Das Einperiodenmodell als Spezialfall des Mehrperiodenmodells und in spezieller Darstellung

Rudolf Pleier

Juli 2018

Nachfolgend werden die beim Thema „Das Mehrperiodenmodell zur Beurteilung zeitdiskreter unsicherer Zahlungsströme bei vollkommenem Kapitalmarkt“ angegebenen Begriffe und Bezeichnungen verwendet. Die für das Mehrperiodenmodell (englisch: multi-period model) hergeleiteten Charakterisierungen der zentralen Begriffe Vollständigkeit, Law of One Price und Arbitragefreiheit werden nun in der speziellen Schreibweise des Einperiodenmodells (englisch: one period model) formuliert.

Im **Mehrperiodenmodell** ($T \in \mathbb{N}$) kann eine erste Matrizenschreibweise für die lineare Abbildung

$$L : h \in \mathcal{H}_N \mapsto L(h) = V(h) - R(h) \in \mathcal{W}$$

($V_t(h) = S_t^{\delta} \cdot h_t$, $R_t(h) = S_t \cdot h_{t+1}$, $t \in I = \{0,\ldots,T\}$) durch

$$L(h) = L \cdot h$$

mit der Matrix L und dem Handelsstrategievektor h gegeben werden: [1]

$$L = \begin{pmatrix} B_0^{\delta} & -B_0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & B_1^{\delta} & -B_1 & . & & & & . \\ . & . & B_2^{\delta} & -B_{t-1} & . & & & . \\ . & & . & B_t^{\delta} & -B_t & . & & . \\ . & & & . & B_{t+1}^{\delta} & . & . & . \\ . & & & & . & . & . & 0 \\ . & & & & & . & B_{T-1}^{\delta} & -B_{T-1} \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & B_T^{\delta} \end{pmatrix},$$

$$B_t^{\delta} = \mathrm{diag}(C_t^{\delta}(A_{t-1,1}),\ldots,C_t^{\delta}(A_{t-1,k_{t-1}})),$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} h_t(A_{t-1,1}) & h_t(A_{t-1,2}) & . & h_t(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{array} \\ = & \begin{pmatrix} C_t^{\delta}(A_{t-1,1}) & 0 & . & 0 \\ 0 & C_t^{\delta}(A_{t-1,2}) & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & C_t^{\delta}(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_t \times N k_{t-1}}, \end{array}$$

$$C_t^{\delta}(A_{t-1,k}) = \begin{pmatrix} S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} \\ . \\ S_t^{\delta}(A_{t,r})^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu(t,A_{t-1,k}) \times N},$$

$$S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} = \left(S_t^{\delta,1}(A_{t,m}),\ldots,S_t^{\delta,N}(A_{t,m})\right) \in \mathbb{R}^N \text{ mit } A_{t,m} \in \mathcal{P}_t\text{: } A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k},$$

$$B_t = \mathrm{diag}(S_t(A_{t,1})^{\mathsf{T}},\ldots,S_t(A_{t,k_t})^{\mathsf{T}})$$

[1] Für eine lineare Abbildung und die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung können die gleichen Bezeichnungen verwendet werden, da aus dem Zusammenhang hervorgeht, welches mathematische Objekt gemeint ist. Das Analoge gilt für ein Zahlungsprofil bzw. eine Handelsstrategie und das zugehörige Koordinaten-Tupel.

$$= \begin{pmatrix} h_{t+1}(A_{t,1}) & h_{t+1}(A_{t,2}) & . & h_{t+1}(A_{t,k_t}) \\ \hline S_t\,(A_{t,1})^{\mathsf T} & 0 & . & 0 \\ 0 & S_t\,(A_{t,2})^{\mathsf T} & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & S_t\,(A_{t,k_t})^{\mathsf T} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_t \times Nk_t}.$$

Im Spezialfall des **Einperiodenmodells** ($T = 1$) erhält man für die Abbildung $L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ die Darstellung

$$L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = S_0^{\delta\mathsf T} h_0 - S_0^{\mathsf T} h_1,$$

$$L_1(h) = V_1(h) = S_1^{\delta} h_1 \qquad \text{(Produkt der Zustandsfunktionen } S_1^{\delta} \text{ und } h_1\text{)}$$

$$= \begin{pmatrix} S_1^{\delta}(\omega_1)^{\mathsf T} h_1 \\ . \\ . \\ S_1^{\delta}(\omega_K)^{\mathsf T} h_1 \end{pmatrix} = D^{\mathsf T} h_1 \quad \text{(Produkt der Matrix } D^{\mathsf T} \text{ und des Spaltenvektors } h_1\text{)},$$

also

$$L(h) = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf T} & -S_0^{\mathsf T} \\ 0 & D^{\mathsf T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = L\cdot h$$

mit der $(1+K)\times 2N$-Darstellungsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf T} & -S_0^{\mathsf T} \\ 0 & D^{\mathsf T} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+K)\times 2N}$$

bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^{1+K}$ und $\mathbb{R}^{N}$. Die zur linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ (wegen $\dim \mathbb{R}^{2N} = 2N < \infty$) eindeutig bestimmte **adjungierte Abbildung**

$$L^* : \mathbb{R}^{1+K} \longrightarrow \mathbb{R}^{2N}$$

(mit der definierenden Eigenschaft $X^{\mathsf T}Lh = L^*(X)^{\mathsf T}h \ \forall\, X \in \mathbb{R}^{1+K},\ h \in \mathbb{R}^{2N}$) besitzt die Darstellungsmatrix

$$L^* = L^{\mathsf T} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta} & 0 \\ -S_0 & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N\times(1+K)}.$$

Neben den Matrizen L und L^{T} werden noch die Teilmatrizen

$$V' = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf T} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L' = \begin{pmatrix} -S_0^{\mathsf T} \\ D^{\mathsf T} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+K)\times N}$$

und

$$V'^{\mathsf T} = (S_0^{\delta}, 0), \qquad L'^{\mathsf T} = (-S_0, D) \in \mathbb{R}^{N\times(1+K)}$$

verwendet.[2] Für die **additive Zerlegung**[3] der linearen Abbildungen L und $L^* = L^{\mathsf T}$ in deterministischen und stochastischen Anteil erhält man im Einperiodenmodell die Matrixdarstellungen

$$L = (V', L') = (V', 0) + (0, L') = \breve{V} + \breve{L},$$

$$L^{\mathsf T} = \begin{pmatrix} V'^{\mathsf T} \\ L'^{\mathsf T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V'^{\mathsf T} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L'^{\mathsf T} \end{pmatrix} = \breve{V}^{\mathsf T} + \breve{L}^{\mathsf T}$$

mit

[2] Bei Kremer (2011) werden die Matrizen L' und $L'^{\mathsf T}$ mit $L = \begin{pmatrix} -b^{\mathsf T} \\ D^{\mathsf T} \end{pmatrix}$ und $D_b = (-b, D)$ bezeichnet.

[3] Diese additive Zerlegung von L und L^* im Mehrperiodenmodell wird behandelt bei Pleier (2018), S. 43, 54f.

$$\breve{V} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \breve{L} = \begin{pmatrix} 0 & -S_0{}^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix},$$

$$\breve{V}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \breve{L}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -S_0 & D \end{pmatrix}.$$

Das Einperiodenmodell ist nicht nur ein Spezialfall des Mehrperiodenmodells, sondern nimmt auch mit seiner in der Literatur gebräuchlichen speziellen Formulierung eine Sonderstellung ein. An die Stelle der Abbildungen L und L^{T} in den Räumen $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ können wie in der Literatur üblich die Abbildungen D^{T}, $S_0{}^{\mathsf{T}}$ und D in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ treten. Diese Darstellung wird ermöglicht durch die drei folgenden Eigenschaften:

1) Die Handelsstrategien $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}}$ sind deterministisch, also die Zustandsfunktionen h_0 und h_1 auf Ω konstant und somit als N-Tupel h_0, $h_1 \in \mathbb{R}^N$ zu beschreiben.
2) Im Zahlungsprofil $X = (X_0,X_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W}$ ist die Zustandsfunktion $X_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deterministisch, also konstant auf Ω, sodass das zugehörige K-Tupel $(X_{0,1},\ldots,X_{0,K})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^K$ identische Komponenten $X_{0,1} = \ldots = X_{0,K} = X_0$ besitzt und als Skalar $X_0 \in \mathbb{R}$ beschreibbar ist.
3) Da aufgrund der ersten Duplikationsgleichung $S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 + X_0$ der Wert der Nutzenfunktion $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ für die Duplikationsstrategien h von $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ sich auch mittels $R_0(h)$ $= S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ berechnen lässt, kann man in der additiven Zerlegung $L = \breve{V} + \breve{L}$ von L den deterministischen Bewertungsterm $\breve{V} = (V',0)$ mit $V' = (S_0^{\delta\,\mathsf{T}},0)^{\mathsf{T}}$ außer Acht lassen und statt L zunächst nur die deterministische Abbildung $S_0{}^{\mathsf{T}}$ (zur Berechnung von $V_0(h)$) und die stochastische Abbildung $\breve{L} = (0,L')$ mit $L' = (-S_0{}^{\mathsf{T}},D^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ und schließlich nur noch die Abbildungen $S_0{}^{\mathsf{T}}$ und D^{T} betrachten.

Mit den Bildräumen und Kernen der linearen Abbildungen

$$D^{\mathsf{T}} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K \text{ und } D : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

lassen sich die Vektorräume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ als direkte Summen von orthogonalen Komplementen darstellen:

$$\mathbb{R}^N = \ker D^{\mathsf{T}} \oplus D(\mathbb{R}^K), \qquad (\ker D^{\mathsf{T}})^{\perp} = D(\mathbb{R}^K),$$
$$\mathbb{R}^K = \ker D \oplus D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N), \qquad (\ker D)^{\perp} = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N).$$

Diese Eigenschaften werden nachfolgend bei den Beweisen in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ verwendet.

1 Das Einperiodenmodell als Spezialfall des Mehrperiodenmodells

Ausgehend von den im Buch des Autors für das Mehrperiodenmodell angegebenen Charakterisierungen der **Vollständigkeit** (englisch: complete market model)

(VS) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$

des Marktmodells $((S,\delta),\mathcal{F})$, der Gültigkeit des **Law of One Price** (Gesetz des eindeutig bestimmten Preises, Abk.: LOP)

(LOP) Für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt: $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ ist konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$ $(\neq \emptyset)$

und der **Arbitragefreiheit** (englisch: No-Arbitrage Principle, Arbitrage-Free Condition)

(AF) $\nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0 \;\wedge\; L(h) \underset{\cdot}{>} 0$ [4]

können diese in einfacher Weise als Charakterisierungen für den Spezialfall des Einperiodenmodells (T = 1) geschrieben werden: Dazu ersetzt man einfach die Begriffe $\mathcal{H}_N$ bzw. $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{W}$ bzw. $\mathbb{R}^{n_1}$, $b = (S_0^\delta)_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N$, $\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W}$, $\mathcal{V} = \text{lin}\ \mathbf{1}_{0,\Omega}$ und L^* durch $\mathbb{R}^{2N}$, $\mathbb{R}^{1+K}$, $b = (S_0^\delta, 0)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$, $\mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$, $\mathcal{E} = \text{lin}\ \mathbf{1}_{0,\Omega}$ und $L^\top$. Diese Charakterisierungen werden vorneweg in Tabelle 1 aufgelistet. Dabei werden noch die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^{2N}$ bzw. $\mathbb{R}^{1+K}$ und Orthanten von $\mathbb{R}^{1+K}$ verwendet:

$$\mathcal{B} := \text{lin}\ \{b\}, \qquad \mathcal{B}^\perp = \ker b^\top = \ker V_0,$$

$$\mathcal{M} := L(\ker V_0) = \breve{L}(\mathbb{R}^{2N}) = L'(\mathbb{R}^N) \subseteq L(\mathbb{R}^{2N}), \qquad \mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B}) = \ker \breve{L}^* = \ker L'^\top,$$

$$\mathcal{V} := \text{lin}\ \{v_0(h)\mathbf{1}_{0,\Omega} : h \in \mathbb{R}^{2N}\},$$

$$\mathcal{E} := \text{lin}\ \mathbf{1}_{0,\Omega} = \text{lin}\ \{L(b)\} = L(\mathcal{B}) \subseteq L(\mathbb{R}^{2N}), \qquad \mathcal{E}^\perp = \{X \in \mathbb{R}^{1+K} : X_0 = 0\},$$

$$\mathbb{R}^{1+K}_{\underset{\cdot}{>}0} = \{X \in \mathbb{R}^{1+K} : X \geq 0 \wedge X \neq 0\}, \qquad \mathbb{R}^{1+K}_{>0} = \{X \in \mathbb{R}^{1+K} : X > 0\}.$$

Anschließend werden aber noch analoge Aussagen für das Einperiodenmodell mittels der in der Literatur üblichen speziellen Darstellungsweise mit den linearen Abbildungen D, $D^\top$ und $S_0^\top$ der niedrigerdimensionalen Räume $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^K$ und $\mathbb{R}$ in Tabelle 2 angegeben. Diese können entweder aus den Aussagen des Mehrperiodenmodells abgeleitet werden oder extra im Einperiodenmodell bewiesen werden. Damit erhält man sowohl die bekannten Aussagen, die schon in der ausführlichen Darstellung des Einperiodenmodells bei Kremer (2011), S. 3–71, zu finden sind[5], als auch weitere neue Aussagen.

Tab. 1 Die im Mehrperiodenmodell ($T \in \mathbb{N}$) entwickelten Charakterisierungen der Duplizierbarkeit, der Vollständigkeit, des Law of One Price und der Arbitragefreiheit in der Formulierung für das Einperiodenmodell (T = 1)

Duplizierbarkeit (DP)	$X \in \mathbb{R}^{1+K}$ ist duplizierbar $\Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $X = Lh$ $\Leftrightarrow X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ $\Leftrightarrow X \perp \ker L^\top$
Vollständigkeit (VS)	Das Marktmodell ist vollständig $\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K}$ (L surjektiv) $\Leftrightarrow \ker L^T = O$ $\Leftrightarrow L^\top$ injektiv

[4] Ein Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W}$ wird als schwach positiv bezeichnet, wenn $X \underset{\cdot}{>} 0$, d. h. $X \geq 0$ und $X \neq 0$, gilt.

[5] Kremer (2011) verwendet für S_0 auch die Bezeichnung b. In der hier vorliegenden Darstellung wird b aber für die Handelsstrategie $b = (b_0,0)^\top$ mit $b_0 = S_0^\delta = S_0 + \delta_0$ verwendet.

Law of One Price (LOP)	$\forall X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ ist $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ konstant für alle $h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$ $\Leftrightarrow \forall X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ ist $S_0{}^\top h_1$ konstant für alle $h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$ $\Leftrightarrow \exists X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $V_0(h)$ konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$ $\Leftrightarrow V_0(f) = b^\top f = 0$ für alle $f \in L^{-1}(\{0\}) = \ker L$ $\Leftrightarrow \ker L \subseteq \ker V_0 = \mathcal{B}^\perp$ (z. B. bei injektivem L) $\Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq (\ker L)^\perp = L^\top(\mathbb{R}^{1+K})$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^\top \Psi = b$ $\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta \in L(\mathbb{R}^{2N})$ mit $L^\top \vartheta = b$ $\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta \in L(\mathbb{R}^{2N}) \cap \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in (\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^\top \subseteq)\, \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\mathcal{M}^\perp = \ker L^\top \oplus \mathrm{lin}\,\{\Psi\}$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^\top$ $\Leftrightarrow \ker L^\top$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$ $\Leftrightarrow L^\top(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ $\Leftrightarrow L^\top(\mathbb{R}^{1+K}) = \mathcal{B} \oplus L^\top(\mathcal{M})$ $\Leftrightarrow L^\top(\mathcal{M})$ ist Hyperebene von $L^\top(\mathbb{R}^{1+K})$ $\Leftrightarrow \forall X \in L(\mathbb{R}^{2N})\ \exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \exists X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $\exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{V}^\perp = \{X_0 = 0\}$ $\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \dim L(\mathbb{R}^{2N}) = \dim \mathcal{M} + 1$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}$ ist eine Hyperebene von $L(\mathbb{R}^{2N})$ $\Leftrightarrow \dim \mathcal{M}^\perp = \dim \ker L^\top + 1$ $\Leftrightarrow$ (PGΨ) $\exists\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Psi^\top L h = b^\top h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$ $[\Psi_0 = 1]$
LOP nicht gültig	$\exists X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $V_0(h)$ nicht konstant für alle $h \in L^{-1}(X)$ $\Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $L(f) = 0 \wedge V_0(f) \neq 0$ $\Leftrightarrow \ker L \not\subseteq \ker V_0$ $\Leftrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$ $\Leftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} = L(\mathbb{R}^{2N})$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp = \ker L^\top$ $\Leftrightarrow L^\top(\mathcal{M}^\perp) = O$ $\Leftrightarrow L^\top(\mathbb{R}^{1+K}) = L^\top(\mathcal{M})$
(VS) $\wedge$ LOP	$L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} \wedge \mathcal{M}$ ist Hyperebene von $L(\mathbb{R}^{2N})$ $\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ mit $\dim \mathcal{M}^\perp = 1$ $\Leftrightarrow \exists_1\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^\top \Psi = b$
(VS) $\wedge$ $2N = 1+K$	L surjektiv $\wedge$ $2N = 1+K$ $\Leftrightarrow L$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow L^\top$ ist ein Isomorphismus
(VS) $\wedge$ LOP ungültig	$\mathcal{M}^\perp = \ker L^\top \wedge \ker L^\top = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp = \ker L^\top = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} = L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K}$

Arbitragefreiheit (AF)	$\nexists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = 0 \wedge Lh \underset{\cdot}{>} 0$ $\Leftrightarrow \nexists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $\breve{L}h \underset{\cdot}{>} 0$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{\underset{\cdot}{>}0} = \emptyset$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{>0}$ $(\Phi_0 = 1)$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^{\top}$ mit $\Phi > 0$ $(\Phi_0 = 1,\ \mathcal{M}^{\perp} = \ker L^{\top} \oplus \operatorname{lin}\{\Phi\})$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^{\top}\Phi = b,\ \Phi > 0$ $[\Phi_0 = 1]$ $\Leftrightarrow$ (PGΦ) $\exists\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Phi > 0,\ \Phi^{\top}Lh = b^{\top}h \ \forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ $[\Phi_0 = 1]$
(VS) $\wedge$ (AF)	$L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} \ \wedge\ \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{>0}$ $\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\mathcal{M}^{\perp} = [\Phi],\ \Phi > 0$ $\Leftrightarrow [\exists_1\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^{\top}\Phi = b] \wedge \Phi > 0$

2 Das Einperiodenmodell in der speziellen Darstellung in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$

2.1 Die Charakterisierungen der Vollständigkeit

In der Darstellung des Einperiodenmodells mit der Abbildung $L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ heißt ein Zahlungsprofil

$$X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} = (X_0,X_1(\omega_1),\ldots, X_1(\omega_K))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K},$$

duplizierbar (erreichbar, absicherbar; englisch: attainable, hedgeable, marketable), wenn das Zahlungsprofil $X \in \mathbb{R}^{1+K}$ das bei der Abbildung $L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ sich ergebende Bild Lh einer Handelsstrategie $h \in \mathbb{R}^{2N}$ ist. Die Übereinstimmung der stochastischen Prozesse X und Lh soll dabei für beide Zeitpunkte $t = 0$, 1 und im Zeitpunkt $t = 1$ für alle Zustände $\omega_k \in \Omega$ ($k = 1,\ldots,K$) gelten, somit P-sicher erfüllt sein (P ist das W-Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω). X ist also genau dann duplizierbar, wenn das gestaffelte inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\text{(DP)} \qquad \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0{}^\mathsf{T} \\ 0 & D^\mathsf{T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = L\cdot h = X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

lösbar ist. Es ist also ein Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $D^\mathsf{T}h_1 = X_1$ und dazu noch ein Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^\mathsf{T}h_1 + X_0$ zu bestimmen. Die Bestimmung einer Duplikationsstrategie $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T}$ von $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ erfolgt also linearalgebraisch durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems und nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch.[6] Die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der Zustände $\omega \in \Omega$ werden nicht benötigt. Da bei gültigem LOP jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ durch den für seine Duplikationsstrategien $h \in L^{-1}(\{X\})$ konstanten und deterministischen Wert $\pi(X) := V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0$ bewertet wird, ist diese Bewertung von X ebenfalls linearalgebraisch und nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch. Es handelt sich außerdem um einen relativen Bewertungsansatz, da hierzu eine spezielle Auswahl von Wertpapieren S^j ($j = 1,\ldots,N$) zugrunde gelegt ist und die Bewertung auf mittels Handelsstrategien h duplizierbare Zahlungsprofile X eingeschränkt ist.

Die **Duplizierbarkeit** eines $X \in \mathbb{R}^{1+K}$ bedeutet die Auflösbarkeit der beiden Gleichungen

$$S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^\mathsf{T}h_1 + X_0,$$
$$D^\mathsf{T}h_1 = X_1$$

nach h_0 und h_1. Da unter der mathematisch-technischen Voraussetzung

$$S_0^\delta \neq 0 \; (= (0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N)$$

die erste Gleichung für beliebige $X_0 \in \mathbb{R}$, $h_1 \in \mathbb{R}^N$ stets nach h_0 auflösbar ist, ist dies gleichbedeutend zur Lösbarkeit von $D^\mathsf{T}h_1 = X_1$, also zur D^T-Duplizierbarkeit des speziellen nur im Zeitpunkt $t = 1$ definierten Zahlungsprofils X_1.

Die **Vollständigkeit** (VS) des Marktmodells bedeutet, dass jedes $X \in \mathbb{R}^{1+K}$ L-duplizierbar ist bzw. jedes $X_1 \in \mathbb{R}^K$ D^T-duplizierbar ist. In den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ des Einperiodenmodells wird die Vollständigkeit des Marktmodells also charakterisiert durch die Surjektivität der Abbildung $D^T : h_1 \in \mathbb{R}^N \mapsto D^\mathsf{T}h_1 \in \mathbb{R}^K$:

---

[6] Ein Begriff oder eine Eigenschaft einer Zufallsvariablen X wird bei Bauer (2002) WT, S. 15, als wahrscheinlichkeitstheoretisch (w-theoretisch) bezeichnet, wenn sie sich mittels ihrer (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung (des W-Gesetzes, Bildmaßes Vert(X) $= X(P) = P_X$) formulieren lassen. Beispiele sind der Erwartungswert $E(X)$, das zentrale p-te Moment $E(X^p)$, das absolute p-te Moment $E(|X|^p)$, das in $\alpha \in \mathbb{R}$ zentrierte bzw. zentrierte absolute p-te Moment $E((X - \alpha)^p)$ bzw. $E(|X - \alpha|^p)$, die Varianz $V(X) = E([X - E(X)]^2)$, die beiden Parameter α und σ^2 der Gaußschen Glockenkurve und die Unabhängigkeit einer Familie von Zufallsvariablen (Bauer (2002) WT, S. 16, 18f, 29, 51).

$$\text{(VS)} \Leftrightarrow \operatorname{Im} D^\top := D^\top(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{rang} D^\top = K.$$

Die Vollständigkeit des Marktmodells bedeutet also für die Matrix $D^\top \in \mathbb{R}^{K\times N}$ den vollen Zeilenrang (Dimension des Zeilenraums) K.
Wegen der Darstellung von $\mathbb{R}^K$ als direkte Summe

$$\mathbb{R}^K = \operatorname{Im} D^\top \oplus \ker D, \qquad (\operatorname{Im} D^\top)^\perp = \ker D,$$

der orthogonalen Komplemente Im $D^\top$ und ker D ist die Vollständigkeit (VS) auch äquivalent zu $\ker D = O = \{0\}$, also zur Injektivität der linearen Abbildung $D : X_1 \in \mathbb{R}^K \mapsto DX_1 \in \mathbb{R}^N$. Es gilt also auch

$$\text{(VS)} \Leftrightarrow \ker D = O.$$[7]

2.2 Die Charakterisierungen des Law of One Price

Mit der Handelsstrategie

$$b := (b_0,0)^\top := (S_0^\delta,0)^\top \in \mathcal{H}_N \text{ bzw. } \in \mathbb{R}^{2N}$$

und dem davon aufgespannten eindimensionalen Unterraum $\mathcal{B} := \operatorname{lin}\{b\}$ von $\mathcal{H}_N$ bzw. $\mathbb{R}^{2N}$ erhält man die deterministische Linearform

$$V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = b^\top h,$$

deren Kern

$$\ker V_0 = \ker b^\top = \{h \in \mathbb{R}^{2N} : b^\top h = 0\} = \mathcal{B}^\perp$$

und dessen L-Bild

$$\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L(\mathcal{B}^\perp)$$

als die Menge der **Kapitalmarktgeschäfte**.[8] Im Einperiodenmodell gibt es für die Zahlungsströme $Z \in \mathcal{M}$ die folgende Charakterisierung:

$$Z \in \mathcal{M} \Leftrightarrow Z = L\cdot h = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\top} & -S_0^{\top} \\ 0 & D^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+K} \quad \text{mit } h \in \mathbb{R}^{2N},\ V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow Z = L'\cdot h_1 = \begin{pmatrix} -S_0^{\top} \\ D^\top \end{pmatrix} \cdot h_1 \in \mathbb{R}^{1+K} \qquad \text{mit } h_1 \in \mathbb{R}^N$$
$$\Leftrightarrow Z \in \operatorname{Im} L' = L'(\mathbb{R}^N).$$

Anmerkung zur Bezeichnung der $Z \in \mathcal{M}$ als Kapitalmarktgeschäfte:
Im Einperiodenmodell hat $Z \in \mathcal{M}$ die Darstellung

$$Z = L'\cdot h_1 = (-S_0^\top h_1, D^\top h_1)^\top = \left(-\sum_{j=1}^N S_0^j h_1^j, \sum_{j=1}^N S_1^{\delta,j}(\omega_1) h_1^j, \ldots, \sum_{j=1}^N S_1^{\delta,j}(\omega_K) h_1^j \right)^\top$$
$$= \sum_{j=1}^N h_1^j \cdot \left(-S_0^j, S_1^{\delta,j}(\omega_1), \ldots, S_1^{\delta,j}(\omega_K) \right)^\top = \sum_{j=1}^N h_1^j \cdot F^{1,j}$$

---

7 Diese Charakterisierungen der Vollständigkeit findet man bei Kremer (2011) auf S. 31, 44f, 68.

8 Im Mehrperiodenmodell ergibt sich jedes Zahlungsprofil $Z = L(h) \in \mathcal{M} = L(\ker V_0)$ aus einer Handelsstrategie h mit dem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$ beim Zeitpunkt $t = 0$, also durch reinen Handel mit den Wertpapieren S^j gemäß der Folge h_t der Portfoliovektoren ($t = 1,\ldots,T$). Der Handel besteht dabei aus dem Kauf des zu h_t gehörigen Portfolios zum Wert $R_{t-1}(h) = S_{t-1} \cdot h_t$ im Zeitpunkt t-1 und dem Verkauf dieses Portfolios zum zufallsabhängig eingestellten Wert $V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t$ im Zeitpunkt t. Bei Pleier (2018), S. 140–145, wird gezeigt, dass jedes $Z \in \mathcal{M}$ eine Linearkombination der Forwardgeschäfte $F^{t,j,k} \in \mathcal{M}$ ist, bei denen jeweils das j-te Wertpapier S^j genau zum Zeitpunkt $s = t$-1 und im Ereignis $A_{t-1,k}$ zum Preis $S_{t-1}^j(A_{t-1,k})$ gekauft und genau zum darauffolgenden Zeitpunkt $s = t$ in einem der dann noch möglichen Ereignisse $A_{t,m}$, $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$, zum zugehörigen Preis $S_t^{\delta,j}(A_{t,m})$ verkauft wird. Z ist also der Zahlungsstrom eines Kapitalmarktgeschäfts.

und ist Z somit eine Linearkombination der Kassageschäfte

$$F^{1,j} = \left(-S_0^j, S_1^{\delta,j}(\omega_1),\ldots,S_1^{\delta,j}(\omega_K)\right)^\top \qquad \text{(Darstellung von } S_1^{\delta,j} \text{ als } K\text{-Tupel)}$$

$$= \left(-S_0^j, \sum_{m=1}^{K} S_1^{\delta,j}(\omega_m)\cdot \mathbf{1}_{\omega_m}\right)^\top \in \mathcal{M} \qquad \text{(Darstellung } S_1^{\delta,j} \text{ als Zustandsfunktion),}$$

bei denen jeweils das j-te Wertpapier S^j zum Zeitpunkt $t = 0$ (sicher) zum Preis $S_0^j = S_0^j(\Omega)$ gekauft und zum Zeitpunkt $t = 1$ in einem der dann möglichen Ereignisse $\omega_m \in \Omega$ zum zugehörigen Preis $S_1^{\delta,j}(\omega_m)$ verkauft wird. Z ist also der Zahlungsstrom zu einer Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$, bei der zum Zeitpunkt $t = 0$ der Startkapitaleinsatz $V_0(h) = S_0^{\delta\top}h_0 = 0$ ist und bei der gemäß dem Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ bei $t = 0$ das Portfolio der Wertpapiere S^j ($j = 1,\ldots,N$) mit dem deterministischen (Re-)Investitionswert $R_0(h) = S_0 \cdot h_1 = S_0^\top h_1$ gekauft und bei $t = 1$ das Portfolio mit dem sich zufallsabhängig entwickelten Vermögenswert $V_1(h) = S_1^\delta \cdot h_1 = D^\top h_1$ verkauft wird, also der Zahlungsstrom eines Kapitalmarktgeschäfts:

$$Z_0 = L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = -S_0^\top h_1,$$

$$Z_1 = L_1(h) = V_1(h) = S_1^\delta h_1. \qquad \triangle$$

Aufgrund der Darstellung von $\mathbb{R}^{1+K}$ als direkte Summe

$$\mathbb{R}^{1+K} = \operatorname{Im} L' \oplus \ker L'^\top, \qquad (\operatorname{Im} L')^\perp = \ker L'^\top,$$

der orthogonalen Komplemente $\operatorname{Im} L'$ und $\ker L'^\top$ erhält man das orthogonale Komplement $\mathcal{M}^\perp$ von $\mathcal{M}$ durch

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\perp &= (\operatorname{Im} L')^\perp = \ker L'^\top \\ &= \{Y \in \mathbb{R}^{1+K} : L'^\top Y = (-S_0,D)Y = 0\} \\ &= \{Y \in \mathbb{R}^{1+K} : DY_1 = S_0Y_0\}.\end{aligned}$$

Im Einperiodenmodell ist also im Raum $\mathbb{R}^{1+K}$ die Menge $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte gegeben durch das Bild der Abbildung L',

$$\mathcal{M} = L'(\mathbb{R}^N),$$

und das orthogonale Komplement $\mathcal{M}^\perp$ von $\mathcal{M}$ durch den Kern der Abbildung $L'^\top$,

$$\mathcal{M}^\perp = \ker L'^\top = \{Y = (Y_0,Y_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K} : DY_1 = S_0Y_0\}.$$

Im Mehrperiodenmodell ist das LOP äquivalent zur Inzidenz

$$b \in L^*(\mathcal{W}),$$

also zur Existenz eines $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$.

Speziell im Einperiodenmodell bedeutet dies die Existenz eines $\Psi = (\Psi_0,\Psi_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit

$$\begin{pmatrix} S_0^\delta & 0 \\ -S_0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = L^\top\Psi = b = \begin{pmatrix} S_0^\delta \\ 0 \end{pmatrix},$$

also wegen $S_0^\delta \neq 0$ die Existenz eines $\Psi = (\Psi_0,\Psi_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit

$$\Psi_0 = 1 \ \wedge \ L'^\top\Psi = (-S_0,D)\Psi = 0 \ \text{ bzw.}$$

$$\Psi_0 = 1 \ \wedge \ D\Psi_1 = S_0.$$

Wie allgemein im Mehrperiodenmodell, so ist also auch hier die Existenz eines $\Psi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^\top\Psi = b$ äquivalent zur Existenz eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$. Damit erhält man folgende weitere Charakterisierungen für das LOP:

$$\begin{aligned}\text{(LOP)} \quad &\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \ \wedge \ L'^\top\Psi = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \ker L'^\top = \mathcal{M}^\perp \text{ mit } \Psi_0 = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \ \wedge \ D\Psi_1 = S_0 \\ &\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } D\Psi_1 = S_0 \\ &\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ S_0 \in D(\mathbb{R}^K) = \operatorname{Im} D.$$[9]

Das LOP bedeutet also, dass im Kern von $L'^{\top} = (-S_0, D)$ ein nichttrivialer Vektor Ψ mit der ersten Komponente $\Psi_0 = 1$ existiert. Dies bedeutet auch, dass die erste Spalte $-S_0$ von $L'^{\top}$ schon im Spaltenraum von D liegt bzw. dass der zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörige deterministische Preisvektor S_0 linear abhängig ist von den Kursen $S_1^\delta(\omega_k)$ des Preisvektors S, die zum Zeitpunkt $t = 1$ und zu den dann möglichen Zuständen $\omega_k \in \Omega$ $(k = 1,\ldots,K)$ gehören. Diese Charakterisierung des LOP wird auch noch innerhalb der Räume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ in Beweisteil 4) bewiesen.

In einem Einperiodenmodell mit gültigem LOP ist eine Lösung Ψ_1 von $D\Psi_1 = S_0$,

$$\Psi_1 \in \Psi_1' + \ker D \text{ mit einer speziellen Lösung } \Psi_1' \text{ von } D\Psi_1' = S_0,$$

genau dann eindeutig bestimmt, wenn $\ker D = O$, also das Marktmodell auch noch vollständig ist:[10]

$$(\text{LOP}) \wedge (\text{VS}) \Leftrightarrow \exists_1\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } D\Psi_1 = S_0.$$

Eine grafische Darstellung der Unterraumstrukturen in $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ bzw. $\mathbb{R}^K$ für ein vollständiges Marktmodell mit gültigem LOP wird in den Abbildungen 2b und 5b gegeben.

Aufgrund der Charakterisierung des LOP durch die Bedingung $S_0 \in \operatorname{Im} D$ und wegen der Darstellung von $\mathbb{R}^N$ als direkte Summe

$$\mathbb{R}^N = \operatorname{Im} D \oplus \ker D^{\top}, \qquad \operatorname{Im} D = (\ker D^{\top})^{\perp},$$

der orthogonalen Komplemente $\operatorname{Im} D$ und $\ker D^{\top}$ ist das LOP auch äquivalent zu $S_0 \perp \ker D^{\top}$ bzw. zu $\ker D^{\top} \subseteq [S_0]^{\perp} = \ker S_0^{\top}$ und damit zu $\ker L' = \ker S_0^{\top} \cap \ker D^{\top} = \ker D^{\top}$:[11]

$$\begin{aligned}(\text{LOP}) &\Leftrightarrow S_0 \perp \ker D^{\top}\\ &\Leftrightarrow \ker D^{\top} \subseteq \ker S_0^{\top}\\ &\Leftrightarrow \ker L' = \ker D^{\top}.\end{aligned}$$

Für die Charakterisierung des LOP durch $\ker D^{\top} \subseteq \ker S_0^{\top}$ wird unten in Beweisteil 4) auch noch eine Begründung innerhalb der Räume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ angegeben. Eine grafische Darstellung dieser geometrischen Situation wird in den Abbildungen 1, 2 und 3 für die zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofile $X \in \mathbb{R}^{1+K}$ und in den Abbildungen 4 und 5 für die zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofile $X_1 \in \mathbb{R}^K$ gegeben.

Weiter ist im Mehrperiodenmodell das LOP äquivalent zur Gültigkeit der Preisgleichungen für die mittels L duplizierbaren (erreichbaren) Zahlungsprofile $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ mit einem Prozess $\Psi \in \mathcal{W}$ $(\Psi_0 = 1)$:

$$(\text{PG}\Psi) \qquad \exists\ \Psi \in \mathcal{W} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \text{ und } \Psi^{\top} L(h) = b^{\top} h \ \ \forall\ h \in \mathcal{H}_N.$$

Ein derartiger Prozess $\Psi \in \mathcal{W}$ liefert dann für jedes Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ mit dem Skalarprodukt

$$\pi(X) := b^{\top} h = \Psi^{\top} L(h) = \Psi^{\top} X$$

von Ψ und X den eindeutig definierten Preis $\pi(X)$ von X und wird daher als **Bewertungsprozess** für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ bezeichnet.

Im Einperiodenmodell bedeutet nun (PGΨ) die Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^{\top} \in \mathbb{R}^{1+K}$, $\Psi_0 = 1$, d. h. die Gültigkeit der Preisgleichung für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X = Lh \in L(\mathbb{R}^{2N})$:

$$\Psi_0 S_0^{\delta\top} h_0 - \Psi_0 S_0^{\top} h_1 + \Psi_1^{\top} D^{\top} h_1 = \Psi^{\top} L h = b_0^{\top} h_0 = S_0^{\delta\top} h_0 \quad \forall\ h = (h_0, h_1)^{\top} \in \mathbb{R}^{2N},$$

also die Existenz eines sog. **Bewertungsvektors** Ψ_1 für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 = D^{\top} h_1 \in D^{\top}(\mathbb{R}^N)$:

9 Diese Charakterisierung des LOP findet man bei Kremer (2011), S. 29, 68.

10 Diese Charakterisierung eines vollständigen Marktmodells mit gültigem LOP findet man bei Kremer (2011), S. 31.

11 Die erste dieser drei Charakterisierungen des LOP gibt Kremer (2011) auf S. 29, 68.

(PGΨ1) $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Psi_1^\top D^\top h_1 = S_0^\top h_1\ \ \forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N$.[12]

Für die Äquivalenz von LOP und (PGΨ1) wird weiter unten durch die Beweisteile 4) und 16) auch noch eine Begründung innerhalb der Räume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ angegeben.

Nachfolgend wird in Beweisteil 3) gezeigt, dass das LOP für die $X = (X_0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N})$ äquivalent ist zur Bedingung

(LOP1) Für jedes $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ gilt: $R_0(h) = S_0^\top h_1$ ist konstant $\forall\ h = (h_0,h_1)^\top \in L^{-1}(\{X\})$

und zu dem folgenden Law of One Price für die $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$:

(LOPD$^\top$) Für jedes $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ gilt: $S_0^\top k_1$ ist konstant $\forall\ k_1 \in (D^\top)^{-1}(\{X_1\})$.

Demzufolge kann dann der Preis $\pi_1(X_1)$ des zum Zeitpunkt $t = 1$ auftretenden $D^\top$-duplizierbaren Zahlungsprofils $X_1 = D^\top h_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ in Übereinstimmung mit dem Preis

$$\pi(\hat{X}) = S_0^{\delta\top} h_0 = S_0^\top h_1 + X_0 = S_0^\top h_1$$

des L-duplizierbaren Zahlungsprofils $\hat{X} = (0,X_1)^\top = Lh \in L(\mathbb{R}^{2N})$ (siehe Beweisteil 1b: $0 = X_0 = S_0^{\delta\top} h_0 - S_0^\top h_1$, $X_1 = D^\top h_1$) mittels einer beliebigen Duplikationsstrategie h_1 bzw. h durch $S_0^\top h_1$ definiert werden:

$$\pi_1(X_1) := \pi(\hat{X}) = S_0^\top h_1.$$

Nach (PGΨ1) erhält man bei bekanntem Bewertungsvektor Ψ_1 den Preis $\pi(\hat{X})$ von $\hat{X} = (0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N})$ und den Preis $\pi_1(X_1)$ von $X_1 = D^\top h_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ auch als das Skalarprodukt von Ψ_1 und X_1, ohne eine Duplikationsstrategie berechnen zu müssen:

$$\pi_1(X_1) = \pi(\hat{X}) = S_0^\top h_1 = \Psi_1^\top D^\top h_1 = \Psi_1^\top X_1.$$

Demnach kann das Gleichungssystem (PGΨ1) als das System der Preisgleichungen für die mittels L duplizierbaren Zahlungsprofile $\hat{X} = (0,X_1)^\top = Lh \in L(\mathbb{R}^{2N}) \subseteq \mathbb{R}^{1+K}$ bzw. für die stochastischen Anteile $\hat{X} = (0,X_1)^\top$ der mittels L duplizierbaren Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1)^\top = Lh \in L(\mathbb{R}^{2N})$ bzw. für die mittels $D^\top$ duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 = D^\top h_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathbb{R}^K$ angesehen werden.

Beweis: Die Beweisabschnitte 1) und 2) befassen sich mit der Duplizierbarkeit von Zahlungsprofilen, die Beweisabschnitte 3) und 4) mit Charakterisierungen des LOP.

1) Die Duplizierbarkeit und die Preise der speziellen Zahlungsprofile $\breve{X} = (X_0,0)^\top$ und $\hat{X} = (0,X_1)^\top$:

a) Die Äquivalenz der Duplizierbarkeit von $X = (X_0,X_1)^\top$ zur Duplizierbarkeit von $\hat{X} = (0,X_1)^\top$: Ein Zahlungsprofil $X = (X_0,X_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ ist die Summe der Zahlungsprofile $\breve{X} = (X_0,0)^\top$ und $\hat{X} = (0,X_1)^\top$. Da hierbei wegen $S_0^\delta \neq 0$ der deterministische Anteil $\breve{X}$ stets duplizierbar ist (beispielsweise mittels einer Handelsstrategie $g = (g_0,g_1)^\top = (g_0,0)^\top$ mit $S_0^{\delta\top} g_0 = X_0$), ist X mit beliebig vorgegebenem X_0 genau dann duplizierbar, wenn der stochastische Anteil $\hat{X}$ duplizierbar ist: Aus $\hat{X} = L(k)$, $k \in \mathbb{R}^{2N}$, folgt nämlich

$$X = \breve{X} + \hat{X} = L(g) + L(k) = L(g + k) = L(h) \text{ mit } h = g + k \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Umgekehrt folgt aus $X = L(h)$, $h \in \mathbb{R}^{2N}$, auch

$$\hat{X} = X - \breve{X} = L(h) - L(g) = L(h - g) = L(k) \text{ mit } k = h - g \in \mathbb{R}^{2N}.$$

b) Es sollen nun die Preise der speziellen Zahlungsprofile $\breve{X} = (X_0,0)^\top$ und $\hat{X} = (0,X_1)^\top$ bestimmt werden. Da eine spezielle Duplikationsstrategie g des deterministischen Zahlungsprofils $\breve{X} = (X_0,0)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $g_1 = 0$ durch die Bedingung $S_0^{\delta\top} g_0 = X_0$ charakterisiert ist, wird bei gültigem LOP der Preis von $\breve{X}$ gegeben durch

$$\pi(\breve{X}) = S_0^{\delta\top} g_0 = X_0.$$

[12] Die Charakterisierung des LOP durch die Preisgleichungen (PGΨ1) bzw. (PGΨ) für die duplizierbaren Zahlungsprofile behandelt Kremer (2011) für das Einperiodenmodell auf S. 30, 68 und für das Mehrperiodenmodell auf S. 171. Bei Kremer werden im Einperiodenmodell nur die speziellen Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $X_0 = 0$, $X_1 = D^\top h_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ bzw. die zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofile X_1 mit dem Preis $\pi_1(X_1) = S_0^\top h_1$ behandelt.

Da eine Duplikationsstrategie k des stochastischen Zahlungsprofils $\hat{X} = (0,X_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ ($X_0 = 0$) durch die Bedingungen

$$D^\top k_1 = X_1 \;\wedge\; S_0^{\delta\top} k_0 = S_0{}^\top k_1$$

beschrieben wird, ist bei gültigem LOP der Preis $\pi(\hat{X}) = S_0^{\delta\top} k_0$ von $\hat{X}$ auch durch $S_0{}^\top k_1$ gegeben:

$$\pi(\hat{X}) = S_0^{\delta\top} k_0 = S_0{}^\top k_1 .$$

2) Die Äquivalenz der Duplizierbarkeit von $\hat{X} = (0,X_1)^\top$ zur Duplizierbarkeit von X_1, also die Gültigkeit der Aussage „$\hat{X} = (0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N}) \Leftrightarrow X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$“:

„$\Rightarrow$“: Falls „$\hat{X} = (0,X_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ L-duplizierbar ist, so gibt es eine Duplikationsstrategie $k = (k_0,k_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\hat{X} = Lk \in L(\mathbb{R}^{2N})$, also mit $S_0^{\delta\top} k_0 - S_0{}^\top k_1 = X_0 = 0$ und $D^\top k_1 = X_1$. Demnach ist X_1 durch k_1 auch $D^\top$-duplizierbar.

„$\Leftarrow$ “: Falls $X_1 \in \mathbb{R}^K$ duplizierbar ist, also $D^\top k_1 = X_1$ mit einem $k_1 \in \mathbb{R}^N$ gilt, so lässt sich wegen $S_0^{\delta} \neq 0$ auch noch ein $k_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\delta\top} k_0 = S_0{}^\top k_1$ bestimmen. Insgesamt ist dann $\hat{X} = (0,X_1)^\top = Lk$ mit $k = (k_0,k_1)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$, also $\hat{X}$ duplizierbar.

3) „(LOP) $\Leftrightarrow$ (LOP1) $\Leftrightarrow$ (LOPD$^\top$)“:

a) „(LOP) $\Leftrightarrow$ (LOP1)“: Für festes $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ ist für die Duplikationsstrategien h von X aufgrund der für diese Strategien gültigen Beziehung $S_0^{\delta\top} h_0 = X_0 + S_0{}^\top h_1$ der Wert $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ genau dann konstant, wenn der Wert $R_0(h) = S_0{}^\top h_1$ konstant ist. Das mit dem Skalarprodukt der N-Tupel S_0^{δ} und h_0 formulierte (LOP) ist also äquivalent zu dem mit dem Skalarprodukt der N-Tupel S_0 und h_1 formulierten (LOP1).

b) „(LOP) $\Leftrightarrow$ (LOPD$^\top$)“: „$\Rightarrow$“: Es sei $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ und $k_1 \in \mathbb{R}^N$ eine beliebige Duplikationsstrategie von X_1: $D^\top k_1 = X_1$. Nach 2) lässt sich k_1 zu einer Duplikationsstrategie $k = (k_0,k_1)^\top$ von $\hat{X}$ ergänzen, so dass auch $\hat{X}$ duplizierbar ist: $\hat{X} = (0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N})$. Bei gültigem (LOP) bzw. (LOP1) ist der Wert $S_0{}^\top h_1$ konstant für alle Duplikationsstrategien $h = (h_0,h_1)^\top$ von $\hat{X}$ und insbesondere für alle Duplikationsstrategien k_1 von X_1. Demnach gilt in $D^\top(\mathbb{R}^N)$ das Law of One Price

(LOPD$^\top$) Für jedes $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ gilt: $S_0{}^\top k_1$ ist konstant $\forall\, k_1 \in (D^\top)^{-1}(\{X_1\})$.

„$\Leftarrow$“: Umgekehrt kann aus dem Law of One Price (LOPD$^\top$) für die $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ auch die Bedingung

$$\ker D^\top \subseteq \ker S_0{}^\top$$

und damit nach der obigen Charakterisierung das LOP für alle $X = (X_0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N})$ gefolgert werden: Für ein beliebiges $f_1 \in \ker D^\top$ ist nämlich mit festen $h_1 \in \mathbb{R}^N$ und $X_1 := D^\top h_1$ die Handelsstrategie $k_1 := h_1 + f_1$ neben h_1 eine zweite Duplikationsstrategie von X_1 ($D^\top k_1 = D^\top h_1 + D^\top f_1 = D^\top h_1 = X_1$) und nach (LOPD$^\top$) somit $S_0{}^\top f_1 = S_0{}^\top k_1 - S_0{}^\top h_1 = 0$, also $f_1 \in \ker S_0{}^\top$. Insgesamt ist damit die Äquivalenz von (LOP) und (LOPD$^\top$) gezeigt.

4) „(LOPD$^\top$) $\Leftrightarrow \ker D^\top \subseteq \ker S_0{}^\top \Leftrightarrow S_0 \perp \ker D^\top \Leftrightarrow S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$“:

Diese Charakterisierungen wurden oben schon aus den entsprechenden Aussagen des Mehrperiodenmodells abgeleitet. Es wird jetzt noch eine Begründung innerhalb der Räume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ des Einperiodenmodells angegeben.

a) „(LOPD$^\top$) $\Leftrightarrow \ker D^\top \subseteq \ker S_0{}^\top$“: „$\Rightarrow$“: Das (LOPD$^\top$) bedeutet, dass für jedes $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ für alle Duplikationsstrategien $k_1 \in (D^\top)^{-1}(\{X_1\})$ von X_1 der Wert $S_0{}^\top k_1$ konstant ist. Um die rechte Seite der angegebenen Äquivalenz zu schließen, genügt es schon, wenn für ein festes $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ der Wert $S_0{}^\top k_1$ für alle Duplikationsstrategien k_1 von X_1 konstant ist. Da mit einer speziellen Duplikationsstrategie h_1 dieses Zahlungsprofils X_1 die Gesamtheit der Duplikationsstrategien durch $k_1 = h_1 + f$, $f \in \ker D^\top$, gegeben ist, ist dies gleichbedeutend dazu, dass $S_0{}^\top f = 0$ bzw. $f \in \ker S_0{}^\top$ für alle $f \in \ker D^\top$ gilt. Dies bedeutet wiederum die Inklusion $\ker D^\top \subseteq \ker S_0{}^\top$.

„$\Leftarrow$“: Umgekehrt folgt aus dieser Inklusion $\ker D^\top \subseteq \ker S_0{}^\top$ auch, dass für ein beliebiges $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ alle Duplikationsstrategien h_1 und $k_1 = h_1 + f$, $f \in \ker D^\top$, wegen $f \in \ker D^\top \subseteq \ker S_0{}^\top$ denselben Wert $S_0{}^\top k_1 = S_0{}^\top h_1 + S_0{}^\top f = S_0{}^\top h_1$ aufweisen. Dies bedeutet die Gültigkeit von (LOPD$^\top$).

b) „$\ker D^\top \subseteq \ker S_0{}^\top \Leftrightarrow S_0 \perp \ker D^\top \Leftrightarrow S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$“: Die Inklusion $\ker D^\top \subseteq \ker S_0{}^\top = [S_0]^\perp$ ist gleichbedeutend zur Inklusion

$$[S_0] = [S_0]^{\perp\perp} \subseteq (\ker D^\top)^\perp = D(\mathbb{R}^K),$$

also zur Relation $S_0 \perp \ker D^\top$ und zur Inzidenz $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$. □

Zur Formulierung weiterer Charakterisierungen der Begriffe Law of One Price und Arbitragefreiheit in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^K$ und $\mathbb{R}$ werden noch folgende Unterräume von $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^K$ und Orthanten von $\mathbb{R}^K$ benötigt:

$$[S_0] := \operatorname{lin}\{S_0\}, \qquad [S_0]^\perp = \ker S_0{}^\top;$$

$$\mathcal{M}_1 := D^\top(\ker S_0{}^\top) \subseteq D^\top(\mathbb{R}^N), \qquad \mathcal{M}_1^\perp = D^{-1}([S_0]),$$

$\mathcal{U}_1 := [U_1] := \text{lin}\,\{U_1\} \subseteq D^\top(\mathbb{R}^N)$ mit $U_1 := D^\top S_0$, $\qquad \mathcal{U}_1^\perp = D^{-1}([S_0]^\perp)$,

$\mathbb{R}^K_{\geq 0} = \{X_1 \in \mathbb{R}^K : X_1 \geq 0 \wedge X_1 \neq 0\}$, $\qquad \mathbb{R}^K_{>0} = \{X_1 \in \mathbb{R}^K : X_1 > 0\}$.

Es wird dabei die mathematisch-technische Voraussetzung

$$U_1 = D^\top S_0 \neq 0 = (0,\ldots,0)^\top \in \mathbb{R}^K$$

verwendet. Die bei den nachfolgenden Bedingungen auftretenden stochastischen Vektoren $\Psi_1, \Phi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D \subseteq \mathbb{R}^K$ werden als Bewertungsvektor bzw. Diskontvektor (Zustands(preis)vektor) für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 = D^\top h_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ bezeichnet. Die Beweise für diese Charakterisierungen werden im Anschluss an die Abbildungen gegeben.

Anmerkung zur Bezeichnung der $\hat{Z} = (0,Z_1)^\top \in \mathcal{M}(1)$ als NE-Geschäfte in $\mathbb{R}^{1+K}$ und der $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ als NE-Zahlungsprofile in $\mathbb{R}^K$: Es wird nun ein Zusammenhang zwischen den Zahlungsprofilen $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ und endfälligen Kapitalmarktgeschäften $Z \in \mathcal{M}(1) := \mathcal{M} \cap \{X_0 = 0\}$ aufgezeigt und damit die Bezeichnung der $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ als Nulleinsatz-Zahlungsprofile (NE-Zahlungsprofile) plausibel gemacht. Zunächst besteht eine bijektive Beziehung zwischen den zum Zeitpunkt $t = 1$ auftretenden Zahlungsprofilen $Z_1 \in \mathbb{R}^K$ und den endfälligen Zahlungsprofilen $\hat{Z} = (0,Z_1)^\top \in \mathcal{W}(1) := \mathbb{R}^{1+K} \cap \{X_0 = 0\}$ mit $Z_0 = 0$:

$$Z_1 \in \mathbb{R}^K \overset{\text{Bijektion}}{\leftrightarrow} \hat{Z} = \hat{Z}(Z_1) := (0,Z_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K} \cap \{X_0 = 0\} = \mathcal{V}^\perp \qquad (\mathcal{V} = \text{lin}\,\mathbf{1}_{0,\Omega}).$$

Weiter ist $\hat{Z} = (0,Z_1)^\top \in \mathcal{W}(1)$ genau dann L-duplizierbar, wenn $Z_1 \in \mathbb{R}^K$ $D^\top$-duplizierbar ist (Äquivalenz von DPsf und DPD$^\top$):

$$\hat{Z} \in L(\mathcal{H}^{sf}_N) = L(\mathbb{R}^{2N}) \cap \{X_0 = 0\} \Leftrightarrow Z_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N).$$

Es besteht eine bijektive Beziehung zwischen den $D^\top$-duplizierbaren Zahlungsprofilen $Z_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ und den mittels L sf-duplizierbaren Zahlungsprofilen $\hat{Z} \in L(\mathcal{H}^{sf}_N)$:

$$Z_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N) \overset{\text{Bijektion}}{\leftrightarrow} \hat{Z} = (0,Z_1)^\top \in \hat{Z} \in L(\mathcal{H}^{sf}_N).$$

Außerdem gilt für $\hat{Z} = (0,Z_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N}) \cap \{X_0 = 0\}$ die Inzidenz $\hat{Z} \in \mathcal{M}(1) = L(\ker V_0) \cap \{X_0 = 0\}$, d. h.

$$0 = Z_0 = L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) \text{ mit } V_0(h) = 0,$$
$$Z_1 = L_1(h) = V_1(h) = D^\top h_1,$$

genau dann, wenn $Z_1 = D^\top h_1$ mit $R_0(h) = S_0^\top h_1 = 0$ ist, also $Z_1 \in \mathcal{M}_1 = D^\top(\ker S_0^\top)$ gilt. Es besteht also auch eine bijektive Beziehung zwischen den Zahlungsprofilen $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ und den endfälligen Kapitalmarktgeschäften $\hat{Z} = (0,Z_1)^\top \in \mathcal{M}(1)$:

$$Z_1 \in \mathcal{M}_1 \overset{\text{Bijektion}}{\leftrightarrow} \hat{Z} = (0,Z_1)^\top \in \mathcal{M}(1).$$

Ein Zahlungsstrom $\hat{Z} \in \mathcal{M}(1)$ ist ein Kapitalmarktgeschäft, bei dessen Duplizierung zum Zeitpunkt $t = 0$ neben einem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$ auch noch der (Re-)Investitionswert $R_0(h) = 0$ ist. Es liegt also zum Zeitpunkt $t = 0_-$ zunächst ein Portfolio h_0 mit dem Vermögenswert $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0$ vor. Nach der zum Zeitpunkt $t = 0_\delta$ $(0_- < 0_\delta < 0_+)$ erfolgenden Dividendenzahlung wird dann zum Zeitpunkt $t = 0_+$ das Portfolio h_0 umgeschichtet in ein Portfolio h_1, für das auch der Reinvestitionswert $R_0(h) = S_0^\top h_1 = 0$ und damit auch die (Aus-)Zahlung $Z_0 = L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = 0$ ist (h ist eine sog. selbstfinanzierende Handelsstrategie). Demzufolge wird ein $\hat{Z} = (0,Z_1)^\top \in \mathcal{M}$ hier als Nulleinsatz-Kapitalmarktgeschäft (Abk.: NE-Kapitalmarktgeschäft, **NE-Geschäft**) bezeichnet. Weiter wird das bei einem NE-Geschäft $\hat{Z}$ im Zeitpunkt $t = 1$ auftretende stochastische Zahlungsprofil $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ hier Nulleinsatz-Zahlungsprofil (Abk.: **NE-Zahlungsprofil**) genannt. Bei gültigem LOP ist der Preis $\pi_1(Z_1)$ eines NE-Zahlungsprofils $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ definitionsgemäß gleich dem Preis des zugehörigen NE-Geschäfts $\hat{Z} = (0,Z_1)^\top$ und somit wegen $\hat{Z} \in \mathcal{M}$ gleich Null:

$$\pi_1(Z_1) = \pi(\hat{Z}) = 0. \qquad \triangle$$

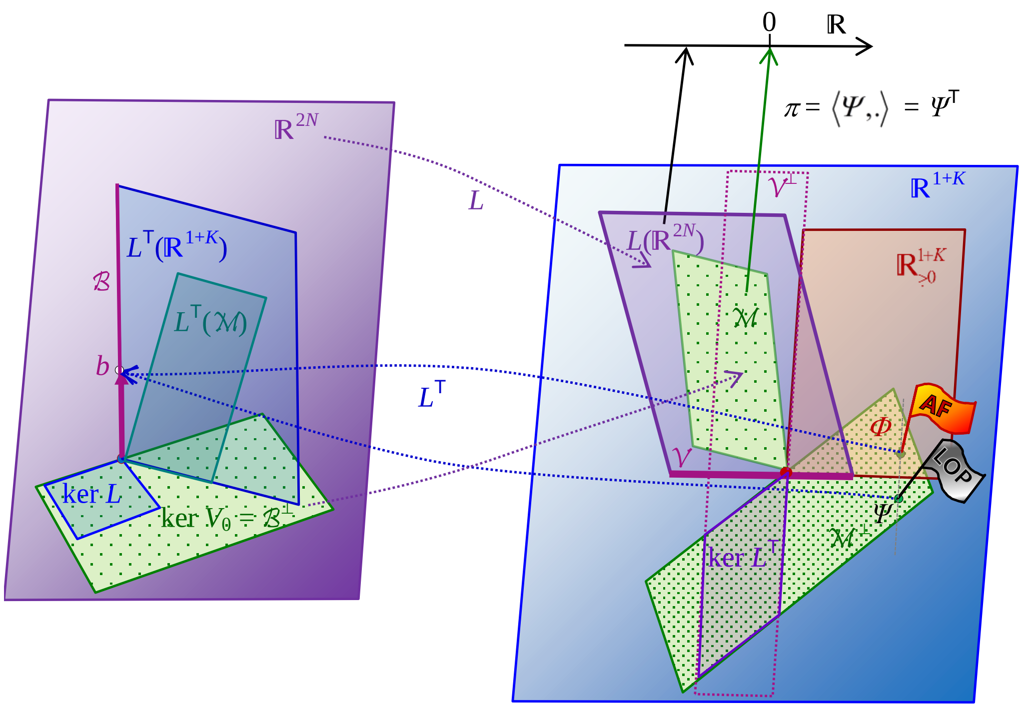
Bei den nachfolgend in der Tabelle 2 aufgeführten Charakterisierungen des Law of One Price und der Arbitragefreiheit werden nicht nur lineare Gleichungen für die Portfoliovektoren $h_1 \in \mathbb{R}^N$ bzw. $h_1 \in \ker S_0^\top$, sondern auch Struktur und Lagebeziehungen für bestimmte Unterräume und Orthanten von $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ angegeben. Der Vorteil der neuen Charakterisierungen mittels der Vektorunterräume besteht darin, dass sie beispielsweise durch die nachfolgende Abbildung 4 geometrisch visualisiert werden können. Andererseits liefert eine geometrische Veranschaulichung auch eine Quelle für Vermutungen über weitere neue Ergebnisse. Der Vektorraum $\mathbb{R}^K$ der stochastischen Zahlungsprofile X_1 lässt sich darstellen als direkte Summe der Unterräume $D^\top(\mathbb{R}^N)$ und $\ker D$ und als direkte Summe von $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_1^\perp$. Dabei liegt stets $\mathcal{M}_1$ in $D^\top(\mathbb{R}^N)$ und $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$. In der Abbildung 4b ist dargestellt, dass bei ungültigem LOP sowohl der Unterraum $\mathcal{M}_1$ der NE-Zahlungsprofile mit dem Unterraum $D^\top(\mathbb{R}^N)$ der duplizierbaren Zahlungsprofile X_1 als auch der Unterraum $\mathcal{M}_1^\perp$ mit dem Unterraum $\ker D$ zusammenfällt. In der Abbildung 4a sieht man dagegen, dass mit der Einstellung des LOP im Marktmodell der Unterraum $\mathcal{M}_1$ um eine Dimension kleiner ausfällt als der Unterraum $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ und der Unterraum $\mathcal{M}_1^\perp$ um eine Dimension größer wird als $\ker D$. Im nichtleeren Bereich $\mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ liegt dann ein Bewertungsvektor Ψ_1, mit dem der Preis $\pi_1(X_1)$ eines duplizierbaren Zahlungsprofils $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ als Skalarprodukt $\Psi_1^\mathsf{T} X_1$ und somit unabhängig von einer Duplikationsstrategie berechnet werden kann: Für diesen Vektor $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ gilt nämlich o. E. $D\Psi_1 = S_0$, sodass für ein festes Zahlungsprofil $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ alle Duplikationsstrategien h_1 von X_1 durch die deterministische lineare Nutzenfunktion $h_1 \mapsto S_0^\mathsf{T} h_1$ mit dem gleichen Wert $S_0^\mathsf{T} h_1 = \Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} h_1 = \Psi_1^\mathsf{T} X_1$ bewertet werden. Da dieser Wert mit dem Preis $\pi(\hat{X})$ von $\hat{X} = (0,X_1)^\mathsf{T} \in L(\mathbb{R}^{2N})$ übereinstimmt, wird er auch als Preis $\pi_1(X_1)$ von X_1 bezeichnet. Demzufolge ist die auf $\mathbb{R}^K$ definierte Linearform $\pi_1(X_1) = \Psi_1^\mathsf{T} X_1$ eine lineare Nutzenfunktion, die auf $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ den Preis von X_1 liefert.

Tab. 2 Die Charakterisierungen der Duplizierbarkeit, der Vollständigkeit, des Law of One Price und der Arbitragefreiheit in der speziellen Formulierung für das Einperiodenmodell mit den Abbildungen D, D^T und S_0^T der niedrigerdimensionalen Räume $\mathbb{R}^{1+K}$ und $\mathbb{R}^N$

Duplizierbarkeit (DP)	$X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ ist duplizierbar $\Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $X = Lh$ $\Leftrightarrow \exists\, h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$: $S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = S_0^\mathsf{T} h_1 + X_0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 = X_1$ $\Leftrightarrow X \in L(\mathbb{R}^{2N}) = (\ker L^\mathsf{T})^\perp$ $\Leftrightarrow X \perp \ker L^\mathsf{T}$ $\Leftrightarrow X_1 \in \mathbb{R}^K$ duplizierbar ($\exists\, h_1 \in \mathbb{R}^N$: $D^\mathsf{T} h_1 = X_1$) $\Leftrightarrow X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = (\ker D)^\perp$ $\Leftrightarrow X_1 \perp \ker D$
Vollständigkeit (VS)	Marktmodell ist vollständig $\Leftrightarrow \mathbb{R}^{1+K} = L(\mathbb{R}^{2N}) = (\ker L^\mathsf{T})^\perp$ (L surjektiv) $\Leftrightarrow \ker L^\mathsf{T} = O$ (L^T injektiv) $\Leftrightarrow \mathbb{R}^K = D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = (\ker D)^\perp$ (D^T surjektiv) $\Leftrightarrow \ker D = O$ (D injektiv)
Law of One Price (LOP)	$\forall\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ ist $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ konstant $\forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$ $\Leftrightarrow$ (LOP1) $\forall\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ ist $S_0^\mathsf{T} h_1$ konstant $\forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$ $\Leftrightarrow$ (LOPD$^\mathsf{T}$) $\forall\, X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ ist $S_0^\mathsf{T} k_1$ konstant $\forall\, k_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $D^\mathsf{T} k_1 = X_1$ $\Leftrightarrow \exists\, X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$: $S_0^\mathsf{T} k_1$ konstant $\forall\, k_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $D^\mathsf{T} k_1 = X_1$ $\Leftrightarrow \ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T} = [S_0]^\perp$ $\Leftrightarrow S_0 \perp \ker D^\mathsf{T}$ $\Leftrightarrow S_0 \in D(\mathbb{R}^K) = (\ker D^\mathsf{T})^\perp$ $\Leftrightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}_1^\perp \not\subseteq \mathcal{U}_1^\perp$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}_1$ ist eine Hyperebene von $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ $\Leftrightarrow \ker D$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}_1^\perp$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ mit $\mathcal{M}_1^\perp = \ker D \oplus \operatorname{lin} \Psi_1$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ $\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ mit $D\vartheta_1 = S_0$ $\Leftrightarrow \exists\, \vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ $\Leftrightarrow D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0]$ $\Leftrightarrow D(\mathbb{R}^K) = [S_0] \oplus D(\mathcal{M}_1)$ $\Leftrightarrow$ (PGΨ1) $\exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} h_1 = S_0^\mathsf{T} h_1 \;\forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N$ $\Leftrightarrow$ (KPGΨ1) $\exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} g_1 = 0 \;\forall\, g_1 \in [S_0]^\perp$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1^\mathsf{T} Z_1 = 0 \;\forall\, Z_1 \in \mathcal{M}_1$ $\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$

LOP nicht gültig	$\exists\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ nicht konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$ $\Leftrightarrow \exists\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ nicht konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$ $\Leftrightarrow \exists\, X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$: $S_0{}^{\mathsf{T}} k_1$ nicht konstant $\forall\, k_1 \in (D^{\mathsf{T}})^{-1}(\{X_1\})$ $\Leftrightarrow \forall\, X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ ist $S_0{}^{\mathsf{T}} k_1$ nicht konstant $\forall\, k_1 \in (D^{\mathsf{T}})^{-1}(\{X_1\})$ $\Leftrightarrow \ker D^{\mathsf{T}} \not\subseteq \ker S_0{}^{\mathsf{T}}$ $\Leftrightarrow S_0 \notin D(\mathbb{R}^K)$ $\Leftrightarrow \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}_1{}^{\perp} \subseteq \mathcal{U}_1{}^{\perp}$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}_1 = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ $\Leftrightarrow \ker D = \mathcal{M}_1{}^{\perp}$ $\Leftrightarrow D(\mathcal{M}_1{}^{\perp}) = O$ $\Leftrightarrow D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1)$
(VS) $\wedge$ LOP	$L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K}$ $\wedge$ $\mathcal{M}$ ist Hyperebene von $L(\mathbb{R}^{2N})$ $\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\dim \mathcal{M}^{\perp} = 1$ $\Leftrightarrow D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$ $\wedge$ $\mathcal{M}_1$ ist eine Hyperebene von $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ $\Leftrightarrow D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1{}^{\perp}$ mit $\dim \mathcal{M}_1{}^{\perp} = 1$ $\Leftrightarrow \exists_1\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$
(VS) $\wedge$ $2N = 1+K$	L surjektiv $\wedge$ $2N = 1+K$ $\Leftrightarrow L$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow L^{\mathsf{T}}$ ist ein Isomorphismus
(VS) $\wedge$ $N = K$	D^T surjektiv $\wedge$ $N = K$ $\Leftrightarrow D^{\mathsf{T}}$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow D$ ist ein Isomorphismus
(VS) $\wedge$ LOP ungültig	$\mathcal{M}^{\perp} = \ker L^{\mathsf{T}}$ $\wedge$ $\ker L^{\mathsf{T}} = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} = \ker L^{\mathsf{T}} = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} = L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K}$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}_1{}^{\perp} = \ker D$ $\wedge$ $\ker D = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}_1{}^{\perp} = \ker D = O$ $\Leftrightarrow \mathcal{M}_1 = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$
Arbitragefreiheit (AF)	$\nexists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0 \wedge Lh \underset{\cdot}{>} 0$ $\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{\underset{\cdot}{>}0} = \emptyset$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{>0}$ (o. E. $\Phi_0 = 1$) $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Phi \perp \mathcal{M} = \mathrm{Im}\, L'$, $\Phi > 0$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp} = \ker L'^{\mathsf{T}} = (\mathrm{Im}\, L')^{\perp}$, $\Phi > 0$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L'^{\mathsf{T}}\Phi = 0$, $\Phi > 0$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Phi_1 = S_0$, $\Phi_1 > 0$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp} \setminus \ker D$ mit $\mathcal{M}_1{}^{\perp} = \ker D \oplus \mathrm{lin}\, \Phi_1$, $\Phi_1 > 0$ $\Leftrightarrow$ (PGΦ1) $\exists\, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Phi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ $\forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N$, $\Phi_1 > 0$ $\Leftrightarrow$ (KPGΦ1) $\exists\, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Phi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} g_1 = 0$ $\forall\, g_1 \in [S_0]^{\perp}$, $\Phi_1 > 0$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Phi_1{}^{\mathsf{T}} Z_1 = 0$ $\forall\, Z_1 \in \mathcal{M}_1$, $\Phi_1 > 0$ $\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp} \setminus \ker D$, $\Phi_1 > 0$
(VS) $\wedge$ (AF)	$L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K}$ $\wedge$ $\exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{>0}$ $\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\mathcal{M}^{\perp} = [\Phi]$, $\Phi > 0$ $\Leftrightarrow D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$ $\wedge$ $\exists\, \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp} \cap \mathbb{R}^K_{>0}$ $\Leftrightarrow D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1{}^{\perp}$ mit $\mathcal{M}_1{}^{\perp} = [\Phi_1]$, $\Phi_1 > 0$ $\Leftrightarrow [\exists_1\, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Phi_1 = S_0] \wedge \Phi_1 > 0$

a) LOP gültig:



b) LOP ungültig:

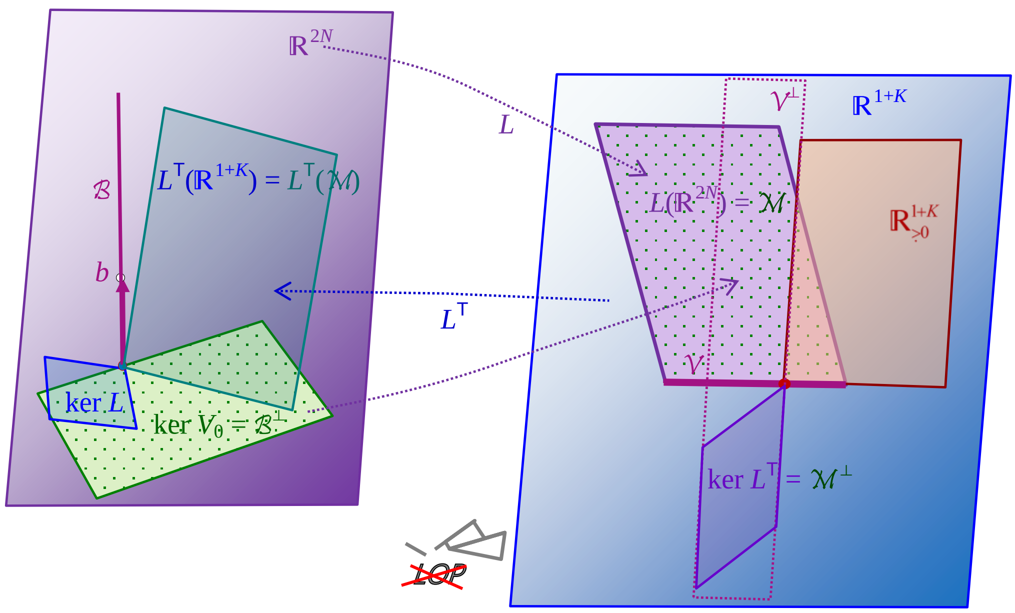
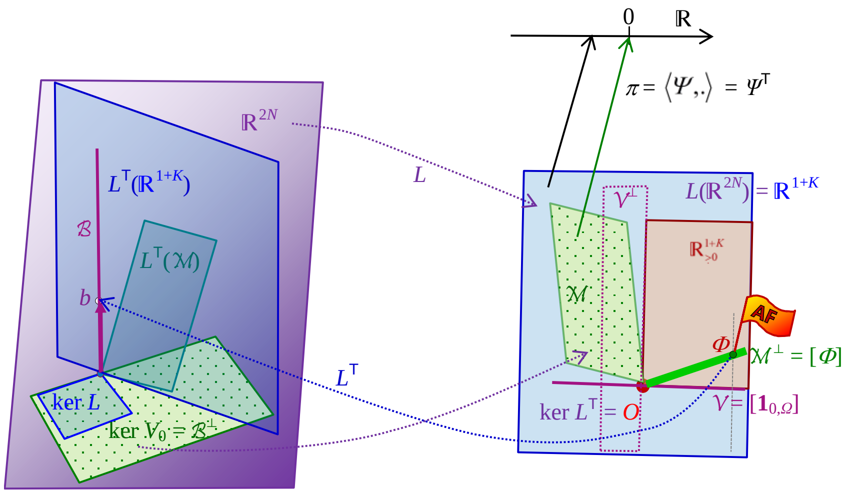
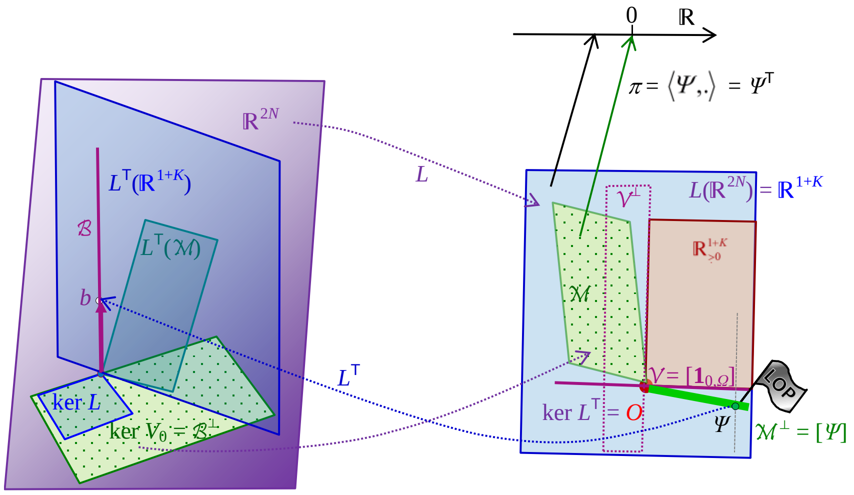


Abb. 1 Die verschiedenen Unterräume von $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ und die linearen Abbildungen L und L^{T}
a) bei gültigem LOP mit Bewertungsprozess Ψ bzw.
bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit Zustandspreisprozess Φ;
b) bei ungültigem LOP

a) VS und AF gültig:



b) VS und LOP gültig:



c) VS gültig und LOP ungültig:

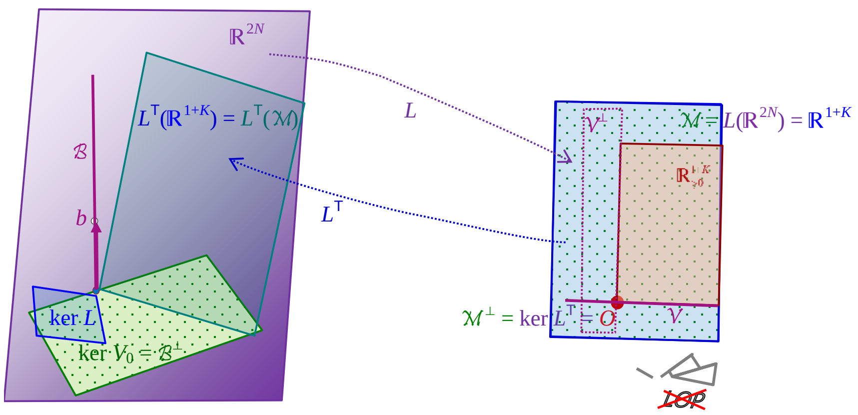
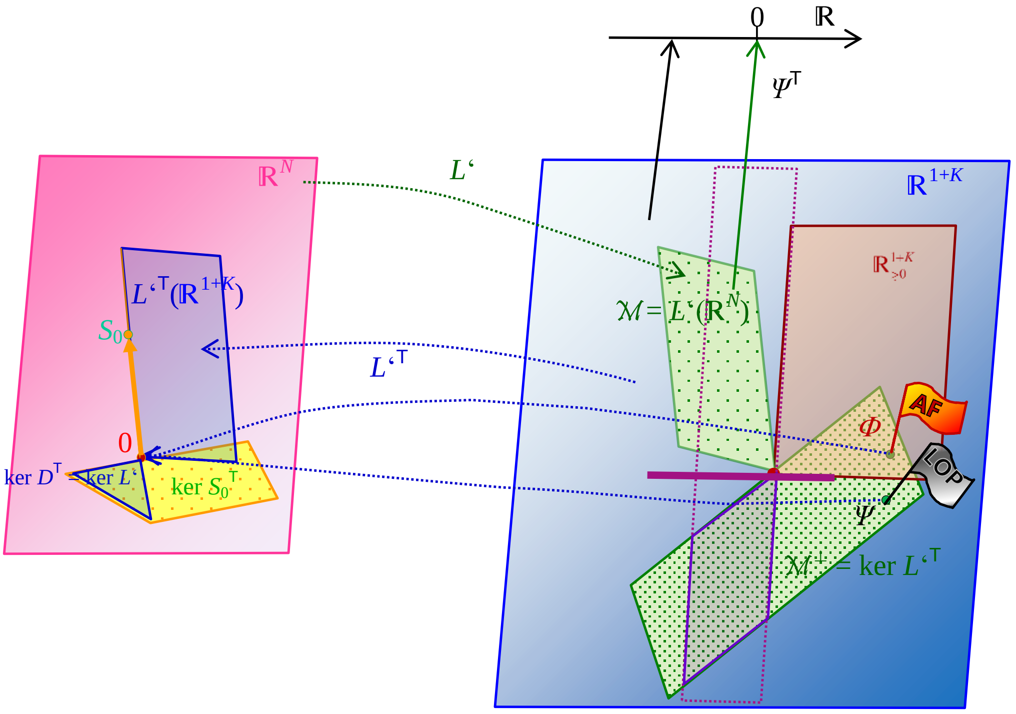


Abb. 2 Die verschiedenen Unterräume von $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ und die linearen Abbildungen L und L^{T} bei vollständigem Marktmodell und
a) bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit Zustandspreisprozess Φ,
b) bei gültigem LOP mit Bewertungsprozess Ψ,
c) bei ungültigem LOP

a) LOP gültig:



b) LOP ungültig:

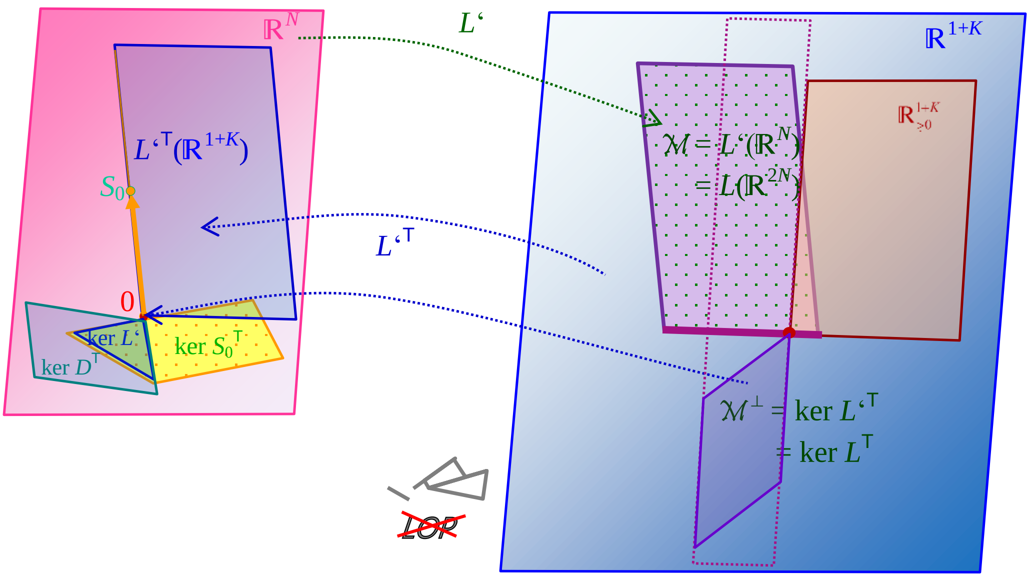
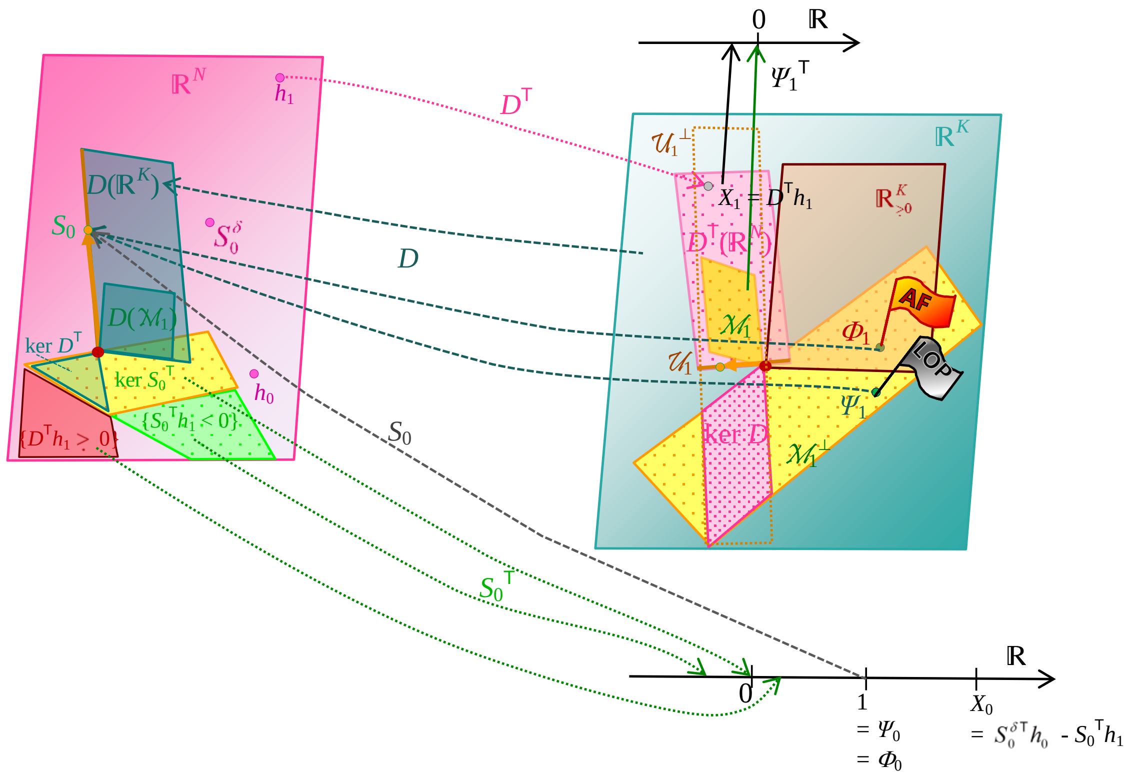


Abb. 3 Die verschiedenen Unterräume von $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ und die linearen Abbildungen L‘ und L‘$^\mathsf{T}$:
a) bei gültigem LOP mit Bewertungsprozess Ψ bzw.
bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit Zustandspreisprozess Φ;
b) bei ungültigem LOP

a) LOP gültig:



b) LOP ungültig:

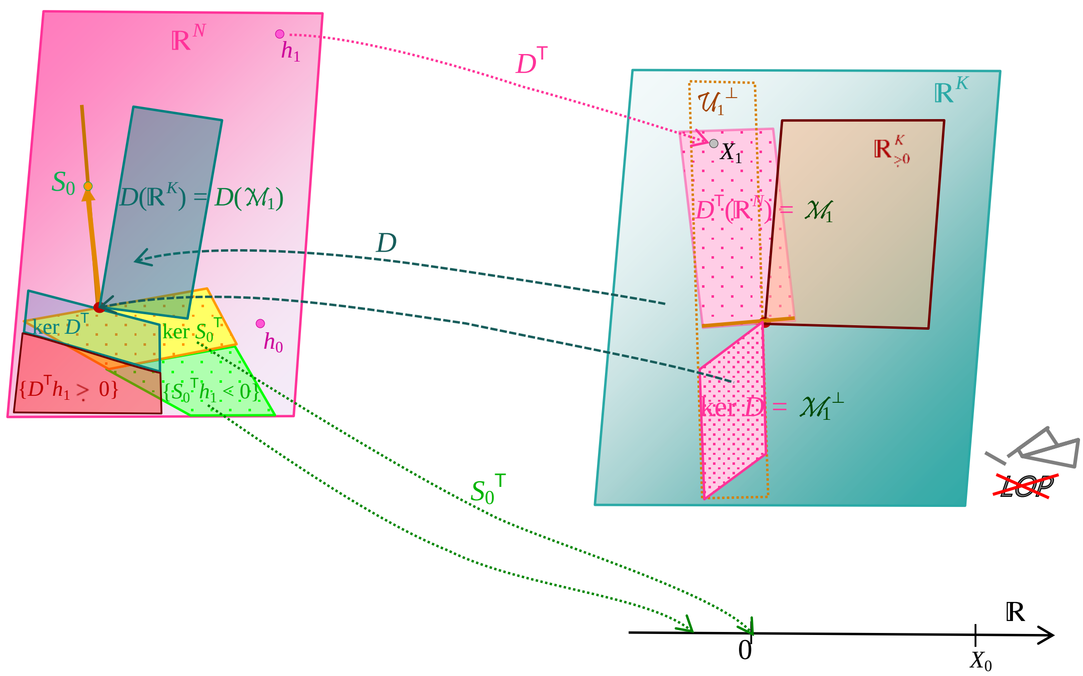
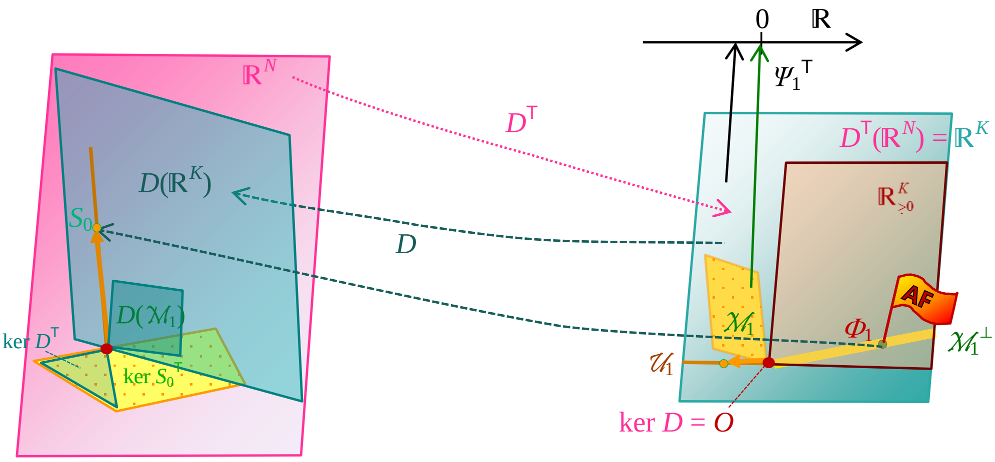
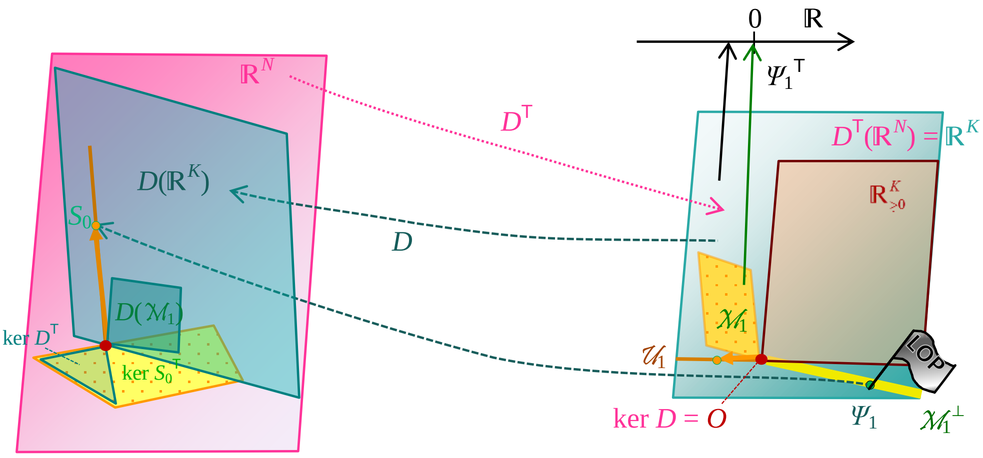


Abb. 4 Die verschiedenen Unterräume und Urbildmengen in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ und die linearen Abbildungen D^T, D, $S_0{}^\mathsf{T}$ und S_0:
a) bei gültigem LOP mit Bewertungsvektor Ψ_1 bzw.
bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit Zustandspreisvektor Φ_1;
b) bei ungültigem LOP

a) VS und AF gültig:



b) VS und LOP gültig:



c) VS gültig und LOP ungültig:

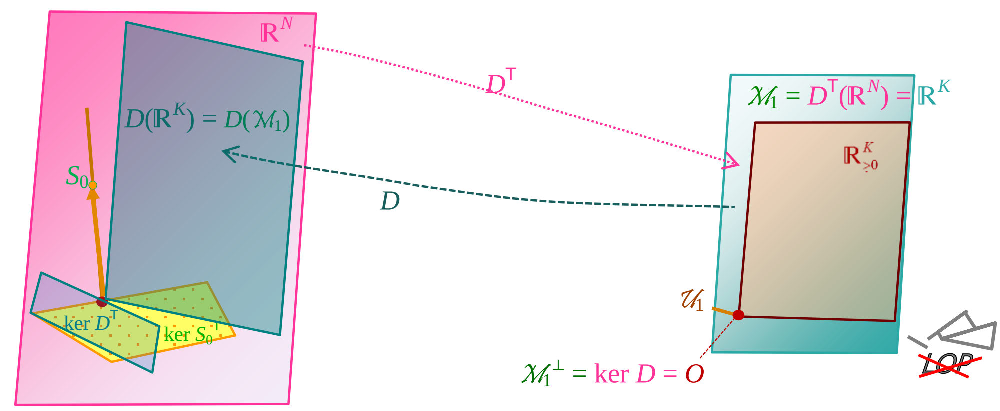


Abb. 5 Die verschiedenen Unterräume und Urbildmengen in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ und die linearen Abbildungen D^{T} und D bei vollständigem Marktmodell und
a) bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit Zustandspreisvektor Φ_1,
b) bei gültigem LOP mit Bewertungsvektor Ψ_1,
c) bei ungültigem LOP

Beweis: Die Beweisabschnitte 5) bis 8) liefern Eigenschaften von Unterräumen, die unabhängig von der Gültigkeit des LOP vorliegen. Die darauffolgenden Abschnitte 9) bis 20) befassen sich dann wie schon die Beweisabschnitte 3) und 4) mit Charakterisierungen des LOP und der Vollständigkeit.

5) $\mathcal{M}_1 \subseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$, $\ker D \subseteq \mathcal{M}_1^\perp$:

Aus der Definition des Unterraums $\mathcal{M}_1$ ergibt sich unmittelbar die Inklusion $\mathcal{M}_1 := D^\mathsf{T}([S_0]^\perp) \subseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ und daraus auch die entsprechende Inklusion für die orthogonalen Komplemente: $\ker D = D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)^\perp \subseteq \mathcal{M}_1^\perp$.

6) $\mathcal{U}_1^\perp = D^{-1}([S_0]^\perp)$, $\ker D \subseteq \mathcal{U}_1^\perp$, $D(\mathcal{U}_1^\perp) = [S_0]^\perp \cap D(\mathbb{R}^K) = \ker S_0^\mathsf{T} \cap D(\mathbb{R}^K)$, $\ker D = \mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{U}_1^\perp$:

a) Für die Hyperebene $\mathcal{U}_1^\perp$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1^\perp &= \{X_1 \in \mathbb{R}^K : U_1^\mathsf{T}X_1 = S_0^\mathsf{T}DX_1 = 0\}\\ &= \{X_1 \in \mathbb{R}^K : DX_1 \in \ker S_0^\mathsf{T}\}\\ &= D^{-1}(\ker S_0^\mathsf{T}) = D^{-1}([S_0]^\perp).\end{aligned}$$

b) Wegen $O \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$ gilt auch $\ker D = D^{-1}(O) \subseteq D^{-1}([S_0]^\perp) = \mathcal{U}_1^\perp$, also stets die Inklusion

$$\ker D \subseteq \mathcal{U}_1^\perp.$$

Ein 2. Beweis schließt aus der Inklusion $\mathcal{U}_1 = [U_1] = [D^\mathsf{T}S_0] = D^\mathsf{T}([S_0]) \subseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ die entsprechende Inklusion der orthogonalen Komplemente $\ker D = D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)^\perp \subseteq \mathcal{U}_1^\perp$.

c) Außerdem gilt aufgrund der Darstellung $\mathcal{U}_1^\perp = D^{-1}([S_0]^\perp)$ die triviale Inklusion $D(\mathcal{U}_1^\perp) \subseteq [S_0]^\perp \cap D(\mathbb{R}^K)$. Für die umgekehrte nichttriviale Inklusion „$\supseteq$“ verwendet man die spezielle Definition von $\mathcal{U}_1^\perp$ und folgert für jedes $h_1 = DX_1 \in [S_0]^\perp \cap D(\mathbb{R}^K)$, $X_1 \in \mathbb{R}^K$, die Gleichung $0 = S_0^\mathsf{T}h_1 = S_0^\mathsf{T}DX_1 = U_1^\mathsf{T}X_1$, also $X_1 \in \mathcal{U}_1^\perp$ und $h_1 \in D(\mathcal{U}_1^\perp)$. Demnach gilt auch die Inklusion $[S_0]^\perp \cap D(\mathbb{R}^K) \subseteq D(\mathcal{U}_1^\perp)$ und insgesamt

$$D(\mathcal{U}_1^\perp) = [S_0]^\perp \cap D(\mathbb{R}^K).$$

d) $\ker D = \mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{U}_1^\perp$: Nach 5) und 6b) gilt $\ker D \subseteq \mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{U}_1^\perp$. Die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ ergibt sich aus 8a) $D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0]$ und 6c) $D(\mathcal{U}_1^\perp) \subseteq [S_0]^\perp$, da daraus $D(\mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{U}_1^\perp) \subseteq D(\mathcal{M}_1^\perp) \cap D(\mathcal{U}_1^\perp) \subseteq [S_0] \cap [S_0]^\perp = O$ und somit $\mathcal{M}_1^\perp \cap \mathcal{U}_1^\perp \subseteq \ker D$ folgt.

7) $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$:

Aus der Darstellung $\mathbb{R}^N = [S_0] \oplus [S_0]^\perp$ folgen die Inklusionen

$$D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \subseteq D^\mathsf{T}([S_0]) + D^\mathsf{T}([S_0]^\perp) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1 \subseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N),$$

also $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$.

8) $\mathcal{M}_1^\perp = D^{-1}([S_0])$, $D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0]$, $S_0 \notin D(\mathcal{M}_1)$, $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus D(\mathcal{M}_1^\perp)$ und $D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K)$:

a) $\mathcal{M}_1^\perp = D^{-1}([S_0])$, $D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0]$: Es ist $Y_1 \in \mathcal{M}_1^\perp$ genau dann, wenn für beliebiges $g_1 \in [S_0]^\perp$ bzw. $D^\mathsf{T}g_1 \in D^\mathsf{T}([S_0]^\perp) = \mathcal{M}_1$ die Gleichung

$$(DY_1)^\mathsf{T}g_1 = Y_1^\mathsf{T}D^\mathsf{T}g_1 = 0,$$

erfüllt ist, also $Y_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $DY_1 \perp [S_0]^\perp$ bzw. $DY_1 \in [S_0]^{\perp\perp} = [S_0]$ gilt. Damit ist

$$\mathcal{M}_1^\perp = D^{-1}([S_0]),$$
$$D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0]$$

und $\dim D(\mathcal{M}_1^\perp) \leq 1$.

b) $S_0 \notin D(\mathcal{M}_1)$ bzw. $[S_0] \cap D(\mathcal{M}_1) = O$: Für jedes $h_1 \in D(\mathcal{M}_1) \cap [S_0]$ ist $h_1 = DZ_1$ mit $Z_1 = D^\mathsf{T}g_1 \in \mathcal{M}_1 = D^\mathsf{T}(\ker S_0^\mathsf{T})$, $g_1 \in [S_0]^\perp$,

$$0 = h_1^\mathsf{T}g_1 = (DZ_1)^\mathsf{T}g_1 = Z_1^\mathsf{T}D^\mathsf{T}g_1 = Z_1^\mathsf{T}Z_1,$$

also $Z_1 = 0$ und $h_1 = DZ_1 = 0$. Demnach ist $D(\mathcal{M}_1) \cap [S_0] = O$ und $S_0 \notin D(\mathcal{M}_1)$.

c) $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus D(\mathcal{M}_1^\perp)$: Aus $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp = \mathbb{R}^K$ folgt $D(\mathbb{R}^K) \subseteq D(\mathcal{M}_1) + D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq D(\mathbb{R}^K)$, aus 8a) und 8b) folgt $D(\mathcal{M}_1) \cap D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq D(\mathcal{M}_1) \cap [S_0] = O$, also insgesamt

$$D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus D(\mathcal{M}_1^\perp).$$

d) $D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K)$: Nach 8a) $D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0]$ gilt $D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K)$. Es ist also nur noch die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ zu zeigen. Dazu werden zwei Fälle unterschieden:

Im Fall i) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ bzw. $[S_0] \subseteq D(\mathbb{R}^K)$ ist $[S_0] \cap D(\mathbb{R}^K) = [S_0]$. Weiter hat man wegen $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus D(\mathcal{M}_1^\perp)$ für S_0 die Darstellung

$$S_0 = h_1 + g_1 \text{ mit } h_1 \in D(\mathcal{M}_1) \text{ und } g_1 \in D(\mathcal{M}_1^\perp).$$

Nach 8a) $D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0]$ ist $g_1 = \lambda S_0$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, somit nach 8b) $h_1 = S_0 - g_1 = (1 - \lambda)S_0 \in [S_0] \cap D(\mathcal{M}_1) = O$, $h_1 = 0$, $S_0 = g_1 \in D(\mathcal{M}_1^\perp)$ und $[S_0] \subseteq D(\mathcal{M}_1^\perp)$. Daraus ergibt sich auch die Inklusion $[S_0] \cap D(\mathbb{R}^K) = [S_0] \subseteq D(\mathcal{M}_1^\perp)$ und insgesamt

$$D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K) = [S_0].$$

In diesem Fall ist dann noch $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus [S_0]$, also $D(\mathcal{M}_1)$ eine Hyperebene des D-Bildes $D(\mathbb{R}^K)$.

Im Fall ii) $S_0 \notin D(\mathbb{R}^K)$ gilt die Inklusion $[S_0] \cap D(\mathbb{R}^K) = O \subseteq D(\mathcal{M}_1^\perp)$, also insgesamt

$$D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K) = O.$$

In diesem Fall gilt dann noch $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1)$, so dass $D(\mathcal{M}_1)$ mit dem gesamten D-Bild $D(\mathbb{R}^K)$ übereinstimmt.

Anzumerken ist hier noch, dass gemäß den obigen Beweisteilen 4) und 3) der Fall i) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ die Gültigkeit des LOP und der Fall ii) $S_0 \notin D(\mathbb{R}^K)$ die Ungültigkeit des LOP bedeutet. Damit erhält man schon die in 9) nachfolgende Charakterisierung des LOP.

9) a) LOP gültig $\Leftrightarrow D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0] \Leftrightarrow D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus [S_0]$.
b) LOP ungültig $\Leftrightarrow D(\mathcal{M}_1^\perp) = O \Leftrightarrow D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1)$.

Der Beweis dieser Aussagen ergibt sich aus der Fallunterscheidung in 8d) und mit 8c).

10) „$(\text{LOPD}^\mathsf{T}) \Leftrightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$“:

„$\Rightarrow$“: Für diese Beweisrichtung wird verwendet, dass nach 4) das (LOPD^T) äquivalent zur Inklusion $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$ ist. Für jedes $Z_1 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1$ gibt es die beiden Darstellungen $Z_1 = \lambda D^\mathsf{T} S_0$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $Z_1 = D^\mathsf{T} g_1$ mit $g_1 \in [S_0]^\perp$. Daraus folgt

$$D^\mathsf{T}(\lambda S_0 - g_1) = Z_1 - Z_1 = 0,$$

$\lambda S_0 - g_1 \in \ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$ und schließlich $0 = S_0^\mathsf{T}(\lambda S_0 - g_1) = \lambda S_0^\mathsf{T} S_0$. Wegen

$$S_0 \neq 0 = (0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$$

(dies folgt aus der weiteren unten noch benötigten mathematisch-technischen Voraussetzung $U_1 := D^\mathsf{T} S_0 \neq 0$) ergibt sich hieraus $\lambda = 0$, $Z_1 = 0$ und $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$.

„$\Leftarrow$“: Für diese Beweisrichtung wird verwendet, dass $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ äquivalent ist zur Aussage, dass es für jedes $X_1 \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$ genau eine additive Zerlegung $X_1 = Y_1 + Z_1$ mit $Y_1 \in \mathcal{U}_1$, $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ gibt. Diese Aussage gilt allgemein für die Summe zweier Unterräume eines Vektorraums mit trivialem Durchschnitt. Eine derartige Summe wird dann direkte Summe der Unterräume genannt. Es sei $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ und h_1 eine beliebige Duplikationsstrategie von X_1. Für $h_1 \in \mathbb{R}^N = [S_0] \oplus [S_0]^\perp$ hat man die Darstellung $h_1 = \lambda S_0 + g_1$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $g_1 \in [S_0]^\perp$ und damit für X_1 die Darstellung

$$X_1 = D^\mathsf{T} h_1 = \lambda D^\mathsf{T} S_0 + D^\mathsf{T} g_1 = Y_1 + Z_1 \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$$

mit $Y_1 = \lambda U_1 \in \mathcal{U}_1$, $Z_1 = D^\mathsf{T} g_1 \in D^\mathsf{T}([S_0]^\perp) = \mathcal{M}_1$. Aufgrund der Einzigkeit dieser additiven Zerlegung von X_1 und wegen der mathematisch-technischen Voraussetzung

$$U_1 := D^\mathsf{T} S_0 \neq 0 = (0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^K$$

($S_0 \notin \ker D^\mathsf{T}$ bzw. $S_1^\delta(\omega_k)^\mathsf{T} S_0 \neq 0$ für mindestens einen Index $k \in \{1,\ldots,K\}$) ist $\lambda = \lambda(X_1)$ durch X_1 eindeutig bestimmt. Demnach ist auch der Wert

$$S_0^\mathsf{T} h_1 = \lambda S_0^\mathsf{T} S_0 + S_0^\mathsf{T} g_1 = \lambda S_0^\mathsf{T} S_0$$

durch X_1 für alle Duplikationsstrategien h_1 von X_1 eindeutig bestimmt. Es gilt also (LOPD^T).

11) „$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O \Leftrightarrow \mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \mathcal{M}_1^\perp \not\subseteq \mathcal{U}_1^\perp$“:

a) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ bedeutet wegen $U_1 \neq 0$, dass $\lambda U_1 \in \mathcal{M}_1$ nur für $\lambda = 0$ gilt bzw. dass $\lambda U_1 \notin \mathcal{M}_1$ für alle $\lambda \neq 0$ gilt. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass es ein $\lambda_1 \neq 0$ mit $\lambda_1 U_1 \notin \mathcal{M}_1$ gibt, dass also $\mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1$ gilt.

b) Aus $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$ folgt $\mathcal{U}_1^\perp \supseteq \mathcal{M}_1^\perp$ und umgekehrt aus $\mathcal{U}_1^\perp \supseteq \mathcal{M}_1^\perp$ auch $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}_1^{\perp\perp} = \mathcal{M}_1$. Damit ist auch die Relation $\mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1$ äquivalent zu

$$\mathcal{M}_1^\perp \not\subseteq \mathcal{U}_1^\perp.$$

12) „$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O \Leftrightarrow \mathcal{M}_1$ ist eine Hyperebene von $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$“:

Mit dem Dimensionssatz

$$\dim(\mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1) + \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1) = \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{M}_1,$$

für endlichdimensionale Unterräume $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{M}_1$ eines Vektorraums erhält man hier für $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$ und $\dim \mathcal{U}_1 = 1$ ($U_1 = D^\mathsf{T} S_0 \neq 0$) die Dimensionsgleichung

$$\dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) + \dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1) = 1 + \dim \mathcal{M}_1.$$

Demnach ist $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ äquivalent zu $\dim \mathcal{M}_1 = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - 1$, also wegen 5) $\mathcal{M}_1 \subseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ zur Hyperebenenstruktur von $\mathcal{M}_1$ in $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$. In diesem Fall ist $U_1 = D^\mathsf{T} S_0 \notin \mathcal{M}_1$ und $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{M}_1$.

Im Fall $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 \neq O$ dagegen gelten nach 11) die Inklusionen $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1^\perp \subseteq \mathcal{U}_1^\perp$ und die Übereinstimmung $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{M}_1$.

13) „$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O \Leftrightarrow \ker D$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}_1^\perp \Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in (\mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D \subseteq) \mathbb{R}^K$ mit $\mathcal{M}_1^\perp = \ker D \oplus [\Psi_1]$“:

a) Für die direkten Summen $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp = \mathbb{R}^K$ und $\ker D \oplus D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$ erhält man mit dem oben angegebenen Dimensionssatz die Dimensionsgleichungen

$$\dim \mathbb{R}^K = \dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{M}_1^\perp,$$
$$\dim \mathbb{R}^K = \dim \ker D + \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$$

und zusammen mit der in 12) angegebenen Dimensionsgleichung

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}_1^\perp &= \dim \mathbb{R}^K - \dim \mathcal{M}_1 \\ &= \dim \ker D + \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - \dim \mathcal{M}_1 \\ &= \dim \ker D + 1 - \dim (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1).\end{aligned}$$

Daher ist $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ auch äquivalent zur Dimensionsgleichung $\dim \ker D = \dim \mathcal{M}_1^\perp - 1$, also wegen 5) $\ker D \subseteq \mathcal{M}_1^\perp$ zur Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$.

b) Die Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$ ist wiederum äquivalent dazu, dass ein Vektor $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ existiert, mit dem $\mathcal{M}_1^\perp$ die direkte Summe von $\ker D$ und dem eindimensionalen Unterraum $[\Psi_1] := \operatorname{lin} \Psi_1$ ist:

$$\mathcal{M}_1^\perp = \ker D \oplus [\Psi_1] \text{ mit einem } \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D.$$

Aus der Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$ folgt nämlich schon mit einem einzigen $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ für die Unterraumsumme $\ker D \oplus [\Psi_1]$ mittels der Dimensionsgleichung die Übereinstimmung mit $\mathcal{M}_1^\perp$. Umgekehrt folgt aus der Darstellung von $\mathcal{M}_1^\perp$ durch diese direkte Summe mittels der Dimensionsgleichung auch die Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$.

14) „$S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ bzw. $\exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$
$\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$
$\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ mit $D\vartheta_1 = S_0$
$\Leftrightarrow \exists\, \vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$“:

a) „$\Rightarrow$“: Falls ein $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ existiert, gilt nach 8a) $\Psi_1 \in D^{-1}([S_0]) = \mathcal{M}_1^\perp$. Da $S_0 \neq 0$ ist, gilt noch $\Psi_1 \notin \ker D$ und insgesamt $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$.

„$\Leftarrow$“: Für ein $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ gilt nach 8a) $D\Psi_1 = \mu S_0$ mit einem reellen $\mu \neq 0$. Daher ist $S_0 = D\Psi_1/\mu = D\Psi_1'$ mit $\Psi_1' = \Psi_1/\mu \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$. Ohne Einschränkung kann also $\mu = 1$ und $D\Psi_1 = S_0$ angenommen werden.

Im Gegensatz zu der in Kapitel 1 und zu Beginn von Abschnitt 2.2 dargestellten höherdimensionalen Charakterisierung des LOP durch die Existenz eines $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^\mathsf{T} \in (L^\mathsf{T})^{-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ $(\subseteq \mathbb{R}^{1+K})$ mit der Normierung $\Psi_0 = 1$ tritt hier bei der niedrigerdimensionalen Charakterisierung des LOP durch die Existenz eines $\Psi_1 \in D^{-1}([S_0]) \setminus \ker D = \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ keine entsprechende Normierung der ersten Komponente mehr auf.

b) Ein zweiter Beweis für die Aussage 14) verläuft mittels 16), 17) und 18).

c) Falls es ein $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ gibt, erhält man wegen der orthogonalen Zerlegung $\mathbb{R}^K = D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \oplus \ker D$ von $\mathbb{R}^K$ für Ψ_1 die Zerlegung

$$\Psi_1 = \vartheta_1 + Y_1 \text{ mit } \vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N),\ Y_1 \in \ker D$$

und für das zugehörige D-Bild die Gleichung

$$S_0 = D\Psi_1 = D\vartheta_1 + DY_1 = D\vartheta_1.$$

Somit ist S_0 auch das D-Bild eines $\vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$. Dieses D-Urbild ϑ von S_0 in $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ ist eindeutig bestimmt: Für zwei D-Urbilder ϑ_1, $\vartheta_1' \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ von S_0 und deren Differenz $\Delta := \vartheta_1 - \vartheta_1' \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ gilt nämlich

$$D(\Delta) = D(\vartheta') - D(\vartheta) = S_0 - S_0 = 0,$$

also $\Delta \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \cap \ker D = O$ und $\vartheta_1 = \vartheta_1'$.

Umgekehrt ist ein D-Urbild $\vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ $(\subseteq \mathbb{R}^K)$ von S_0 auch ein in $\mathbb{R}^K$ liegendes D-Urbild Ψ_1.

Für dieses eindeutig bestimmte D-Urbild $\vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ $(\subseteq \mathbb{R}^K)$ von S_0 gilt wie für die anderen D-Urbilder von $S_0 \neq 0$ in $\mathbb{R}^K$ nach 14a) auch $\vartheta_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$, also insgesamt

$$\vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D.$$

Ein beliebiges $\vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ liefert aber im Allgemeinen als D-Bild nur $D\vartheta_1 = \mu S_0$ (mit $\mu \neq 0$) und erst nach einer Normierung (Übergang von ϑ_1 zu ϑ_1/μ) das D-Bild S_0.

Bei der entsprechenden Charakterisierung der Arbitragefreiheit durch die Existenz eines *positiven* $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ kann aber im Allgemeinen nicht die Positivität des eindeutig bestimmten D-Urbild $\vartheta_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ von S_0 geschlossen werden.

e) Anzumerken ist hier noch, dass die Bedingung $\mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D \neq \emptyset$ nach 14a) zunächst äquivalent ist zur Inzidenz $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$, dann aber auch nach 4) zu (LOPD$^\mathsf{T}$), nach 3) zu (LOP), nach 10) zu $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ und nach 13) zu $\mathcal{M}_1^\perp = \ker D \oplus [\Psi_1]$ mit $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$, also auch zur Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$.

15) „$\exists\, \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D \Leftrightarrow D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0] \Leftrightarrow D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus [S_0]$“:

a) Da nach 6a) $D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0]$ gilt, ist die Übereinstimmung $D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0]$ gleichbedeutend zur Existenz eines $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp$ mit $D\Psi_1 \neq 0$: „$\Rightarrow$“: Mit einem derartigen Ψ_1 ist nämlich $O \neq [D\Psi_1] \subseteq D(\mathcal{M}_1^\perp) \subseteq [S_0]$, $1 = \dim [D\Psi_1] \leq \dim D(\mathcal{M}_1^\perp) \leq \dim [S_0] = 1$, also $D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0]$. „$\Leftarrow$“: Umgekehrt folgt aus der Übereinstimmung der

Unterräume die Existenz eines $h_1 = D\Psi_1 \in D(\mathcal{M}_1^\perp) \setminus O$ und somit die Existenz eines $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$.

Ein zweiter Beweis von 15a) ergibt sich dadurch, dass die Existenz eines derartigen Ψ_1 äquivalent ist nach 14) zu $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$, nach 4) und 3) dann zum LOP und nach 8a) schließlich zu $D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0]$.

b) Die Äquivalenz „$D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0] \Leftrightarrow D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus [S_0]$“ wurde schon in 8a) bewiesen.

16) „$S_0 \in D(\mathbb{R}^K) \Leftrightarrow$ (PGΨ1): $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} h_1 = S_0^\mathsf{T} h_1 \quad \forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N$“:

„⇒“: Aus der der Existenz eines $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ folgt das Gleichungssystem (PGΨ1) der Preisgleichungen für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 = D^\mathsf{T} h_1$ ($h_1 \in \mathbb{R}^N$): $\Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} h_1 = (D\Psi_1)^\mathsf{T} h_1 = S_0^\mathsf{T} h_1$.

„⇐“: Umgekehrt folgt aus der Existenz eines $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$, für welches die Preisgleichungen (PGΨ1) erfüllt sind, zunächst die Bedingung $(D\Psi_1 - S_0)^\mathsf{T} h_1 = 0 \ \ \forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N$ und wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts (indem man $h_1 = D\Psi_1 - S_0$ einsetzt) dann die Existenz eines $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 - S_0 = 0$ bzw. $D\Psi_1 = S_0$.

17) „(PGΨ1) ⇔ (KPGΨ1): $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} g_1 = 0 \ \ \forall\ g_1 \in [S_0]^\perp$“:

„⇒“: Aus (PGΨ1) folgt speziell für $h_1 = S_0 \neq 0$ die Ungleichung $\Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} S_0 = S_0^\mathsf{T} S_0 > 0$ und somit $D\Psi_1 \neq 0$ bzw. $\Psi_1 \notin \ker D$. Weiter erhält man aus (PGΨ1) speziell für die $h_1 = g_1 \in [S_0]^\perp$ die Preisgleichungen für die NE-Zahlungsprofile $Z = D^\mathsf{T} g_1 \in \mathcal{M}_1 = D^\mathsf{T}([S_0]^\perp)$ mit dem Preis $\pi_1(Z_1) = S_0^\mathsf{T} g_1 = 0$, also die Aussage (KPGΨ1).

„⇐“: Aus (KPGΨ1) folgt mit dem vorgegebenen $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ für alle $Z_1 = D^\mathsf{T} g_1 \in \mathcal{M}_1$, $g_1 \in [S_0]^\perp$, die Gleichung $\Psi_1^\mathsf{T} Z_1 = \Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} g_1 = 0$ und somit die Inzidenz $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$. Weiter ist dann $D\Psi_1 \in [S_0]^{\perp\perp} = [S_0]$ und $D\Psi_1 \neq 0$, o. E. $D\Psi_1 = S_0$ bzw. $\Psi_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} = S_0^\mathsf{T}$, woraus die Gültigkeit von (PGΨ1) folgt.

18) „(KPGΨ1) ⇔ $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1^\mathsf{T} Z_1 = 0\ \forall\ Z_1 \in \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D \neq \emptyset$“:

Die Bedingung (KPGΨ1) ist gleichbedeutend zur Existenz eines $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1^\mathsf{T} Z_1 = 0\ \forall\ Z_1 = D^\mathsf{T} g_1 \in \mathcal{M}_1$, $g_1 \in [S_0]^\perp$, also zur Existenz eines $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$.

19) „(VS) ∧ LOP ⇔ $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp$ mit $\dim \mathcal{M}_1^\perp = 1$“:

„⇒“: Aus der Vollständigkeit (VS) des Marktmodells folgt $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp$ und aus dem LOP mit 12) ($\mathcal{M}_1$ Hyperebene von $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$) und dem Dimensionssatz

$$\dim \mathcal{M}_1^\perp = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - \dim \mathcal{M}_1 = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - (\dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - 1) = 1.$$

„⇐“: Aus $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp = \mathbb{R}^K \wedge \dim \mathcal{M}_1^\perp = 1$ folgt unmittelbar die Vollständigkeit, mit dem Dimensionssatz

$$\dim \mathcal{M}_1 = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - \dim \mathcal{M}_1^\perp = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - 1,$$

also die Hyperebenenstruktur von $\mathcal{M}_1$ in $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$, und nach 12) das LOP.

20) „(VS) ∧ $N = K$ ⇔ D^T isomorph ⇔ D isomorph“:

a) „⇒“: Die Vollständigkeit (VS) bedeutet die Surjektivität der Abbildung D^T, also $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$ und $\dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = K$. Aus der Dimensionsgleichung $\dim \mathbb{R}^N = N = K = \dim \mathbb{R}^K$ folgt mit dem Dimensionssatz für die lineare Abbildung D^T

$$\dim \ker D^\mathsf{T} = \dim \mathbb{R}^N - \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = N - K = 0,$$

$\ker D^\mathsf{T} = O$ und somit auch die Injektivität von D^T. Insgesamt ist dann D^T ein Isomorphismus, d. h. eine bijektive lineare Abbildung.

„⇐“: Falls D^T ein Isomorphismus ist, bedeutet die Surjektivität von D^T die Vollständigkeit des Marktmodells und die Injektivität von D^T zunächst $\ker D^\mathsf{T} = O$ und mit dem Dimensionssatz für eine lineare Abbildung dann

$$K = \dim \mathbb{R}^K = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \dim \mathbb{R}^N - \dim \ker D^\mathsf{T} = N - 0 = N.$$

b) Aus den oben angegebenen direkten Zerlegungen der Vektorräume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ in orthogonale Komplemente folgt, dass D^T genau dann injektiv ist ($\ker D^\mathsf{T} = O$), wenn D surjektiv ist ($D(\mathbb{R}^K) = \mathbb{R}^N$) und analog dass D genau dann injektiv ist, wenn D^T surjektiv ist. Insgesamt ist die lineare Abbildung D^T genau dann bijektiv (isomorph), wenn D bijektiv ist. □

2.3 Die Charakterisierungen der Arbitragefreiheit

2.3.1 Der Fundamentalsatz der Preistheorie

Im zeitdiskreten Mehrperiodenmodell besagt der **Fundamentalsatz der Preistheorie**[13], dass die Arbitragefreiheit

(AF) $\qquad \mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\underset{\cdot}{>}0} = \emptyset$

des Marktmodells äquivalent ist zur Existenz eines stochastischen Prozesses

$$\Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0}\,,$$

eines sogenannten **Zustands(preis)prozesses**[14] des Marktmodells. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem **Alternativsatz**[15] über die Disjunktheit des linearen Unterraums $\mathcal{M}$ von $\mathcal{W}$ zum schwach positiven (punktierten nichtnegativen) Orthanten $\mathcal{W}_{\underset{\cdot}{>}0} = \{X \in \mathcal{W} : X \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0$, d. h. $X \geq 0$ und $X \neq 0\}$, der dem Alternativsatz von Stiemke über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen entspricht.

Im Einperiodenmodell ist die Arbitragefreiheit (AF) folgendermaßen definiert und charakterisiert:

(AF) $:\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{\underset{\cdot}{>}0} = \emptyset$

$\Leftrightarrow \nexists\, h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0 \ \wedge\ Lh = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0$

$\Leftrightarrow \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $L' h_1 = \begin{pmatrix} -S_0^{\mathsf{T}} h_1 \\ D^{\mathsf{T}} h_1 \end{pmatrix} \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0$

$\Leftrightarrow$ [AF0: $\nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N$: $S_0^{\mathsf{T}} h_1 < 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 \geq 0$] $\wedge$ [AF1: $\nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N$: $S_0^{\mathsf{T}} h_1 \leq 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0$]

$\Leftrightarrow$ [AF0: $\nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N$: $S_0^{\mathsf{T}} h_1 < 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 \geq 0$] $\wedge$ [AF1.0: $\nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N$: $S_0^{\mathsf{T}} h_1 = 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0$]

$\Leftrightarrow$ [AF0.0: $\nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N$: $S_0^{\mathsf{T}} h_1 < 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 = 0$] $\wedge$ [AF1: $\nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N$: $S_0^{\mathsf{T}} h_1 \leq 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0$].

Geometrisch bedeutet die Arbitragefreiheit (AF), dass in $\mathbb{R}^N$ bestimmte verallgemeinerte polyedrische Kegel leer sind. Beispielsweise ist für (AF0) $\{S_0^{\mathsf{T}} h_1 < 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 \geq 0\} = \emptyset$ und für (AF1) $\{S_0^{\mathsf{T}} h_1 \leq 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0\} = \emptyset$.[16] Weiter kann die Arbitragefreiheit (AF) geometrisch durch die Lage der S_0^{T}-Bilder von $\{D^{\mathsf{T}} h_1 \geq 0\}$, $\{D^{\mathsf{T}} h_1 \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0\}$ und $\{D^{\mathsf{T}} h_1 = 0\} = \ker D^{\mathsf{T}}$ zur negativen bzw. nichtpositiven Halbachse in $\mathbb{R}$ und durch die Lage der D^{T}-Bilder von $\{S_0^{\mathsf{T}} h_1 < 0\}$, $\{S_0^{\mathsf{T}} h_1 \leq 0\}$ und $\{S_0^{\mathsf{T}} h_1 = 0\} = \ker S_0^{\mathsf{T}}$ bezüglich des nichtnegativen bzw. schwach positiven Orthanten und des Nullpunkts O in $\mathbb{R}^K$ beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\text{(AF)} &\Leftrightarrow \text{(AF0)}\ S_0^{\mathsf{T}}(\{D^{\mathsf{T}} h_1 \geq 0\}) \cap \mathbb{R}_{<0} = \varnothing &&\wedge \text{(AF1)}\ S_0^{\mathsf{T}}(\{D^{\mathsf{T}} h_1 \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0\}) \cap \mathbb{R}_{\leq 0} = \varnothing \\
&\Leftrightarrow \text{(AF0)}\ S_0^{\mathsf{T}}(\{D^{\mathsf{T}} h_1 = 0\}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} &&\wedge \text{(AF1)}\ S_0^{\mathsf{T}}(\{D^{\mathsf{T}} h_1 \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0\}) \subseteq \mathbb{R}_{>0}\,; \\
\text{(AF)} &\Leftrightarrow \text{(AF0)}\ D^{\mathsf{T}}(\{S_0^{\mathsf{T}} h_1 < 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\geq 0} = \varnothing &&\wedge \text{(AF1)}\ D^{\mathsf{T}}(\{S_0^{\mathsf{T}} h_1 \leq 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\underset{\cdot}{>}0} = \varnothing
\end{aligned}$$

---

13 Kremer (2011) behandelt den Fundamentsatz der Preistheorie für das Einperiodenmodell auf S. 40 und für das Mehrperiodenmodell auf S. 175, 176.

14 Diese Bezeichnung findet man bei Kremer (2011), S. 41, 175, 177.

15 Der Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel ist formuliert bei Pleier (2021) im mathematischen Anhang auf S. 387f. und auf der Website www.pleier-r.de.

16 Es wird hier eine Kurzschreibweise für Mengen verwendet. Z. B. ist $\{D^{\mathsf{T}} h_1 \geq 0\} := \{h_1 \in \mathbb{R}^N : D^{\mathsf{T}} h_1 \geq 0\}$ ein abgeschlossener polyedrischer Kegel und $H^{\leq}_{S_0,0} := \{S_0^{\mathsf{T}} h_1 \leq 0\} := \{h_1 \in \mathbb{R}^N : S_0^{\mathsf{T}} h_1 \leq 0\}$ ein abgeschlossener Halbraum. Weiter gilt $\{D^{\mathsf{T}} h_1 \mathrel{\underset{\cdot}{>}} 0\} = \{D^{\mathsf{T}} h_1 \geq 0\} \setminus \ker D^{\mathsf{T}}$ und $H^{<}_{S_0,0} := \{S_0^{\mathsf{T}} h_1 < 0\} := \{S_0^{\mathsf{T}} h_1 \leq 0\} \setminus \ker S_0^{\mathsf{T}}$.

$$\Leftrightarrow \text{(AF0.0)}\ D^{\mathsf{T}}(\{S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 < 0\}) \cap O = \varnothing \ \wedge \text{(AF1)}\ D^{\mathsf{T}}(\{S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 \leq 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow \text{(AF0)}\ D^{\mathsf{T}}(\{S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 < 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\geq 0} = \varnothing \ \wedge \text{(AF1.0)}\ D^{\mathsf{T}}(\{S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 = 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \varnothing.$$

Die Arbitragefreiheit (AF) bedeutet, dass es in $\mathbb{R}^{1+K}$ kein Kapitalmarktgeschäft $Z = (Z_0,Z_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M} = L'(\mathbb{R}^N)$ gibt, das schwach positiv ist ($Z \gneq 0$). Sie kann aber in $\mathbb{R}^K$ nicht allein durch die spezielle Arbitragefreiheit (AF1.0) charakterisiert werden, nach der es kein schwach positives NE-Zahlungsprofil $Z_1 \in \mathcal{M}_1 = D^{\mathsf{T}}([S_0]^{\perp}) = D^{\mathsf{T}}(\{S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 = 0\})$ gibt. Vielmehr muss im Allgemeinen in $\mathbb{R}^K$ auch noch die spezielle Arbitragefreiheit (AF0) erfüllt sein, nach der auch kein nichtnegatives duplizierbares Zahlungsprofil $X_1 = D^{\mathsf{T}}h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ existiert, für dessen Duplikationsstrategie h_1 der Wert $R_0(h) = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$ negativ ist. Im nachfolgenden Abschnitt 2.3.2 wird aber eine Zusatzvoraussetzung an das Marktmodell angegeben, unter der die spezielle Arbitragefreiheit (AF1.0) äquivalent ist zur allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) (also inklusive (AF0)). Eine grafische Darstellung der Unterraumstrukturen in $\mathbb{R}^{2N}$ bzw. $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ bzw. $\mathbb{R}^K$ für ein arbitragefreies Marktmodell wird in den Abbildungen 1a, 2a, 3a, 4a und 5a gegeben.

Im Einperiodenmodell ist nach dem Fundamentalsatz der Preistheorie die Arbitragefreiheit (AF) äquivalent zur Existenz eines Zustandspreisprozesses, d. h. eines positiven Prozesses $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp} = \ker L'^{\mathsf{T}}$, also eines Prozesses $\Phi = (\Phi_0,\Phi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit

$$L'^{\mathsf{T}}\Phi = 0 \ \wedge \ \Phi > 0$$

bzw.

$$D\Phi_1 = S_0\Phi_0 \ \wedge \ \Phi_1 > 0,\ \Phi_0 > 0.$$

Die Arbitragefreiheit (AF) bedeutet also die Existenz eines positiven Vektors $\Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Phi_1 = \lambda S_0$ und $\lambda = \lambda(\Phi_1) = \Phi_0 > 0$. Das D-Bild $D\Phi_1$ von Φ_1 ist hier ein *positives* Vielfaches von S_0. Ohne Einschränkung (ggf. durch Übergang von Φ zu Φ/Φ_0) kann Φ als ein mit $\Phi_0 = 1$ **normierter Zustandspreisprozess** (**Diskontierungsprozess**) gewählt werden. Die Arbitragefreiheit ist also auch äquivalent zur Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$, d. h.

$$\Phi = (1,\Phi_1)^{\mathsf{T}} > 0 \ \wedge \ L'^{\mathsf{T}}\Phi = 0,$$

bzw. zur Existenz eines sogenannten **Diskontvektors** (**Zustands(preis)vektors**[17]**)** $\Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit den Eigenschaften

$$\Phi_1 > 0 \ \wedge \ D\Phi_1 = S_0.$$

In diesem Fall ist also der zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörige deterministische Preisvektor S_0, der in der Nutzenfunktion $S_0{}^{\mathsf{T}}$ den Bewertungsvektor für die Portfoliovektoren h_1 darstellt, eine Positivkombination (positive Linearkombination) der Spalten $S_1^{\delta}(\omega_k)$ von D, also der zum Zeitpunkt $t = 1$ und zu den verschiedenen möglichen Zuständen $\omega_k \in \Omega$ gehörigen Kursen des Preisvektors S.

Da der normierte Zustandspreisprozess Φ ein positiver Bewertungsprozess Ψ für die Zahlungsprofile $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$,

$$\Psi \in \mathcal{M}^{\perp} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \text{ und } \Psi > 0,$$

bzw. der Zustandspreisvektor Φ_1 ein positiver Bewertungsvektor Ψ_1 für die $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$,

$$\Psi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } D\Psi_1 = S_0 \text{ und } \Psi_1 > 0,$$

ist, stellt ein arbitragefreies Einperiodenmodell also ein Marktmodell dar, in dem das LOP gilt und zusätzlich der Bewertungsprozess Φ bzw. der Bewertungsvektor Φ_1 positiv gewählt werden kann. Damit erhält man aus den oben hergeleiteten Charakterisierungen des LOP mittels des Bewertungsvektors Ψ_1 auch Charakterisierungen der Arbitragefreiheit, wenn man noch die Bedingung $\Psi_1 = \Phi_1 > 0$ hinzunimmt. Diese Charakterisierungen sind in Tabelle 2 aufgeführt. Beispielsweise ist ein arbitragefreies Einperiodenmodell dadurch charakterisiert, dass es einen posi-

[17] Man findet die Bezeichnung Zustands(preis)vektor bei Kremer (2011), S. 36, 45, die Bezeichnung normierter Zustands(preis)prozess auf S. 177, die Bezeichnung Diskontvektor bei Kremer (2017), S. 26, und die Bezeichnung Diskontierungsprozess bei Kremer (2017), S. 55.

tiven Vektor $\Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ gibt, mit dem die Preisgleichungen für alle duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ gelten:

(PGΦ1) $\quad \exists\ \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Phi_1 > 0$ und $\Phi_1{}^\mathsf{T} D^\mathsf{T} h_1 = S_0{}^\mathsf{T} h_1\ \forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N$.

Weiter wird die Arbitragefreiheit im Einperiodenmodell dadurch charakterisiert, dass es einen positiven Vektor $\Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ gibt, mit dem $\mathcal{M}_1{}^\perp$ die direkte Summe von ker D und dem eindimensionalen Unterraum lin Φ_1 ist:

$$\mathcal{M}_1{}^\perp = \ker D \oplus \operatorname{lin} \Phi_1.$$

Für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{M}_1$ hat man die Darstellung

$$X_1 = \lambda U_1 + Z_1$$

mit eindeutig bestimmten Beurteilungsparameter $\lambda \in \mathbb{R}$, NE-Zahlungsprofil $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ und dem Preis

$$\pi_1(X_1) = \Phi_1{}^\mathsf{T} X_1 = \lambda \Phi_1{}^\mathsf{T} U_1 + \Phi_1{}^\mathsf{T} Z_1 = \lambda \pi_1(U_1).$$

Das gleichzeitige Auftreten der **Arbitragefreiheit (AF) und Vollständigkeit (VS)** ist äquivalent dazu, dass S_0 genau ein D-Urbild Φ_1 besitzt und dieses Urbild Φ_1 positiv ist:

$$(\text{AF}) \wedge (\text{VS}) \Leftrightarrow [\exists_1\ \Phi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } D\Phi_1 = S_0] \wedge \Phi_1 > 0.$$

In diesem Fall (AF) ∧ (VS) ist dann

$$D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1{}^\perp \text{ mit } \mathcal{M}_1{}^\perp = [\Phi_1],\ \Phi_1 > 0.$$

2.3.2 Eine hinreichende Bedingung für die Äquivalenz der allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) zur speziellen Arbitragefreiheit (AF1.0)

Es wird nun ein Marktmodell betrachtet, für welches die Bedingung (AF1.0) der speziellen Arbitragefreiheit erfüllt ist. Es soll untersucht werden, ob unter einer Zusatzvoraussetzung dann auch die zweite Bedingung (AF0) für die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) = (AF0) ∧ (AF1.0) gesichert werden kann.

Die spezielle Arbitragefreiheit

(AF1.0) $\quad \mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R}^K_{\gtrdot 0} = \emptyset$

ist nach dem Alternativsatz über die Disjunktheit des linearen Unterraums $\mathcal{M}_1$ von $\mathbb{R}^K$ zum schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^K_{\gtrdot 0}$ äquivalent zur Existenz eines positiven Vektors $\Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp = D^{-1}([S_0])$ (zur Darstellung von $\mathcal{M}_1{}^\perp$ als Urbildmenge siehe Beweisteil 8a), also eines positiven Urbildes in der D-Urbildmenge von $[S_0]$:

$$\begin{aligned}
(\text{AF1.0}) \quad &\Leftrightarrow \exists\ \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp \cap \mathbb{R}^K_{>0} \\
&\Leftrightarrow \exists\ \Phi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } \Phi_1 > 0 \text{ und } D\Phi_1 = \lambda S_0,\ \lambda = \lambda(\Phi_1) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \exists\ Y = (\lambda, \Phi_1)^\mathsf{T} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R},\ \Phi_1 > 0 \text{ und } L'^\mathsf{T} Y = (-S_0, D)Y = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists\ Y = (\lambda, \Phi_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}^\perp = \ker L'^\mathsf{T} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \Phi_1 \in \mathbb{R}^K_{>0}.
\end{aligned}$$

Für beliebige Portfoliovektoren $h_1 \in \mathbb{R}^N$ bzw. für beliebige duplizierbare Zahlungsprofile $X_1 = D^\mathsf{T} h_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ gilt dann die Gleichung

(PGΦ1λ) $\quad \lambda S_0{}^\mathsf{T} h_1 = \Phi_1{}^\mathsf{T} D^\mathsf{T} h_1$.

Über das Vorzeichen des zu Φ_1 gehörigen Parameters $\lambda(\Phi_1)$ wird hierbei nichts ausgesagt. Nachfolgend wird in Beweisteil 22) noch gezeigt, dass ein positiver Parameter $\lambda(\Phi_1)$ die Existenz eines Zustandspreisvektors Φ_1 (Definition in Abschnitt 2.3.1) und damit die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) sichert. Weiter wird in Beweisteil 23) gezeigt, dass unter der mathematisch-technischen Zusatzvoraussetzung eines schwach positiven Zahlungsprofils Z_1 im Bildraum von D^T, also unter

(SPDZ) $\quad \exists\ g_1 \in \mathbb{R}^N$ bzw. $Z_1 = D^\mathsf{T} g_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ mit $D^\mathsf{T} g_1 \gtrdot 0$,

umgekehrt für *jeden* positiven Vektor $\Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp = D^{-1}([S_0])$ die Bedingung $\lambda = \lambda(\Phi_1) > 0$ auch notwendig für die Gültigkeit von (AF) bzw. (AF0) ist. Die Voraussetzung (SPDZ) besagt, dass in

$\mathbb{R}^N$ die Menge $\{D^\top h_1 \gtrdot 0\}$ nichtleer ist bzw. in $\mathbb{R}^K$ die Menge $D^\top(\mathbb{R}^N) \cap \mathbb{R}^K_{\gtrdot 0}$ nichtleer ist, also ein schwach positives $D^\top$-Bild existiert. Unter den Voraussetzungen (SPDZ) und (AF1.0) gilt also $\forall\ \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp \cap \mathbb{R}^K_{>0}$:

$$\lambda(\Phi_1) > 0 \Leftrightarrow \text{(AF0)} \Leftrightarrow \text{(AF)}.$$

Anstelle der Voraussetzung (SPDZ) wird nun die stärkere Zusatzvoraussetzung[18] (GI) an das Marktmodell gestellt, dass auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M} = L'(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathbb{R}^{1+K}$ des Marktmodells eine gewinnbringende Investition $Y = (Y_0,Y_1)^\top = L'k_1$ existiert. Bei dieser Investition $Y \in \mathbb{R}^{1+K}$ soll zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Auszahlung $Y_0 < 0$, zum Zeitpunkt $t = 1$ in jedem Zustand $\omega_k \in \Omega$ eine nichtnegative Zahlung $Y_1(\omega_k)$ und in mindestens einem Zustand $\omega_{k'}$ eine positive Zahlung $Y_1(\omega_{k'})$ erfolgen:

(GI) $\qquad \exists\ k_1 \in \mathbb{R}^N : Y_0 = -S_0{}^\top k_1 < 0,\ Y_1 = D^\top k_1 \gtrdot 0.$

Die Voraussetzung (GI) bedeutet, dass in $\mathbb{R}^N$ die Menge

$$\{S_0{}^\top h_1 > 0,\ D^\top h_1 \gtrdot 0\}$$

nichtleer, in $\mathbb{R}^K$ die Menge

$$D^\top(\{S_0{}^\top h_1 < 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\gtrdot 0}$$

nichtleer bzw. in $\mathbb{R}^{1+K}$ die Menge

$$\mathcal{M} \cap \{X \in \mathbb{R}^{1+K} : X_0 < 0,\ X_1 \gtrdot 0\}$$

nichtleer ist. Mit (GI) ist also auch die Voraussetzung (SPDZ) erfüllt. Unter der stärkeren Voraussetzung (GI) kann aber aus der speziellen Arbitragefreiheit (AF1.0) (d. h. beim Fehlen der speziellen Arbitragegelegenheiten h_1 mit $S_0{}^\top h_1 = 0 \wedge D^\top h_1 \gtrdot 0$) auch noch $\lambda(\Phi_1) > 0\ \forall\ \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp \cap \mathbb{R}^K_{>0}$ geschlossen werden. Damit ist dann (AF1.0) gleichbedeutend zur allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) (inklusive (AF0):

Unter der Voraussetzung (GI) gilt:

(AF1.0) $\Rightarrow \lambda(\Phi_1) > 0\ \forall\ \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp \cap \mathbb{R}^K_{>0} \neq \emptyset \Rightarrow$ (AF0) und (AF);

(AF1.0) $\Leftrightarrow$ (AF).

Beweis:

21) „(AF1.0) mit $\lambda = \lambda(\Phi_1) \neq 0 \Rightarrow$ (LOP)“:

Unter der Voraussetzung (AF1.0) existiert nach der obigen Charakterisierung von (AF1.0) im Fall $\lambda = \lambda(\Phi_1) \neq 0$ ein Prozess $\Psi = (\lambda,\Phi_1)^\top \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = \lambda \neq 0$ und o. E. mit $\Psi_0 = 1$ (wobei die Positivität von Φ_1 verlorengehen kann), also ein Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$. Nach Abschnitt 2.2 ist dies äquivalent zur Gültigkeit des LOP und zur Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})$. Über die Arbitragefreiheit kann hier aber noch nichts ausgesagt werden.

22) „(AF1.0) mit $\lambda = \lambda(\Phi_1) > 0 \Rightarrow$ (AF)“:

Unter der Voraussetzung (AF1.0) existiert nach der obigen Charakterisierung von (AF1.0) im Fall $\lambda = \lambda(\Phi_1) > 0$ ein Vektor $\Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit den Eigenschaften

$$\Phi_1 > 0 \wedge \Phi_0 := \lambda(\Phi_1) > 0 \wedge D\Phi_1 = S_0\Phi_0$$

bzw. ein Prozess $\Phi = (\Phi_0,\Phi_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Phi > 0 \wedge L'^\top\Phi = 0$, also ein Zustandspreisprozess $\Phi = (\Phi_0,\Phi_1)^\top \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathbb{R}^{1+K}_{>0}$, so dass nach dem oben angegebenen Fundamentalsatz der Preistheorie die Arbitragefreiheit (AF) vorliegt. Der Fall $\lambda(\Phi_1) > 0$ für zumindest einen positiven Vektor $\Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp$ ist also hinreichend für (AF) und insbesondere für (AF0). Dies kann auch noch mit der Gleichung (PG$\Phi_1\lambda$) verdeutlicht werden, da in dieser wegen $\Phi_1 > 0$ und $\lambda = \lambda(\Phi_1) > 0$ der in (AF0) betrachtete Fall eines $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0{}^\top h_1 < 0$ und $D^\top h_1 \geq 0$ nicht eintreten kann.

23) „Unter den Voraussetzungen (AF1.0) und (SPDZ) gilt $\forall\ \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp \cap \mathbb{R}^K_{>0}$: (AF) $\Leftrightarrow$ (AF0) $\Leftrightarrow \lambda(\Phi_1) > 0$“:

Da die Beweisrichtung „$\Leftarrow$“ in 22) begründet wird, ist nur noch „$\Rightarrow$“ zu zeigen. Durch Einsetzen des in (SPDZ) vo-

[18] Bei Kremer (2011), S. 36, wird für ein Marktmodell mit gültiger Bedingung (GI) als Beispiel ein Marktmodell mit einer festverzinslichen Kapitalanlage S^j angegeben, bei der $S_0^j > 0$ und $S_1^j(\omega_k) = qS_0^j\ \forall\ k \in \{1,\ldots,K\}$ mit einem deterministischen Zinsfaktor $q > 0$ ist. Beispielsweise kommt bei der Kassenhaltung von Bargeld der Zinsfaktor $q = 1$ zum Einsatz.

rausgesetzten Vektors $h_1 = g_1$ in die zu $\Phi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathbb{R}^K_{>0}$ gehörige Gleichung (PG$\Phi_1\lambda$) erhält man eine positive rechte Seite $\Phi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}g_1$, sodass der Fall $\lambda = 0$ nicht eintreten kann. Geometrisch würde der Fall $\lambda = 0$ bedeuten, dass der Bildraum $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ in der Hyperebene $\{\Phi_1^{\mathsf{T}}X_1 = 0\}$ liegt. Dies wird aber durch die Existenz eines D^{T}-Bildpunktes $D^{\mathsf{T}}g_1 \gneq 0$ ausgeschlossen.

Weiter erhält man bei positiver rechter Seite der Gleichung $\lambda S_0^{\mathsf{T}}g_1 = \Phi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}g_1$ unter der Annahme $\lambda < 0$ für g_1 einen negativen Wert $S_0^{\mathsf{T}}g_1$, was im Widerspruch zu (AF0) steht. Also kann bei Vorliegen von (AF0) auch der Fall $\lambda < 0$ nicht eintreten. Insgesamt ist damit ist unter den Voraussetzungen (AF1.0) und (SPDZ) für jeden positiven Vektor $\Phi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp}$ die Bedingung $\lambda(\Phi_1) > 0$ auch notwendig und somit charakteristisch für (AF0).

24) „Unter der Voraussetzung (GI) gilt: (AF1.0) ⇒ (AF)“:

1. Beweis: Bei Gültigkeit der speziellen Arbitragefreiheit (AF1.0) existiert ein Vektor $\Phi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathbb{R}^K_{>0}$. Durch Einsetzen des in (GI) vorausgesetzten Portfoliovektors $h_1 = k_1$ in die Gleichung (PG$\Phi_1\lambda$) erhält man wegen $\Phi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}k_1 > 0$ und $S_0^{\mathsf{T}}k_1$ die Bedingung $\lambda = \lambda(\Phi_1) > 0$, die nach Beweisteil 22) hinreichend für (AF0) und für (AF) ist.

2. Beweis:[19] Es genügt zu zeigen, dass es mit einer beliebigen Arbitragegelegenheit $g_1 \in \mathbb{R}^N$ (mit $L'g_1 \gneq 0$) auch eine spezielle Arbitragegelegenheit $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\mathsf{T}}h_1 = 0$ und $D^{\mathsf{T}}h_1 \gneq 0$ gibt. Für die Arbitragegelegenheit g_1 gilt $S_0^{\mathsf{T}}g_1 \leq 0$, $D^{\mathsf{T}}g_1 \geq 0$ und im Fall $S_0^{\mathsf{T}}g_1 = 0$ noch $D^{\mathsf{T}}g_1 \gneq 0$. Man definiert nun

$$h_1 = h_1(\mu) := g_1 + \mu k_1$$

und wählt $\mu = - S_0^{\mathsf{T}}g_1/S_0^{\mathsf{T}}k_1$ (≥ 0), sodass

$$S_0^{\mathsf{T}}h_1 = S_0^{\mathsf{T}}g_1 + \mu S_0^{\mathsf{T}}k_1 = 0$$

ist. Im Fall i) $\mu = 0$ ist $S_0^{\mathsf{T}}g_1 = 0$ und damit schon $h_1 = g_1$ eine spezielle Arbitragegelegenheit mit $S_0^{\mathsf{T}}g_1 = 0$ und $D^{\mathsf{T}}g_1 \gneq 0$. Im Fall ii) $\mu > 0$ ist wegen $D^{\mathsf{T}}g_1 \geq 0$, $D^{\mathsf{T}}k_1 \gneq 0$ auch

$$D^{\mathsf{T}}h_1 = D^{\mathsf{T}}g_1 + \mu D^{\mathsf{T}}k_1 \geq \mu D^{\mathsf{T}}k_1 \gneq 0$$

und somit h_1 eine derartige spezielle Arbitragegelegenheit. □

2.3.3 Formales Wahrscheinlichkeitsmaß, Preismaß, Martingalmaß und risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß

Für die folgenden Betrachtungen sei die Arbitragefreiheit (AF) vorausgesetzt. Es werden nun einige in der Literatur vielzitierte Begriffe im Einperiodenmodell erläutert. Es sind dies die in der Überschrift aufgeführten Bezeichnungen und außerdem die Begriffe Arrow-Debreu-Preis, Ereignispreis, Zustandspreis, Zustandspreisvektor, stochastischer Diskontierungsfaktor, deterministischer Diskontierungsfaktor und risikoneutrale Bewertung. Mittels der Duplizierbarkeit bestimmter Arrow-Debreu-Zahlungsprofile ($\mathbf{1}_C$, $C \subseteq \Omega$) werden dabei auch die meist weniger beachteten impliziten Prämissen dargestellt, unter denen die genannten Begriffe erst einen Sinn haben. Bei der Behandlung des Martingalmaßes tritt an die Stelle der beim Mehrperiodenmodell verwendeten bedingten Erwartung hier beim Einperiodenmodell nur der Erwartungswert. Im Einperiodenmodell sind die impliziten Prämissen für das auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definierte formale W-Maß Q_1 die Arbitragefreiheit (AF), für das Martingalmaß Q_1, das risikoneutrale bzw. risikolose Wahrscheinlichkeitsmaß Q_1 und die risikoneutrale Bewertung die Arbitragefreiheit (AF) und die Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_\Omega$). Die impliziten Prämissen für das Preismaß Q_1 sind die Arbitragefreiheit (AF) und die Vollständigkeit (VS). Die Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_\Omega$) entspricht hier dabei auch der Voraussetzung (FH) der Existenz einer festverzinslichen Handelsstrategie (Begründung folgt unten noch).

Das formale W-Maß

Die Arbitragefreiheit (AF) ist im Einperiodenmodell äquivalent zur Existenz eines Zustandspreisvektors, d. h. eines Vektors $\Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Phi_1 > 0$ und $D\Phi_1 = S_0$. Dieses K-Tupel $\Phi_1 = (\Phi_{1,1},\ldots,\Phi_{1,K})$ entspricht einer Zustandsfunktion $\Phi_1 : \Omega \longrightarrow]0,\infty[$ auf Ω bzw. einer Funktion

$$\Phi_1 : \{\omega_k\} \in \mathcal{P}_1 \mapsto \Phi_{1,k} = \Phi_1(\omega_k) \in]0,\infty[$$

auf der Partition $\mathcal{P}_1 = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$ von Ω, die zu einem Maß

[19] Dieser Beweisweg wird bei Kremer (2011), S. 35, angegeben.

$$\Phi_1 : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow]0,\infty[$$

auf der σ-Algebra $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{P}_1) = \mathfrak{P}(\Omega)$ in Ω fortgesetzt werden kann:

$$\Phi_1(C) := \sum_{\omega_k \in C} \Phi_1(\omega_k) = \sum_{\omega_k \in C} \Phi_{1,k} \quad \text{für } C \subseteq \Omega.$$

Auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist Φ_1 eine nichtnegative und σ-additive Funktion mit $\Phi_1(\emptyset) = 0$ und $\Phi_1(\Omega) = \Phi_{1,1} + \ldots + \Phi_{1,K} < \infty$ ($|\Omega| = K < \infty$), also ein endliches Maß. Das zugehörige normierte Maß

$$Q_1 := \Phi_1 / \Phi_1(\Omega)$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß, $Q_1(\Omega) = 1$) $Q_1 : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ auf $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dieses innerhalb des Marktmodells (aus dem Zustandsvektor Φ_1) entwickelte **formale (synthetische) W-Maß**[20] hat nichts mit den tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zustände $\omega_k \in \Omega$ zu tun.

Das Preismaß

Im Einperiodenmodell ($T = 1$, $I = \{0,1\}$, $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_K\}$) werden die Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N \subseteq (\mathbb{R}^N)^{I \times \Omega}$ mit ihren Koordinaten-2N-Tupeln bezüglich der $\mathcal{H}_N$-Basis $h_{t,\Omega,j} = \mathbf{1}_t \mathbf{e}_j$ ($t = 0, 1$; $j \in J = \{1,\ldots,N\}$) identifiziert und die $\mathcal{F}$-adaptierten Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{I \times \Omega}$ mit ihren Koordinaten-(1+K)-Tupeln bezüglich der $\mathcal{W}$-Basis w_{t,A_t} ($t = 0, 1$, $A_t \in \mathcal{P}_t$: $w_{0,\Omega} = \mathbf{1}_0$, $w_{1,\omega_k} = \mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{1}_{\omega_k}$, $k = 1,\ldots,K$). Demzufolge entspricht das zum Zeitpunkt $t = 1$ und zu einem Ereignis $C \subseteq \Omega$ gehörige **Arrow-Debreu-Papier**[21] (Abk.: AD-Papier)

$$\xi^{1,C} := \mathbf{1}_{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\top \in \mathcal{W}$$

($\xi_s^{1,C}(\omega) = 1$ für $s = 1 \wedge \omega \in C$ und $\xi_s^{1,C}(\omega) = 0$ für $s = 0$ oder $s = 1 \wedge \omega \notin C$) seinem Koordinaten-(1+$K$)-Tupel

$$(0,\mathbf{1}_C)^\top \in \mathbb{R}^{1+K} \text{ mit } \mathbf{1}_C = \sum_{\omega_k \in C} \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^K.$$

Es wird daher auch $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\top$ geschrieben. Nach Beweisteil 2) ist die L-Duplizierbarkeit des AD-Papiers $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\top$ äquivalent zur $D^\top$-Duplizierbarkeit des Zahlungsprofils $\mathbf{1}_C$, also zur Bedingung

(DP$\mathbf{1}_C$) $\qquad \mathbf{1}_C \in D^\top(\mathbb{R}^N)$.

Das zum Zeitpunkt $t = 1$ und Ereignis $C \subseteq \Omega$ gehörige stochastische Zahlungsprofil $\mathbf{1}_C$ wird hier als **AD-Zahlungsprofil** bezeichnet.

Im Spezialfall $C = \Omega$ ist das deterministische AD-Papier

$$\zeta^1 := \xi^{1,\Omega} = \mathbf{1}_1 = \mathbf{1}_{1,\Omega} = (0,\mathbf{1}_\Omega)^\top \in \mathcal{W}$$

($\zeta_s^1(\omega) = 1$ für $s = 1$ und alle $\omega \in \Omega$, $\zeta_s^1(\omega) = 0$ für $s = 0$) mit seinem Koordinaten-(1+K)-Tupel $(0,\mathbf{1}_\Omega)^\top = (0,1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ genau dann L-duplizierbar, wenn das deterministische AD-Zahlungsprofil $\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^\top$ $D^\top$-duplizierbar ist:

(DP$\mathbf{1}_\Omega$) $\qquad \mathbf{1}_\Omega \in D^\top(\mathbb{R}^N)$.

Unter der Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_C$) und aufgrund der Definition von π_1 besitzen das AD-Papier $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\top$ und das AD-Zahlungsprofil $\mathbf{1}_C$ den gleichen Preis:

[20] Die Bezeichnung formales oder synthetisches Wahrscheinlichkeitsmaß für das W-Maß Q_1 findet man bei Kremer (2011), S. 47 und (2006), S. 206.

[21] Weitere Bezeichnungen für das AD-Papier sind Elementar-Zahlungsprofil, Zustands-Zahlungsprofil, reines, elementares oder primitives Wertpapier, Elementar-Claim, Zustands-Claim, zustandsbedingter Zahlungsanspruch, englisch: state contingent claim. Die Idee der reinen Wertpapiere geht zurück auf Gérard Debreu (1921–2004; 1983 Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, 1976 französischer Orden Légion d'honneur) und Kenneth J. Arrow (1921–2017; 1972 Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, 1986 John-von-Neumann-Theorie-Preis).

$$\pi(\xi^{1,C}) = \pi_1(\mathbf{1}_C) = \Phi_1^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_C = \sum_{\omega_k \in C} \Phi_{1,k} = \Phi_1(C) =: d_{1,C}\ (> 0).$$

Insbesondere gilt (für $C = \Omega$) unter der Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_\Omega$)

$$\pi(\zeta^1) = \pi(\xi^{1,\Omega}) = \pi_1(\mathbf{1}_\Omega) = \Phi_1^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_\Omega = \sum_{k=1}^{K} \Phi_{1,k} = \Phi_1(\Omega) =: d_{1,\Omega} =: d_1\ (> 0).$$

Das Maß $\Phi_1(C)$ von C wird somit als Preis des AD-Papier $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^{\mathsf{T}}$ bzw. des AD-Zahlungsprofils $\mathbf{1}_C$ realisiert und daher als Arrow-Debreu-Preis (AD-Preis), **Zustandspreis**[22] oder besser Ereignispreis von C bezeichnet. Das Maß $\Phi_1(C)$ von C kann auch als (nicht normiertes) **Preismaß** von C bezeichnet werden. Die Bezeichnung des W-Maßes $Q_1(C)$ von C als (normiertes oder relatives) Preismaß von C wird unten noch begründet.
Speziell für ein Elementarereignis $C = \{\omega_k\}$ ($k \in \{1,\ldots,K\}$) ist unter der Voraussetzung (DP$\mathbf{e}_k$): $\mathbf{e}_k \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ der Preis der charakteristischen Funktion $\mathbf{1}_{1,\omega_k} = \xi^{1,\omega_k} = (0,\mathbf{e}_k)^{\mathsf{T}}$ bzw. $\mathbf{1}_{\omega_k} = \mathbf{e}_k$ des k-ten Zustands $\omega_k \in \Omega$ gleich der k-ten Komponente $\Phi_{1,k}$ des Zustandsvektors Φ_1:

$$\pi(\xi^{1,\omega_k}) = \pi_1(\mathbf{e}_k) = \Phi_1^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_k = \Phi_{1,k} = \Phi_1(\omega_k) =: d_{1,k}\ (> 0).$$

Daher wird die Komponente $\Phi_{1,k}$ als Zustandspreis des k-ten Zustands $\omega_k \in \Omega$ und der Vektor Φ_1 als **Zustandspreisvektor**[23] des Endzeitpunkts $T = 1$ bezeichnet.

Der zum Zeitpunkt $t = 0$ durchgeführte Kauf des AD-Papiers $\xi^{t,C}$ liefert insgesamt zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ den Zahlungsstrom

$$\hat{\xi}^{1,C} := -\, d_{1,C} \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \xi^{1,C} = \left(-d_{1,C}, \mathbf{1}_C\right)^{\mathsf{T}}.$$

Da nach Beweisteil 1) $(-d_{1,C},0)^{\mathsf{T}}$ stets L-duplizierbar ist und den Preis $-d_{1,C}$ besitzt und da mit der D^{T}-Duplizierbarkeit von $\mathbf{1}_C$ auch $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^{\mathsf{T}}$ L-duplizierbar ist, folgt auch die L-Duplizierbarkeit von $\hat{\xi}^{1,C}$ mit dem Preis

$$\pi(\hat{\xi}^{1,C}) = -\, d_{1,C} + \pi(\xi^{1,C}) = 0.$$

Daher gilt $\hat{\xi}^{1,C} \in \mathcal{M}$. Das Kapitalmarktgeschäft $\hat{\xi}^{1,C}$ wird hier als Arrow-Debreu-Kassageschäft (**AD-Kassageschäft**) bezeichnet und die dabei zum Zeitpunkt $t = 0$ auftretende positive Konstante

$$d_{1,C} = \Phi_1(C)$$

als der zum Zeitintervall [0,1] und Ereignis $C \subseteq \Omega$ gehörige **stochastische Diskontierungsfaktor**. Weiter ist

$$a_{1,C} = 1/d_{1,C}$$

der zugehörige stochastische Aufzinsungsfaktor und

$$i_{1,C} = a_{1,C} - 1 = 1/d_{1,C} - 1$$

der zugehörige stochastische Zinssatz. Der Diskontierungsfaktor $d_{1,C}$ existiert dann im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells in dem Sinne, dass mit Hilfe des zugehörigen Kapitalmarktgeschäfts $\hat{\xi}^{t,C} \in \mathcal{M}$ eine zum Zeitpunkt $t = 1$ und im Ereignis $C \subseteq \Omega$ stattfindende Zahlung $\gamma\mathbf{1}_C$ tatsächlich auf eine gleichwertige sichere Zahlung $\gamma d_{1,C}$ im Zeitpunkt $s = 0$ transponiert bzw. abgezinst werden kann: Aus dem Zahlungsprofil $X = \gamma\mathbf{1}_C$ ($\gamma \in \mathbb{R}$) mit dem Preis $\pi(X) = \gamma d_{1,C}$ erhält man nämlich durch Kombination (additive Ergänzung, Glattstellung, Replizierung) mit dem Kapitalmarktgeschäft $Z = -\gamma\hat{\xi}^{1,C} = (\gamma d_{1,C},-\gamma\mathbf{1}_C)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}$ das Zahlungsprofil $Y = X + Z = (\gamma d_{1,C},0)^{\mathsf{T}}$ mit dem gleichen Preis $\pi(Y) = \gamma d_{1,C} = \pi(X)$.
Ebenso steht auch der Aufzinsungsfaktor $a_{1,C}$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ zur Verfügung, da mittels Z'

[22] Die Bezeichnung Zustandspreis ist streng genommen nur für die Elementarereignisse $C = \{\omega_k\}$ bzw. Zustände $\omega_k \in \Omega$ mit ihren AD-Papieren $\xi^{1,\omega_k} = (0,\mathbf{e}_k)^{\mathsf{T}}$ und deren Preisen $\Phi_1(\{\omega_k\}) = \Phi_1(\omega_k) = \Phi_{1,k}$ exakt.

[23] Die Bezeichnungen Zustandspreis und Zustandspreisvektor samt Plausibilisierung findet man bei Kremer (2011), S. 45.

$= \gamma a_{1,C}\hat{\xi}^{1,C} = (-\gamma,\gamma a_{1,C}\mathbf{1}_C)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}$ eine im Zeitpunkt $s = 0$ (sicher) stattfindende Zahlung $\gamma = X_0 = X_0(\Omega) \in \mathbb{R}$ auf eine gleichwertige zum Zeitpunkt $t = 1$ und im Ereignis $C \subseteq \Omega$ stattfindende Zahlung $\gamma a_{1,C}$ transponiert bzw. aufgezinst werden kann.

Speziell unter der Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_\Omega$) ist die Konstante $d_1 = \Phi_1(\Omega) = \pi(\zeta^1)$ als Preis des deterministischen AD-Papiers $\zeta^1 = (0,\mathbf{1}_\Omega)^{\mathsf{T}}$ realisiert und als zum Zeitintervall [0,1] gehöriger **deterministischer Diskontierungsfaktor** des deterministischen AD-Kassageschäfts $\hat{\zeta}^1 = \hat{\xi}^{1,\Omega} = \left(-d_1, \mathbf{1}_\Omega\right)^{\mathsf{T}}$ auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ vorhanden. Der zugehörige deterministische Aufzinsungsfaktor ist

$$a_1 = 1/d_1$$

und der deterministische Zinssatz

$$i_1 = a_1 - 1 = 1/d_1 - 1.$$

Sind beide Voraussetzungen (DP$\mathbf{1}_C$) und (DP$\mathbf{1}_\Omega$) erfüllt, so ist der normierte Ereignispreis

$$Q_1(C) = \Phi_1(C)/d_1 = \Phi_1(C)/\Phi_1(\Omega) = \pi(\xi^{1,C})/\pi(\zeta^1)$$

von C der Anteil des Ereignispreises $\Phi_1(C)$ am Ereignispreis $\Phi_1(\Omega)$, also der relative Ereignispreis zu $t = 1$ und Ereignis $C \subseteq \Omega$ in Bezug auf den deterministischen Ereignispreis $\Phi_1(\Omega)$ des Zeitpunkts $t = 1$. Daher kann dann das W-Maß $Q_1(\Omega)$ des Ereignisses C auch als das zum Zeitpunkt t gehörige (relative bzw. normierte) Preismaß von C bezeichnet werden. Das für alle $C \subseteq \Omega$ definierte und innerhalb des Marktmodell entwickelte formale W-Maß $Q_1 : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ wird nach dieser Plausibilisierung meist auch ohne Vorliegen der entsprechenden Voraussetzungen als das zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörige (relative, normierte) **Preismaß**[24] bezeichnet.

Soll die Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_C$) für alle $C \subseteq \Omega$ vorliegen, so bedeutet dies die Vollständigkeit (VS) des Marktmodells: Speziell für die $C = \{\omega_k\}$ ist dann nämlich $\mathbf{1}_{\omega_k} = \mathbf{e}_k \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ für alle $k = 1,\ldots,K$ und daher $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \text{lin}\,\{\mathbf{e}_k : k = 1,\ldots,K\} = \mathbb{R}^K$. Mit (VS) ist dann auch die Bedingung (DP$\mathbf{1}_\Omega$) erfüllt ($\mathbf{1}_\Omega = (1,1,\ldots,1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^K = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$).

Zur Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_\Omega$) ist anzumerken, dass diese hier der im Mehrperiodenmodell verwendeten Voraussetzung (FH) der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien entspricht: Die D^{T}-Duplizierbarkeit des deterministischen AD-Zahlungsprofils $\mathbf{1}_\Omega$, d. h.

$$D^{\mathsf{T}}\eta_1 = \mathbf{1}_\Omega \text{ mit einem } \eta_1 \in \mathbb{R}^N,$$

ist nach den Beweisteilen 1) und 2) äquivalent zur L-Duplizierbarkeit von $\chi = (\chi_0,\mathbf{1}_\Omega)^{\mathsf{T}}$ mit beliebig wählbarem $\chi_0 \in \mathbb{R}$. Wählt man hier noch $\chi_0 = -S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1 = -\pi_1(\mathbf{1}_\Omega) = -d_1$, so erfüllt die Handelsstrategie $\eta := (0,\eta_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ die Gleichungen

$$\chi_0 = L_0(\eta) = -R_0(\eta) \qquad = -S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1 \; = -d_1,$$
$$\chi_1 = L_1(\eta) = V_1(\eta) = S_1^\delta\eta_1 \; = D^{\mathsf{T}}\eta_1 \quad = \mathbf{1}_\Omega.$$

Mit diesem η existiert also eine zum Zeitintervall [0,1] gehörige sogenannte festverzinsliche Handelsstrategie und eine Duplikationsstrategie für das AD-Kassageschäft

$$\chi = \hat{\xi}^{1,\Omega} = (-d_1,\mathbf{1}_\Omega)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M} \qquad (\pi(\chi) = S_0^{\delta\mathsf{T}}\eta_0 = S_0^{\delta\mathsf{T}}0 = 0).$$

Im Mehrperiodenmodell wird die Voraussetzung (FH) auch noch für die Existenz des für alle Zeitpunkte $t \in I$ einheitlichen formalen W-Maßes $Q := Q_T$ ($Q_t = Q|_{\mathcal{F}_t}$) und für die Martingaleigenschaft der diskontierten dividendenlosen Finanzinstrumente vewendet.
Zur Sicherung der Voraussetzung (FH) im Mehrperiodenmodell wird in der Praxis häufig das Marktmodell mit einem festverzinslichen (deterministischen) Finanzinstrument S^1 ausgestattet. Hier im Einperiodenmodell bedeutet dies die Existenz des dividendenlosen Finanzinstruments S^1

[24] Die Bezeichnung Preismaß für das W-Maß Q_1 findet man bei Kremer (2011), S. 48, 69, 199.

($\delta^1 = 0$) mit $S_0^1 = a_0 = 1$, $S_1^1 = a_1 = a_1\mathbf{1}_\Omega$ ($a_1 \in\ ]0,\infty[$ unabhängig von den $\omega \in \Omega$). Mit $\eta_1 := d_1\mathbf{e}_1 = (d_1,0,\ldots,0)^\top \in \mathbb{R}^N$ ist dann $D^\top\eta_1 = d_1 S_1^{\delta,1} = d_1 S_1^1 = d_1 a_1 \mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega$, also die Bedingung (DP$\mathbf{1}_\Omega$) bzw. (FH) erfüllt. Bei einer möglichen Kassenhaltung von Bargeld kommt der Zinsfaktor $a_1 = 1$ zum Einsatz.

Zwei Interpretationen der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip

1) Die Bewertung der duplizierbaren Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N}) \subseteq \mathbb{R}^{1+K}$ erfolgt durch den mit dem normierten Zustandspreisprozess $\Phi = (\Phi_0,\Phi_1)^\top$ ($d_0 = \Phi_0(\Omega) = 1$) bzw. dem zugehörigen stochastischen Ereignispreisvektor

$$\begin{aligned}\Phi &= (1;\Phi_{1,1},.., \Phi_{1,K})^\top = (1;\Phi_1(\omega_1),.., \Phi_1(\omega_K))^\top \\ &= (1;d_{1,1},..,d_{1,K})^\top\end{aligned}$$

berechneten Preis

$$\begin{aligned}\pi(X) &= \Phi^\top X = \Phi_0 X_0 + \Phi_1^\top X_1 \\ &= \Phi_0 X_0 + \sum_{k=1}^{K} d_{1,k} X_{1,k} \\ &= B_1(X,\Phi)\end{aligned}$$

und kann daher als Diskontierung oder Barwertberechnung von X mit dem stochastischen Ereignispreisvektor Φ als Preisvektor interpretiert werden. Die implizite Prämisse ist hier die Voraussetzung der Bedingungen (DP$\mathbf{e}_k$) für alle $k = 1,\ldots,K$ zur Bereitstellung der AD-Kassageschäfte $\hat{\xi}^{1,\omega_k} = -d_{1,k}\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \xi^{1,\omega_k}$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ mit ihren stochastischen Diskontierungsfaktoren $d_{1,k}$ und damit die Vollständigkeit (VS) des Marktmodells.

2) Weiter gilt für die Preisberechnung

$$\begin{aligned}\pi(X) &= X_0 + \sum_{k=1}^{K} d_1 Q_1(\omega_k) X_1(\omega_k) \\ &= X_0 + d_1\cdot \sum_{k=1}^{K} Q_1(\omega_k) X_1(\omega_k) \qquad (d_0 = 1,\ E_{Q_1}(X_0) = X_0) \\ &= d_0\cdot E_{Q_1}(X_0) + d_1\cdot E_{Q_1}(X_1) \\ &= B_1(E_{Q_1}(X),P)\end{aligned}$$

mit dem deterministischen Preisvektor

$$P := (d_0,d_1)^\top$$

und dem deterministischen Paar

$$E_{Q_1}(X) := (E_{Q_1}(X_0), E_{Q_1}(X_1))^\top$$

der Q_1-Erwartungswerte der Zustandsfunktionen X_0 und X_1 bezüglich des formalen W-Maßes $Q_1 : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$. Die Bewertung von X bzw. die Preisberechnung kann daher als Diskontierung oder Barwertberechnung mit dem deterministischen Preisvektor P für die Q_1-Erwartungswerte der Zustandsfunktionen X_0 und X_1 interpretiert werden. Die implizite Prämisse für diese Interpretation ist (DP$\mathbf{1}_\Omega$) zur Bereitstellung des deterministischen AD-Kassageschäfts $\hat{\zeta}^1$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ mit dem deterministischen Diskontierungsfaktor d_1. Bezeichnet man dabei das formale W-Maß Q_1 noch als Preismaß und die Maße $Q_1(\omega_k) = \Phi_1(\omega_k)/\Phi_1(\Omega) = d_{1,k}/d_1$ als (relative) Zustandspreise, so sind implizit die Bedingungen (DP$\mathbf{e}_k$) für alle $k = 1,\ldots,K$ und (DP$\mathbf{1}_\Omega$), also die Vollständigkeit (VS) des Marktmodells mit vorausgesetzt.

Mit diesen beiden Interpretationen hat man auch zwei Brücken geschlagen von der Bewertung deterministischer zeitdiskreter Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer zeitdiskreter Zahlungsströme. Weitere Interpretationen der Bewertung (als Abstandsmessung und als Duplizierung mit Kapitalmarkt-Supplement und Beurteilungskurve) findet man im entsprechenden Thema dieser Website für das Mehrperiodenmodell. △

Das Martingalmaß

Anmerkung zur bedingten Erwartung im Mehrperiodenmodell

Für den im Mehrperiodenmodell vorliegenden Fall eines gefilterten W-Raum $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in I},Q)$ ($\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$) mit endlichem Zustandsraum Ω und dem auf den Ereignissen $A_s \in \mathcal{P}_s$ positiven W-Maß $Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ wird für eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion X_t und die Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}_s$ von $\mathcal{F}_t$ ($s \le t$) die bedingte Erwartung von X_t unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ (bzw. bezüglich $\mathcal{F}_s$ oder gegeben $\mathcal{F}_s$) folgendermaßen definiert:

$$E_Q(X_t|\mathcal{F}_s) := \sum_{A_s\in\mathcal{P}_s}\left(\frac{1}{Q(A_s)}\cdot\sum_{\substack{A_t\subseteq A_s\\ A_t\in\mathcal{P}_t}} X_t(A_t)Q(A_t)\right)\cdot\mathbf{1}_{A_s}.$$

Die bedingte Erwartung $Y_s = E_Q^{\mathcal{F}_s}(X_t)$ lässt sich charakterisieren als die eindeutig bestimmte $\mathcal{F}_s$-messbare Zustandsfunktion Y_s mit der Eigenschaft

$$E_Q(Y_s \cdot \mathbf{1}_C) = E_Q(X_t \cdot \mathbf{1}_C) \quad \text{für alle } C \in \mathcal{F}_s.$$

Speziell für $C = \Omega$ erhält man die Aussage $E_Q(Y_s) = E_Q(X_t)$. Dabei ist hier für eine beliebige $\mathcal{F}_t$-messbare reellwertige Zustandsfunktion $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, die im Fall eines endlichen Ω (und damit endlichen σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ und endlichen Partition $\mathcal{P}_t = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_t)$) auch Q-integrierbar ist, der Integralwert $E_Q(Z)$ der Erwartungswert von Z bezüglich des W-Maßes Q: Aufgrund der endlichen Summendarstellung der $\mathcal{F}_t$-messbaren Zustandsfunktion Z als Linearkombination

$$Z = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} Z_t(A_t)\mathbf{1}_{A_t}$$

der Indikatorfunktionen (charakteristischen Funktionen) $\mathbf{1}_{A_t}$ gilt für das Integral $E_Q(Z)$:

$$E_Q(Z) = \int_\Omega Z dQ = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} Z(A_t) \int_\Omega \mathbf{1}_{A_t} dQ = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} Z(A_t) Q(A_t) \in \mathbb{R}.$$

Da das W-Maß Q auch auf ganz $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert ist, folgt für das Integral $E_Q(Z)$ weiter

$$E_Q(Z) = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} Z(A_t) \sum_{\omega_k \in A_t} Q(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) Q(\{\omega\}).$$

Speziell für $s = 0$ ist $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_0) = \{\Omega\}$ und damit die bedingte Erwartung von X_t bezüglich $\mathcal{F}_0$ gleich dem Erwartungswert von X_t:

$$E_Q(X_t | \mathcal{F}_0) = \sum_{A_0 = \Omega} \frac{1}{Q(A_0)} \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t) Q(A_t) = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t) Q(A_t) = E_Q(X_t).$$

Mittels der bedingten Erwartung wird der Begriff des Martingals definiert. Ein an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess X heißt ein Martingal oder $\mathcal{F}$-Martingal, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt:

$$E_Q(X_{s+1} | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{für } s = 0, \ldots, T\text{-}1.$$

Mit der oben angegebenen charakterisierenden Eigenschaft der bedingten Erwartung erhält man hier speziell für $C = \Omega$, $\mathbf{1}_\Omega = 1$ die Aussage $E_Q(X_{s+1}) = E_Q(X_s)$, so dass der Erwartungswert $E_Q(X_t)$ der Zustandsfunktionen X_t für alle $t \in I$ konstant ist: Mit vollständiger Induktion ergibt sich nämlich $E_Q(X_t) = E_Q(X_0) = X_0$. Für ein Martingal X erwartet man also insbesondere, dass der zukünftige Wert im Mittel mit dem heutigen Wert übereinstimmt, also die Vorausschau nach dem Prinzip „Morgen wird wie heute sein“ erfolgt. △

Im hier betrachteten Einperiodenmodell ist bei vorausgesetzter Arbitragefreiheit (AF) ein beliebiger $\mathcal{F}$-adaptierter[25] stochastischer Prozess $X = (X_0, X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ genau dann ein Martingal bezüglich des formalen W-Maßes Q_1 und der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) = (\{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{P}(\Omega))$, wenn der Q_1-Erwartungswert der Zustandsfunktion X_1 gleich dem Wert X_0 ist:

$$E_{Q_1}(X_1) = E_{Q_1}(X_1 | \mathcal{F}_0) = X_0.$$

Wird auch noch die Bedingung (DP$\mathbf{1}_\Omega$) vorausgesetzt, so steht im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ tatsächlich das deterministische AD-Kassageschäft $\hat{\zeta}^1 = \hat{\xi}^{1,\Omega} = \left(\text{-}d_1, \mathbf{1}_\Omega\right)^\mathsf{T}$ mit seinem deterministischen Diskontierungsfaktor d_1 zur Verfügung. Wie oben bereits angemerkt wurde, ist im Einperiodenmodell die Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_\Omega$) äquivalent zur Voraussetzung (FH), der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien.

Damit ist dann für jedes dividendenlose Finanzinstrument S^i ($\delta^i = 0$, $i \in \{1, \ldots, N\}$) der diskontierte Preisprozess

$$(S_0^i, d_1 S_1^i)^\mathsf{T}$$

ein Martingal: Für das duplizierbare Zahlungsprofil $S_1^i = S_1^{\delta,i} = D^\mathsf{T}\mathbf{e}_i \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ ist nämlich der Erwartungswert des mit $d_1 = \Phi_1(\Omega)$ diskontierten Zahlungsprofils $d_1 S_1^i$ gleich seinem Preis und dieser ist nach (PGΦ1) gleich $\pi_1(S_1^i) = S_0^\mathsf{T}\mathbf{e}_i = S_0^i$:

[25] Im Einperiodenmodell ist der stochastische Prozess $X = (X_0, X_1)^\mathsf{T}$ genau dann adaptiert an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1) = (\{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{P}(\Omega))$, wenn $X_0 = X_0(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ konstant ist und $X_1 = X_1(\omega)$ eine beliebige Zustandsfunktion auf Ω ist.

$$\begin{aligned} E_{Q_1}(d_1 S_1^i) &= \sum_{k=1}^{K} d_1 S_1^i(\omega_k) Q_1(\omega_k) = \sum_{k=1}^{K} S_{1,k}^i \Phi_{1,k} \\ &= \Phi_1^{\mathsf{T}} S_1^i = \pi_1(S_1^i) \\ &= S_0^i . \end{aligned}$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft der diskontierten Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente wird das formale (synthetische) W-Maß Q_1 auch **Martingalmaß**[26] genannt. Der Zusammenhang zwischen der Arbitragefreiheit und der Martingaleigenschaft der dividendenlosen diskontierten Preisprozesse wurde im Jahr 1979 von Harrison und Kreps entdeckt.

Das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß

Bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) und Voraussetzung (DP$\mathbf{1}_\Omega$) folgt für jedes dividendenlose Finanzinstrument S^i ($\delta^i = 0$, $i \in \{1,\dots,N\}$) aus der oben angegebenen Martingaleigenschaft die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (E_{Q_1}(d_1 S_1^i) - S_0^i)/d_1 \\ &= E_{Q_1}(S_1^i) - (1 + i_1) S_0^i \qquad (1/d_1 = a_1 = 1 + i_1) \\ &= E_{Q_1}(S_1^i - S_0^i) - i_1 S_0^i \end{aligned}$$

und daraus im Fall $S_0^i \neq 0$ für die erwartete Rendite von S^i im Zeitintervall [0,1] der Wert

$$E_{Q_1}\left(\frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}\right) = i_1.$$

Für *alle* dividendenlosen Finanzinstrumente S^i mit $S_0^i \neq 0$ ist also im Zeitintervall [0,1] der Q_1-Erwartungswert der stochastischen Rendite $r_1^i := (S_1^i - S_0^i)/S_0^i$ bezüglich des formalen W-Maßes Q_1 gleich und stimmt mit dem risikolosen (deterministischen) Zinssatz i_1 überein. Aus diesem Grund wird das formale W-Maß Q_1 auch **risikoneutrales bzw. risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß**[27] genannt. Für die Übereinstimmung der Rendite r_1^i mit i_1 als deterministischen Zinssatz ist implizit (DP$\mathbf{1}_\Omega$) mit vorausgesetzt, so dass im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells das AD-Kassageschäfts $\hat{\xi}^{1,C}$ mit dem deterministischen Diskontierungsfaktor d_1 bzw. deterministischen Zinssatz $i_1 = a_1 - 1 = 1/d_1 - 1$ tatsächlich vorhanden ist.

Unter der impliziten Prämisse (DP$\mathbf{1}_\Omega$) erfolgt die Bewertung aller duplizierbaren Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ (nach der oben angegebenen ersten Interpretation der Bewertung) durch die Barwertberechnung mit dem deterministischen Preisvektor $P := (d_0,d_1)^{\mathsf{T}}$ für die Q_1-Erwartungswerte $E_{Q_1}(X_t)$ der Zustandsfunktionen X_0 und X_1 bezüglich des sog. risikoneutralen W-Maßes Q_1. Diese sogenannte **risikoneutrale Bewertung** mit dem formalen W-Maß Q_1 wurde bei der Untersuchung des zeitkontinuierlichen Black-Scholes-Merton-Modells von Cox und Ross im Jahr 1976 entdeckt.

[26] Die Bezeichnung Martingalmaß findet man bei Kremer (2011), S. 50, 69, 205, 215, 411.

[27] Die Erklärung der Bezeichnung risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß gibt Kremer (2011) auf S. 50.

Literatur

Bauer H. (2002), Wahrscheinlichkeitstheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 5. Auflage, ISBN 978-3-11-017236-2

Kremer J. (2011), Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten, Springer, Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-20867-6

Kremer J. (2017), Preise in Finanzmärkten, Replikation und verallgemeinerte Diskontierung, Springer Gabler Verlag, Berlin, ISBN 978-3-662-53725-1

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, 2. Auflage, Tredition, Hamburg, ISBN 978-3-347-35460-9

Pleier R. (2018), Diskrete stochastische Finanzmathematik, Pro Business, Berlin, ISNB 978-3-96409-023-2