Bewertung als deterministische Diskontierung der Q_t-Erwartungswerte der X_t findet man bei Kremer (2011), S. 180.

$E_Q(X_t)$ bezüglich des formalen W-Maßes Q auf $\mathcal{P}(\Omega)$.[2] Auch diese Bewertung der duplizierbaren stochastischen Zahlungsströme mittels einer Diskontierung bzw. Barwertberechnung ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Bewertung der duplizierbaren deterministischen Zahlungsströme. Die in den Abschnitten 3.1, 3.2 und 3.3 angegebenen verallgemeinerten Diskontierungen bzw. Barwertberechnungen liefern also weitere Brücken von der Bewertung deterministischer Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer Zahlungsströme.

4 Die diskontierten Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente sind Martingale bezüglich des Preismaßes Q

Unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) und der Bedingung (FH), also der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien, lässt sich die zum j-ten Finanzinstrument S^j und zum festen Zeitpunkt s gehörige diskontierte Preiszustandsfunktion $M_s^j := d_s S_s^j$ darstellen als Summe der bedingten Erwartung der zu einem festen späteren Zeitpunkt $t \geq s$ gehörigen diskontierten Preiszustandsfunktion $M_t^j = d_t S_t^j$ und der bedingten Erwartung der diskontierten Dividenden-Zustandsfunktionen $\gamma_i^j := d_i \delta_i^j$ des Zeitintervalls $[s+1,t]$:[3]

$$d_s S_s^j = E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_t S_t^j) + \sum_{i=s+1}^{t} E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_i \delta_i^j) \qquad \text{für } s \leq t.$$

Im Spezialfall eines dividendenlosen Finanzinstruments S^j ($\delta^j = 0$) ist der diskontierte Preisprozess $M^j = (M_t^j)_{t\in I} = (d_t S_t^j)_{t\in I}$ ein Martingal bezüglich des W-Maßes Q und der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ des gefilterten W-Raums $(\Omega,\mathcal{F},Q)$:

$$d_s S_s^j = E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_t S_t^j) \qquad \text{für } s \leq t.$$

Aufgrund dieser Eigenschaft wird das Preismaß Q auch Martingalmaß genannt. Der Zusammenhang zwischen der Arbitragefreiheit und der Martingaleigenschaft der dividendenlosen diskontierten Preisprozesse wurde im Jahr 1979 von Harrison und Kreps gefunden.

5 Die Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente im mit dem Numéraire gebildeten relativen Marktmodell sind Martingale bezüglich des Preismaßes $\tilde{Q}$

Vorausgesetzt sei nun für das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ die Arbitragefreiheit (AF) und die Bedingung (NM), dass es ein dividendenloses positives Finanzinstrument S^j gibt und o. B. d. A. der Index $j = 1$ sei. Für die mit dem Numéraire (der Recheneinheit, Bezugsgröße) S^1 diskontierten Preisprozesse $(\tilde{S}_t^j)_{t\in I}$ und diskontierten Dividendenprozesse $(\tilde{\delta}_t^j)_{t\in I}$ ($\tilde{S}_t^j = S_t^j / S_t^1$, $\tilde{\delta}_t^j = \delta_t^j / S_t^1$, $t = 0,\ldots,T$, $j = 1,\ldots,N$) des relativen (modifizierten, diskontierten) Marktmodells gilt dann die Darstellung:[4]

$$\tilde{S}_s^j = E_{\tilde{Q}}^{\mathcal{F}_s}(\tilde{S}_t^j) + \sum_{i=s+1}^{t} E_{\tilde{Q}}^{\mathcal{F}_s}(\tilde{\delta}_i^j) \qquad \text{für } s \leq t.$$

Speziell für die dividendenlosen Preisprozesse S^j ($\delta^j = 0$) ist der jeweils zugehörige (mit dem Numéraire S^1 diskontierte) Preisprozess $(\tilde{S}_t^j)_{t\in I}$ des relativen Marktmodells selbst ein Martingal bezüglich des Preismaßes $\tilde{Q}$ des relativen Marktmodells $((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$ und der Filtration $\mathcal{F}$:

[2] Die Interpretation der Bewertung als deterministische Diskontierung der Q-Erwartungswerte der X_t findet man bei Kremer (2011), S. 203.

[3] Die Formel für die mit den deterministischen Diskontierungsfaktoren diskontierten Preis-Zustandsfunktionen und diskontierten Dividenden-Zustandsfunktionen bringt Kremer (2011) auf S. 205.

[4] Die Formel für die mit einem Numéraire diskontierten Preis-Zustandsfunktionen und diskontierten Dividenden-Zustandsfunktionen bringt Kremer (2011) auf S. 217.

$$\tilde{S}_s^j = E_{\tilde{Q}}^{\mathcal{F}_s}(\tilde{S}_t^j) \qquad \text{für } s \le t.$$

Im arbitragefreien relativen Marktmodell entwickeln sich also die dividendenlosen Preisprozesse $(\tilde{S}_t^j)_{t\in I}$ gemäß dem formalen Preismaß $\tilde{Q}$ wie das Kapital eines Spielers in einem fairen Spiel.

Literatur

Kremer J. (2011), Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten, Springer, Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-20867-6

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, 2. Auflage, Tredition, Hamburg, ISBN 978-3-347-35460-9