Charakterisierung der Übereinstimmung von Endwert- und Barwert-Präferenzordnung bei gespaltenen Auf- und Abzinsungsfaktoren

Rudolf Pleier

Juni 2015

1 Endwert und Barwert eines Zahlungsstroms

Der **Endwert** $E_n(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\dots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ kann statt mit einem konstanten Kalkulationszinsfaktor allgemeiner mit fristigkeitsabhängigen Haben- und Soll-Aufzinsungsfaktoren $a_{j,n,D_j(\mathbf{X})}$ folgendermaßen definiert werden:

$$E_n(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{n} X_j a_{j,n,D_j(\mathbf{X})} = \mathbf{A_X}^\mathsf{T}\mathbf{X}$$

mit dem orthantenweise konstanten Aufzinsungsvektor

$$\mathbf{A_X} = (a_{0,n,D_0(\mathbf{X})},\dots,a_{n-1,n,D_{n-1}(\mathbf{X})},1)^\mathsf{T},$$

den für die Intervalle $[j,n]$ vorgegebenen Aufzinsungsfaktoren $a_{j,n,D_j(\mathbf{X})} > 0$ ($j = 0,\dots,n$; $a_{n,n,D} := 1$ für $D = H, S$) und dem j-ten Zinssatztypindex

$$D_j(\mathbf{X}) := \begin{cases} H & \text{bei } X_j \geq 0, \\ S & \text{bei } X_j < 0. \end{cases}$$

Eine Plausibilisierung für die Definition des Zinssatztypindexes $D_j(\mathbf{X})$ bei den Aufzinsungsfaktoren findet man bei Pleier (2021), S. 212, mittels eines Ergänzungsgeschäfts in Form einer Investition oder Finanzierung.

Der **Barwert** (Kapitalwert, Kapitalgegenwartswert, Gegenwartswert, englisch: present value; bei Zahlungsströmen aus Einnahmen und Ausgaben, also mit Vorzeichenwechsel, auch Nettobarwert, englisch: netto present value) $B_n(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\dots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird mit fristigkeitsabhängigen Haben- und Soll-Abzinsungsfaktoren (Diskontierungsfaktoren) $d_{0,j,F_j(\mathbf{X})}$ folgendermaßen definiert:

$$B_n(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{n} X_j d_{0,j,F_j(\mathbf{X})} = \mathbf{P_X}^\mathsf{T}\mathbf{X}$$

mit dem orthantenweise konstanten Abzinsungsvektor (Diskontierungsvektor)

$$\mathbf{P_X} = (1, d_{0,1,F_1(\mathbf{X})},\dots,d_{0,n,F_n(\mathbf{X})})^\mathsf{T},$$

den für die Intervalle $[0,j]$ vorgegebenen Abzinsungsfaktoren $d_{0,j,F_j(\mathbf{X})} > 0$ ($j = 0,\dots,n$; $d_{0,0,D} := 1$ für $D = H, S$) und dem j-ten Zinssatztypindex

$$F_j(\mathbf{X}) := \begin{cases} S & \text{bei } X_j > 0, \\ H & \text{bei } X_j \leq 0. \end{cases}$$

Eine Plausibilisierung für die Definition des Zinssatztypindexes $F_j(\mathbf{X})$ bei den Abzinsungsfaktoren findet man bei Pleier (2021), S. 218, mittels eines Ergänzungsgeschäfts in Form einer Finanzierung oder Investition.

Die allgemeinere Definition des **Zeitwerts** $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zum Vergleichszeitpunkt $t = m \in \{0,\dots,n\}$ mit fristigkeitsabhängigen Haben- und Soll-Aufzinsungsfaktoren $a_{j,m,D_j(\mathbf{X})}$ und Haben- und Soll-Abzinsungsfaktoren (Diskontierungsfaktoren) $d_{m,j,F_j(\mathbf{X})}$ findet man im unten angegebenen Buch des Autors auf S. 224.

2 Die ökonomische Interpretation des Endwerts und Barwerts jeweils als Margenwert einer Replizierung

Der Endwert $E_n(\mathbf{X})$ ist die **Endentnahme** (der Margenendwert) $v(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = n$ bei einer speziellen Replizierung (Glattstellung) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X})), \quad \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) \in C_{M^n},$$

nämlich bei der Replizierung mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$, der Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_{n+1} = \mu\cdot(0,\ldots,0,1)^{\mathsf{T}}$$

der Endentnahme und einem speziellen Supplementsystem $L = L(\mathbf{R}_{E_j}^j)$ von Termingeschäften $\mathbf{S}_H^j = \mathbf{R}_H^j$, $\mathbf{S}_S^j = -\mathbf{R}_S^j$ $(j = 1,\ldots,n)$ mit den elementaren Zahlungsströmen

$$\mathbf{R}_{E_j}^j = -\mathbf{e}_j + R_{E_j,n}^j\cdot\mathbf{e}_{n+1} = (0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0,R_{E_j,n}^j)^{\mathsf{T}}$$

und den Komponenten $R_{E_j,k}^j = 0$ für $k \neq j\text{-}1, n$, $R_{E_j,j-1}^j = -1$ für $k = j\text{-}1$ und $R_{E_j,n}^j = a_{j-1,n,E_j} > 0$ für $k = n$ $(j = 1,\ldots,n,\ E_j \in M = \{H,S\})$ und der zulässigen Supplementmenge $C_{M^n} = \bigcup_{\mathbf{E}\in M^n} C_{\mathbf{E}}$, $C_{\mathbf{E}} = \operatorname{cone} L_{\mathbf{E}}$, $L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}_{E_1}^1,\ldots,\mathbf{S}_{E_n}^n)$, $\mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) \in M^n$:

$$v(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X}).$$

Der Kapitalwert (Barwert) $B_n(\mathbf{X})$ ist die **Sofortentnahme** (der Margenbarwert) $v(\mathbf{X})$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bei einer speziellen Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{V}}(v(\mathbf{X})), \quad \mathbf{S}‘(\mathbf{X}) \in C_{M^n},$$

nämlich bei der Replizierung mit dem Basiszahlungsstrom $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, dem Bezugszahlungsstrom $\mathbf{U} = \mathbf{O}$, der Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu) = \bar{\mathbf{V}}(\mu) = \mu\cdot\mathbf{e}_1 = \mu\cdot(1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$$

der Sofortentnahme und einem speziellen Supplementsystem $L = L(\mathbf{K}_{E_j}^j)$ von Kassageschäften $\mathbf{S}_H^j = \mathbf{K}_H^j$, $\mathbf{S}_S^j = -\mathbf{K}_S^j$ $(j = 1,\ldots,n)$ mit den elementaren Zahlungsströmen

$$\mathbf{K}_{E_j}^j = K_{E_j,0}^j\cdot\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{j+1} = (K_{E_j,0}^j,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$$

und den Komponenten $K_{E_j,0}^j = -d_{0,j,E_j} < 0$ für $k = 0$, $K_{E_j,k}^j = 0$ für $k \neq 0, j$ und $K_{E_j,j}^j = 1$ für $k = j$ $(j = 1,\ldots,n,\ E_j \in M = \{H,S\})$:

$$v(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{X}).$$

Die **implizite Prämisse** einer ökonomischen Interpretation der Zeitwertmethode bzw. des Zeitwerts zum Zeitpunkt $t = m$ (insbesondere des Endwerts mit $m = n$ und des Barwerts mit $m = 0$) für den *fest fixierten* Zahlungsstrom $\mathbf{X}$ besteht in der Forderung der realen Verfügbarkeit des speziellen Kapitalmarktgeschäfts $\mathbf{S}‘(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{S}‘(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} + Z_{m,n}(\mathbf{X})\mathbf{e}_{m+1} \in K.$$

Die implizite Prämisse einer ökonomischen Interpretation der Zeitwertmethode für *alle* Zahlungsströme von $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht in der Forderung, dass sämtliche Supplemente der zulässigen Supplementmenge $C_{M^n} = C_{M^n}(L)$, $L = L(m,\mathbf{P}_{E_j}^j,\mathbf{M}_{E_j}^j)$, der Zeitwertmethode im zur Verfügung stehenden Kapitalmarkt K vorhanden sind:

$$C_{M^n}(L(m,\mathbf{P}_{E_j}^j,\mathbf{M}_{E_j}^j)) \subseteq K.$$

Für den Spezialfall der klassischen Zeitwertmethode mit konstantem nichtgespaltenen Kalkulationszinsfaktor q_K lautet diese Prämisse:

$$C_{M^n}(L) = H_{\mathbf{P}(q_K),0} \subseteq K.$$

In der nachfolgenden Charakterisierung der Übereinstimmung von Barwert- und Endwert-Präferenzordnung wird die zu einem Supplementsystem L gehörige zulässige Supplementmenge C_{M^n} verwendet:

$$C_{M^n} := \bigcup_{\mathbf{E}\in M^n} C_{\mathbf{E}}$$

mit den konvexen linearen Kegeln

$$C_{\mathbf{E}} := \text{cone } L_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{S} = L_{\mathbf{E}}\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^{\mathsf{T}} \geq \mathbf{O}\},$$

$L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}^1_{E_1},\ldots,\mathbf{S}^n_{E_n}) \in L_1 \times \ldots \times L_n,\ L_j = \{\mathbf{S}^j_H, \mathbf{S}^j_S\},\ \mathbf{E} = (E_1,\ldots,E_n) \in M^n.$

Die nachfolgende Abbildung 1 gehört zu einem Beispiel für $n = 2$, bei dem die Barwert- und die Endwert-Präferenzordnung übereinstimmen und die gemeinsame zulässige Supplementmenge $C_{M^n} = C'_{M^n}$ unvollkommen ist, also verschieden von einer Hyperebene $H_{\mathbf{T},0}$ ist (siehe Buch ‚Finanzmathematik', S. 252–255). Dabei wird auch der Linien(doppel)kegel R_{M^n} dargestellt, der eine wichtige Rolle spielt bei der Untersuchung der Vielfalt der mittels Duplizierung und Replizierung erzeugten D- und R-Präferenzordnungen:

$$R_{M^n} := C_{M^n} \cap (-C_{M^n}).$$

3 Übereinstimmung von Endwert- und Barwert-Präferenzordnung

Für die zu den Supplementsystemen $L = L(\mathbf{K}^j_{E_j})$ und $L' = L(\mathbf{R}^j_{E_j})$ der Barwert- und Endwert-Präferenzordnung gebildeten fiktiven Kapitalmärkte

$$K^* := \text{cone } L(\mathbf{K}^j_{E_j}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1},$$

$$K^{*\prime} := \text{cone } L(\mathbf{R}^j_{E_j}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

sei jeweils die Arbitragefreiheit vorausgesetzt,

(AF*) $\quad K^* \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O,$

(AF*') $\quad K^{*\prime} \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+0} = O,$

was durch folgende Ungleichungen für die Soll- und Habenwerte der gespaltenen Ab- und Aufzinsungsfaktoren charakterisiert wird:

(UD0) $\quad d_{0,j,S} \leq d_{0,j,H} \quad (j = 1,\ldots n),$

(UAn) $\quad a_{j,n,S} \geq a_{j,n,H} \quad (j = 0,\ldots,n\text{-}1).$

Die zu den Vergleichszeitpunkten $m = 0$ und $m' = n$ gehörige Barwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{B}}$ und Endwert-Präferenzordnung $\succcurlyeq_{\mathrm{E}}$ stimmen genau dann überein, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Die zu den Supplementsystemen $L = L(\mathbf{K}^j_{E_j})$ und $L' = L(\mathbf{R}^j_{E_j})$ gehörigen zulässigen Supplementmengen $C_{M^n} = C_{M^n}(L)$ und $C'_{M^n} = C_{M^n}(L')$ stimmen überein.
2) Der zu den beiden Vergleichszeitpunkten $m = 0$ und $m' = n$ gehörige Aufzinsungsfaktor a_{0,n,D_0} ist kein gespaltener Aufzinsungsfaktor, d. h. es stimmen der erste Haben- und der erste Soll-Aufzinsungsfaktor überein:

   (GA0n) $\quad a_{0,n,H} = a_{0,n,S} = a_{0,n}.$

   Eine gleichwertige Bedingung zu (GA0n) ist die Übereinstimmung von (n+1)-ten Haben- und (n+1)-ten Soll-Abzinsungsfaktor:

   (GD0n) $\quad d_{0,n,H} = d_{0,n,S} = d_{0,n}.$

Dies ist die Aussage von Zusatz 6.2 für die Vergleichszeitpunkte $m = 0$ und $m' = n$ im unten angegebenen Buch ‚Finanzmathematik' auf Seite 245f.

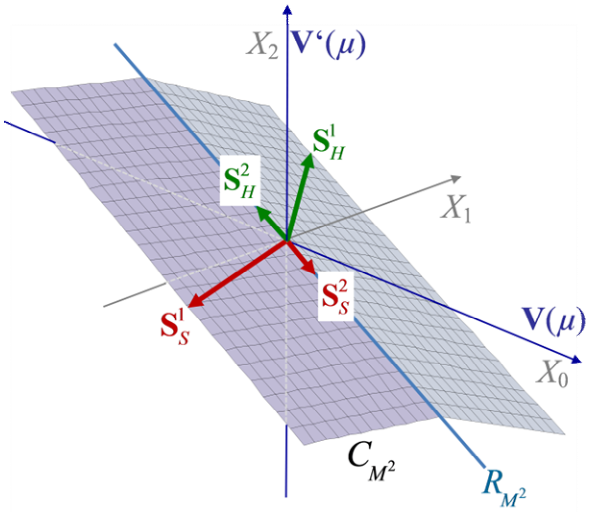

Abb. 1 Die zulässige Supplementmenge C_{M^2} und der Linienkegel R_{M^2} der übereinstimmenden Barwert- und Endwert-Präferenzordnung für die Laufzeit $n = 2$ bei gespaltenem Auf- und Abzinsungsfaktor der Zinsperiode [0,1]

Im **Spezialfall** von nichtgespaltenen Auf- und Abzinsungsfaktoren stimmen die Barwert- und die Endwert-Präferenzordnung genau dann überein, wenn der Abzinsungsvektor

$$\mathbf{T}^0 = (d_{0,0},\ldots,d_{0,n})^\mathsf{T} \qquad (d_{0,0} = 1)$$

und der Aufzinsungsvektor

$$\mathbf{T}^n = (a_{0,n},\ldots,a_{n,n})^\mathsf{T} \qquad (a_{n,n} = 1)$$

sich nur um einen positiven konstanten Faktor unterscheiden:

$$\mathbf{T}^n = \delta\mathbf{T}^0 \text{ mit einem } \delta > 0 \qquad (a_{0,n} = \delta = 1/d_{0,n}).$$

Dies ist die Aussage von Zusatz 6.3 im Buch ‚Finanzmathematik' auf Seite 246–247.

Literatur

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Tredition, Hamburg, 2. Auflage.