Ein Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

Rudolf Pleier

Juni 2015

Mittels des Trennungssatzes von Eidelheit (benannt nach dem polnischen Mathematiker Meier Eidelheit, 1910–1943), nach dem ein nichtleerer abgeschlossener konvexer linearer Kegel und eine nichtleere kompakte konvexe Menge im Falle ihrer Disjunktheit durch eine affine Hyperebene strikt getrennt werden können, kann der folgende Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel bewiesen werden. Der Teil b) dieses Satzes, in dem der konvexe lineare Kegel speziell ein linearer Unterraum ist, steht im engen Zusammenhang mit dem Satz von Stiemke (benannt nach dem deutschen Mathematiker Erich Stiemke, 1892–1915) und dem Minkowski-Farkas-Lemma (benannt nach dem ungarischen Physiker und Mathematiker Julius Farkas, 1847–1930, und dem deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski, 1864–1909).
Mit ihm kann sowohl im deterministischen als auch im stochastischen Fall eines arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkts für den Unterraum der Kapitalmarktgeschäfte die Existenz eines strikt positiven Normalenvektors, des sog. Preisvektors **P** bzw. Diskontierungsprozesses (Zustandspreisprozesses) Φ, nachgewiesen werden. Bei deterministischem unvollkommenen Kapitalmarkt kann die Existenz eines positiven Normalenvektors **P** nur für den Linienraum der vollkommenen Kapitalmarktgeschäfte und nicht für den gesamten (im Allgemeinen nicht topologisch abgeschlossenen) Kegel der Kapitalmarktgeschäfte gefolgert werden.

Beweise für die nachfolgenden Sätze, die Zusätze und den Vergleich der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma findet man im Buch des Autors auf S. 389, 395-397, 398-400 und bei den Download-Themen auf der Autorenwebsite www.pleier-r.de.

Satz 1 Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

a) Der nichtleere abgeschlossene konvexe lineare Kegel $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte nichtnegative Orthant (bzw. der schwach positive Orthant)

$$\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{o} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$$

sind genau dann disjunkt, wenn es einen positiven Vektor **a** im polaren Kegel

$$T^{\mathrm{P}} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq 0 \ \forall \ \mathbf{x} \in T\}$$

von T gibt und somit T in einem abgeschlossenen homogenen Halbraum

$$H^{\leq}_{\mathbf{a},0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \leq 0\}$$

und $\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}}$ im offenen homogenen Halbraum

$$H^{>}_{\mathbf{a},0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} > 0\}$$

mit positivem Normalenvektor **a** liegt:

$$T \cap \mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}} = \emptyset \iff T^{\mathrm{P}} \cap \mathbb{R}^n_{+} \neq \emptyset.$$

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Es hat also entweder T mit dem punktierten nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}}$ einen leeren Durchschnitt oder T^{P} mit dem (strikt) positiven Orthanten

$$\mathbb{R}^n_{+} = \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o}\}$$

einen leeren Durchschnitt. Es gilt also entweder $T \cap \mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}} = \emptyset$ oder $T^{\mathrm{P}} \cap \mathbb{R}^n_{+} = \emptyset$.

Eine äquivalente Formulierung lautet: Es hat entweder T mit dem punktierten nichtnegativen Orthanten einen nichtleeren Durchschnitt oder es besitzt T^{P} mit dem positiven Orthanten einen nichtleeren Durchschnitt. Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}} \neq \emptyset$;

(2) $T^{\mathrm{P}} \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}} \neq \emptyset$.

b) Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte nichtnegative Orthant $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ sind genau dann disjunkt, wenn einen positiven Vektor $\mathbf{a}$ im orthogonalen Komplement $T^\perp$ gibt und somit T in einer homogenen Hyperebene

$$H_{\mathbf{a},0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0\}$$

und $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$ mit positivem Normalenvektor $\mathbf{a}$ liegt:

$$T \cap \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}} = \emptyset \iff T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}} \neq \emptyset.$$

Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}} \neq \emptyset$;

(2) $T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}} \neq \emptyset$.

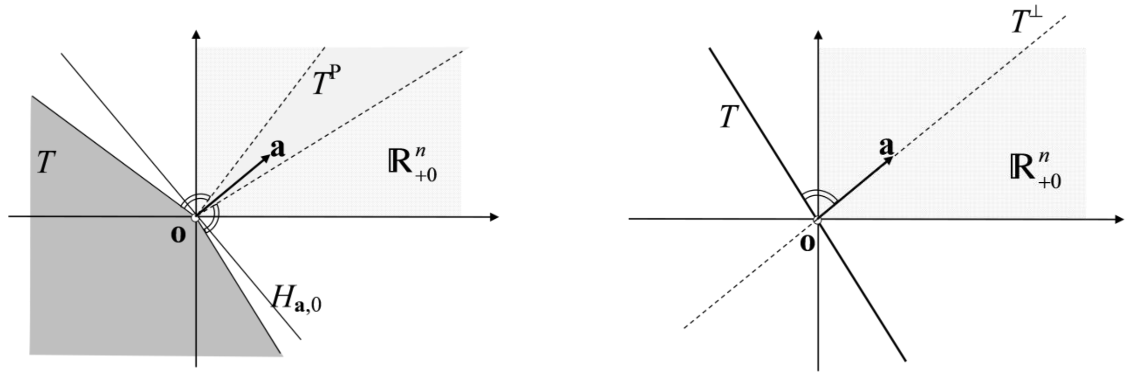

Abb. 1 Ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel T und ein linearer Unterraum T, die jeweils zum punktierten nichtnegativen Orthanten disjunkt sind, und ein positiver Vektor $\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}}$ bzw. $T^\perp$

Zusatz 2 Disjunktheit einer Hyperebene und des schwach positiven Orthanten

Die lineare Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen positiven (oder negativen) Normalenvektor $\mathbf{a}$ der Hyperebene gibt. Bei positiv gewähltem Normalenvektor $\mathbf{a}$ der Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ liegt der schwach positive Orthant im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$:

$$\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}} \subseteq H^{>}_{\mathbf{a},0}.$$

Mit dem gleichen Beweisweg wie für den obigen Satz 1 lässt sich der Satz auch noch verallgemeinern, indem die Positivität der Komponenten des Vektors $\mathbf{a} \in T^{\mathrm{P}}$ nicht für alle Indizes $j \in I_n := \{1,\ldots,n\}$, sondern nur für die Indizes j einer Teilmenge $J \subseteq I_n$ charakterisiert wird. Zur Formulierung verwendet man als Verallgemeinerung des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ dessen Teilmenge $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J)$, für deren Vektoren $\mathbf{x}$ die Komponenten x_i für die Indizes $i \in I_n \setminus J$ den Wert Null haben, die Komponenten x_j für die restlichen Indizes $j \in J$ nichtnegativ sind und mindestens ein Index $k \in J$ existiert mit $x_k > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\ \forall\ i \in I_n \setminus J,\ x_j \geq 0\ \forall\ j \in J,\ \exists\ k \in J \text{ mit } x_k > 0\}\\ &= \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}} \cap \bigcap_{i \in I_n \setminus J} H_{\mathbf{e}_i,0}\\ &= \{\mathbf{y} = \sum_{j \in J} y_j \mathbf{e}_j\ : y_j \geq 0\} \setminus \{\mathbf{o}\}.\\ &= \text{cone}\ \{\mathbf{e}_j : j \in J\} \setminus \{\mathbf{o}\}.\end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J)$ ist der schwach positive Orthant in dem Teilraum von $\mathbb{R}^n$, der durch die linearen Gleichungen $x_i = 0$ für die $i \in I_n \setminus J$ beschrieben wird, und auch eine Teilmenge des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ des $\mathbb{R}^n$. Weiter ist $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J)$ der (im Nullpunkt) punktierte von den speziellen Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_j$, $j \in J$, aufgespannte konvexe lineare Kegel. Als Spezialfall ergibt sich für $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J)$ mit $J = I_n$ der gesamte schwach positive Orthant $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(I_n) = \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ des $\mathbb{R}^n$.

Weiter definiert man als Verallgemeinerung des positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}$ in $\mathbb{R}^n$ die umfangreichere Teilmenge

$$\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_j > 0\ \forall\ j \in J\} = \bigcap_{j \in J} H^{>}_{\mathbf{e}_j,0}$$

des $\mathbb{R}^n$, bei der jetzt über die Vorzeichen der Komponenten x_i ($i \in I_n \setminus J$) keine Aussage gemacht wird. Als Spezialfall erhält man für $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J)$ mit $J = I_n$ den (strikt) positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(I_n) = \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}$. Die Menge $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J)$ ist der punktierte konvexe lineare Kegel zum konvexen linearen Kegel

$$\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) \cup \{\mathbf{o}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_j > 0\ \forall\ j \in J \text{ oder } \mathbf{x} = \mathbf{o}\}.$$

Satz 3 Allgemeinerer Alternativsatz über die Disjunktheit punktierter konvexer Kegel

a) Es sei J eine Teilmenge der Indexmenge $I_n = \{1,\ldots,n\}$. Der (nichtleere) abgeschlossene konvexe lineare Kegel $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte konvexe lineare Kegel $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J)$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$ im polaren Kegel T^{P} mit den positiven Komponenten a_j für die Indizes $j \in J$ gibt:

$$T \cap \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) = \emptyset \qquad \Leftrightarrow T^{\mathrm{P}} \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset.$$

In diesem Fall liegt T in abgeschlossenen homogenen Halbraum $H^{\leq}_{\mathbf{a},0}$ und $\mathbb{R}^J_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$ mit Normalenvektor $\mathbf{a}$.

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Es hat entweder T mit dem punktierten konvexen linearen Kegel $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J)$ einen nichtleeren Durchschnitt oder es besitzt T^{P} mit dem punktierten konvexen linearen Kegel $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J)$ einen nichtleeren Durchschnitt. Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset$;

(2) $T^{\mathrm{P}} \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset$.

b) Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte konvexe lineare Kegel $\mathbb{R}^J_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor $\mathbf{a}$ im orthogonalen Komplement $T^{\perp}$ mit den positiven Komponenten a_j für die Indizes $j \in J$ gibt und somit T in einer homogenen Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und $\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J)$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$ mit Normalenvektor $\mathbf{a}$ liegt:

$$T \cap \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) = \emptyset \Leftrightarrow T^{\perp} \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset.$$

Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset$;

(2) $T^{\perp} \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset$.

Aus Satz 3 ergeben sich als Spezialfälle mit $J = I_n$ der obige Satz 1 und mit $J = \{1\}$ der nachfolgende Satz 4. Im Falle $J = \{1\}$ ist

$$\mathbb{R}^n_{\underset{\cdot}{>}\mathbf{o}}(J) = \operatorname{cone} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} = \operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} \text{ und}$$

$$\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) = H^{>}_{\mathbf{e}_1,0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\} =: \{x_1 > 0\}.$$

Die Abbildung 2 gibt eine grafische Darstellung der in Satz 4 beschriebenen geometrischen Situation.

Der Satz 1 b) liefert eine schöne Anwendung in der zeitdiskreten Finanzmathematik, wo er für das Mehrperiodenmodell unmittelbar die Äquivalenz der Arbitragefreiheit, also der Disjunktheit des Unterraums T der Kapitalmarktgeschäfte zum schwach positiven Orthanten, zur Existenz eines positiven Preisvektors bzw. Diskontierungsprozesses in $T^{\perp}$ besagt. Der Satz 4 b) liefert für das Mehrperiodenmodell einen Beweis für die Äquivalenz des Law of One Price (LOP) zur Existenz eines Bewertungsvektors bzw. Bewertungsprozesses in $T^{\perp} \cap \{x_1 = 1\}$. Beim letzten Beweis wird verwendet, dass das LOP äquivalent ist zu $T \cap \operatorname{lin} \mathbf{e}_1 = O = \{\mathbf{o}\}$ bzw. zu $T \cap \operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} = \emptyset$ und dass $T^{\perp} \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset$ gleichbedeutend zu $T^{\perp} \cap \{x_1 = 1\} \neq \emptyset$ ist.

Satz 4 Spezieller Alternativsatz zur Disjunktheit eines abgeschlossenen konvexen Kegels und des punktierten Strahls des ersten Standardbasisvektors

a) Der (nichtleere) abgeschlossene konvexe lineare Kegel $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte Strahl $\operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ des ersten Standardbasisvektors $\mathbf{e}_1 = (1,0,\dots,0)^{\mathsf{T}}$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)^{\mathsf{T}}$ im polaren Kegel T^{P} mit der positiven Komponente a_1 gibt:

$$T \cap \operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad T^{\mathrm{P}} \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset.$$

In diesem Fall liegt T im abgeschlossenen homogenen Halbraum $H^{\leq}_{\mathbf{a},0}$ und $\operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$ mit Normalenvektor $\mathbf{a}$.

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Es hat entweder T mit dem punktierten konvexen linearen Kegel $\operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ einen nichtleeren Durchschnitt oder es besitzt T^{P} mit dem punktierten konvexen linearen Kegel $H^{>}_{\mathbf{e}_1,0}$ einen nichtleeren Durchschnitt. Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} \neq \emptyset$;

(2) $T^{\mathrm{P}} \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset$.

b) Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte Strahl $\operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)^{\mathsf{T}}$ im orthogonalen Komplement $T^{\perp}$ mit der positiven Komponente a_1 gibt:

$$T \cap \operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad T^{\perp} \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset.$$

In diesem Fall liegt T in der homogenen Hyperebene $H_{\mathbf{a},0}$ und $\operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathrm{o}\}$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{a},0}$ mit Normalenvektor $\mathbf{a}$.

Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \operatorname{ray} \mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\} \neq \emptyset$;

(2) $T^{\perp} \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset$.

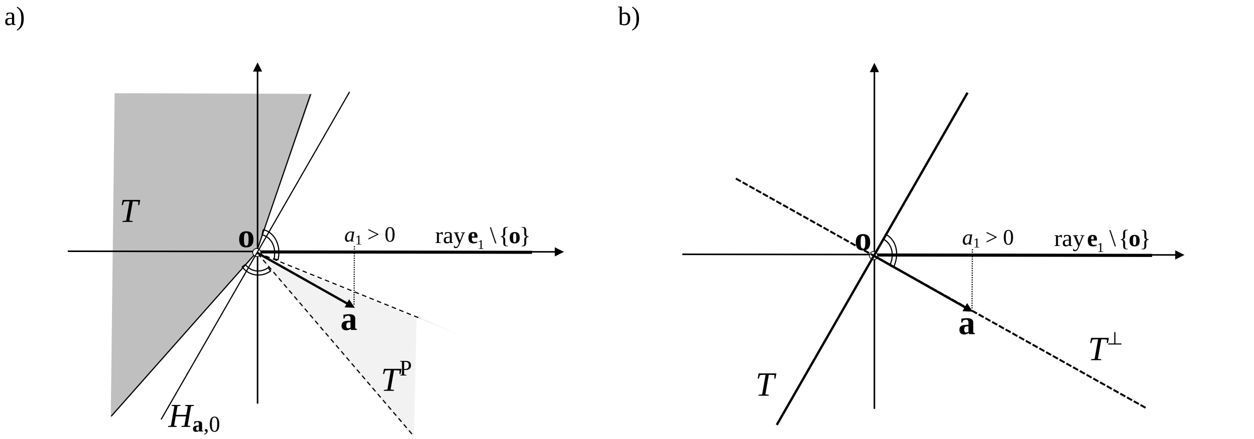

Abb. 4 Ein abgeschlossener konvexer linearer Kegel T und ein linearer Unterraum T, die jeweils zum punktierten Strahl ray $\mathbf{e}_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ des ersten Standardbasisvektors $\mathbf{e}_1$ disjunkt ist, und ein in der ersten Komponente positiver Vektor $\mathbf{a}$ im polaren Kegel T^{P} bzw. im orthogonalen Komplement $T^{\perp}$ von T

Beschränkt man sich in Satz 1, Teil a) auf abgeschlossene konvexe lineare Kegel T, die als Durchschnitt von *endlich* vielen homogenen Halbräumen gebildet werden, also auf polyedrische Kegel, bzw. nach dem Polyederdarstellungssatz gleichbedeutend dazu auf endlich erzeugte lineare Kegel, so kann dessen Aussage in einen Alternativsatz über die Lösbarkeit endlicher linearer Ungleichungssysteme umformuliert werden. Ebenso liefert Satz 1, Teil b) einen entsprechenden Alternativsatz, da ein linearer Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ stets als Durchschnitt endlich vieler linearer Hyperebenen bzw. als Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems und auch als lineare Hülle einer Basis von T dargestellt werden kann.

Zusatz 5 Alternativsatz über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen

Es sei eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gegeben.

a) Von den beiden folgenden Ungleichungssystemen ist dann entweder (1‘) oder (2‘) lösbar:

(1‘) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: $L\mathbf{z} \mathrel{\underset{\cdot}{>}} \mathbf{o}$, $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$;

(2‘) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{v}^{\mathsf{T}} L \leq \mathbf{o}$, $\mathbf{v} > \mathbf{o}$.

b) **Satz der Alternativen von Erich Stiemke** (1915): Von den beiden folgenden Ungleichungssystemen ist dann entweder (1‘) oder (2‘) lösbar:

(1‘) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: $L\mathbf{z} \mathrel{\underset{\cdot}{>}} \mathbf{o}$;

(2‘) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{v}^{\mathsf{T}} L = \mathbf{o}$, $\mathbf{v} > \mathbf{o}$.

Den entsprechenden Satz über *inhomogene* lineare Ungleichungssysteme erhält man mittels einer Variablentransformation mit den Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{\mathsf{T}} \\ -A^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$L^{\mathsf{T}} = (\mathbf{b}, -A)$$

und den Variablen

$$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{v} = (1, \mathbf{x})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Zusatz 6 Alternativsatz über die Lösbarkeit von inhomogenen linearen Ungleichungssystemen

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\text{x}n}$ und ein Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) Es ist dann genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (1“) oder (2“) lösbar:

(1“) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: α) $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$, $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} > 0$, $A^{\mathsf{T}}\mathbf{z} \leq \mathbf{o}$ oder
β) $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$, $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} \geq 0$, $A^{\mathsf{T}}\mathbf{z} \underset{\cdot}{<} \mathbf{o}$;

(2“) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} > \mathbf{o}$, $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.

b) **Inhomogene Version des Satzes von Stiemke**: Es ist dann genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (1“) oder (2“) lösbar:

(1“) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: α) $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} > 0$, $A^{\mathsf{T}}\mathbf{z} \leq \mathbf{o}$ oder
β) $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} \geq 0$, $A^{\mathsf{T}}\mathbf{z} \underset{\cdot}{<} \mathbf{o}$;

(2“) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} > \mathbf{o}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Der Vergleich der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma

Das **Minkowski-Farkas-Lemma** besagt, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\text{x}n}$ und einen Vektor $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^m$ genau eines der beiden folgenden Ungleichungssysteme (I) oder (II) lösbar ist:

(I) $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$: $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{z} > 0$, $A^{\mathsf{T}}\mathbf{z} \leq \mathbf{o}$;

(II) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Im Ungleichungssystem (II) wird mit den nichtnegativen $\mathbf{x}$ eine größere Lösungsmenge zugelassen als im Ungleichungssystem (2“) der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit den positiven $\mathbf{x}$. Im Gegenzug dazu verkleinert sich in (I) die Lösungsmenge auf den Fall α) von (1“). Beim Ungleichungssystem (I) des Minkowski-Farkas-Lemmas wird für die schwache Positivität des Vektors $L\mathbf{z} = (\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{z}, -A^{\mathsf{T}}\mathbf{z})^{\mathsf{T}}$ im Ungleichungssystem (1“) also nur der Fall α) und nicht auch noch der Fall β) zugelassen.

Das Minkowski-Farkas-Lemma bedeutet geometrisch, dass der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ entweder gemäß (II) in dem von den Spalten $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ der Matrix $A = (\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ erzeugten konvexen linearen Kegel liegt,

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \in\ & \text{cone}\,\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\} = \text{cone}\,A = A(\mathbb{R}^n_{+0})\\ & = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}\\ & = \{x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n : x_j \geq 0 \text{ für } j = 1,\ldots,n\},\end{aligned}$$

oder gemäß (I) sich von diesem Kegel folgendermaßen trennen lässt (siehe Abbildung 2):

$$\exists\, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m: \quad \mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} > 0 \geq \mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} \ \text{ für alle } \mathbf{u} \in \text{cone}\,A,$$
$$\text{d.h. für alle } \mathbf{u} = A\mathbf{x} \text{ mit } \mathbf{x} \geq \mathbf{o}.$$

Eine Begründung für diese geometrische Interpretation findet man im unten angegebenen Buch ‚Finanzmathematik‘ auf S. 617–620.

Die **inhomogene Version des Satzes von Stiemke** dagegen bedeutet geometrisch, dass der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ entweder gemäß (2“) im Bild des positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{o}\}$ bei der durch $A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ vermittelten linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ liegt,

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \in\ & A(\mathbb{R}^n_+)\\ & = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{o}\}\\ & = \{x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n : x_j > 0 \text{ für } j = 1,\ldots,n\},\end{aligned}$$

oder gemäß (1“) sich von diesem Bild derart trennen lässt, dass eine Hyperebene $H_{\mathbf{z},0}$ existiert mit

$\alpha)$ $\mathbf{b} \in H^{>}_{\mathbf{z},0} \;\wedge\; A(\mathbb{R}^n_+) \subseteq H^{\leq}_{\mathbf{z},0}$ oder

$\beta)$ $\mathbf{b} \in H^{\geq}_{\mathbf{z},0} \;\wedge\; A(\mathbb{R}^n_+) \subseteq H^{<}_{\mathbf{z},0}$.

Im Fall (1“) sind die Mengen $\{\mathbf{b}\}$ und $A(\mathbb{R}^n_+)$ also so genannte eigentlich trennbare Mengen ($\{\mathbf{b}\} \cup A(\mathbb{R}^n_+) \not\subseteq H_{\mathbf{z},0}$). Die Menge $A(\mathbb{R}^n_+)$ ist die Menge aller Positivkombinationen (positiven Linearkombinationen) der Spalten $\mathbf{a}_j$ der Matrix A. Während im Fall (I) des Minkowski-Farkas-Lemmas der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ nur im offenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{z},0}$ liegen kann, kann im entsprechenden Fall (1“) der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sowohl im offenen Halbraum $H^{>}_{\mathbf{z},0}$ (Fall 1“α) als auch im abgeschlossenen Halbraum $H^{\geq}_{\mathbf{z},0}$ (Fall 1“β) liegen. Eine ausführlichere Begründung für die geometrische Interpretation der Fälle 1“α) und 1“β) findet man im nachfolgend angegebenen Buch des Autors auf S. 399–400.

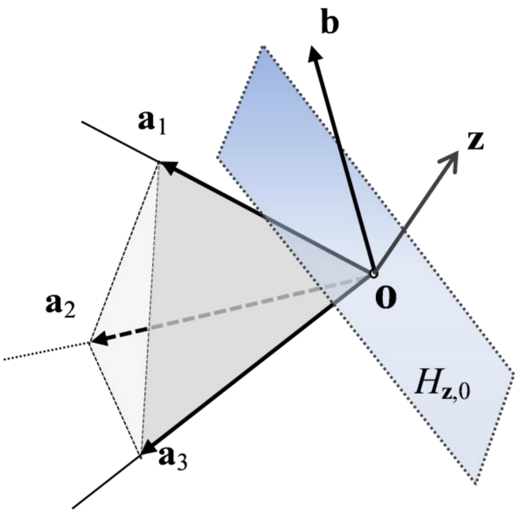

Abb. 2 Der Fall (I) im Minkowski-Farkas-Lemma bzw. der Fall (1“α) in der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke, in dem $\mathbf{b}$ außerhalb des Kegels cone $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ liegt ($m = n = 3$)

Literatur

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Tredition, Hamburg, 2. Auflage, ISBN 978-3-347-35460-9